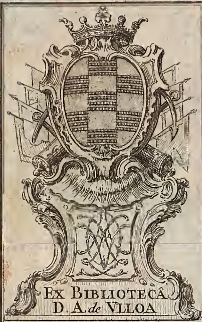



EX BIBLIOTECA
D. A. de VLLOA



CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI, FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

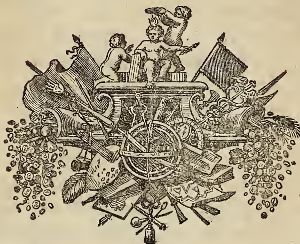
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS SECUNDUS,

Qui MECHANICAM cum STATICA, HYDROSTATICAM, AEROMETRIAM atque HYDRAULICAM complectitur.

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

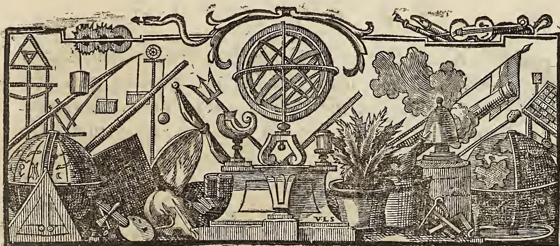




GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCXLVI.



PRÆFATIO.



OVA hæc Matheſeos Elementa eo fine conſcripſimus, ut Mathematum cultores palmarias Matheſeos univerſæ veritates labore facili intra breve temporis ſpatium ſibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: Ita enim futurum confidimus, ut ad legendos quoſvis Autores, qui de rebus mathematicis commentati ſunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quaſcunque à Matheſi diverſas Scientias ſeveriùs & fructuoſiùs tractandas accedant. Atque eodem conſilio novæ huic Elementorum Editioni plurima adjeci, quæ in priore non leguntur, ut adeo totum opus in Duos Tomos diviſum antea, in quatuor nunc ſecari opus fuerit. Prodit jam Tomus Secundus, qui *Mechanicam*, *Hydroſtaticam*, *Aërometriam* & *Hydraulicam* complectitur, atque adeo Motum & Æquilibrium ſolidorum ac fluidorum exponit. Veteres,

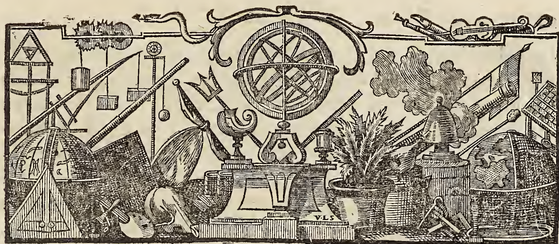
præeunte ARCHIMEDE in Libris *De Æquiponderantibus & Insidentibus humido*, ultra æquilibrium gravium non progressi sunt; primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid addere ausus motum gravium ad notiones distinctas & fœcundas revocavit, usum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clarissimo specimine demonstrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indivisibilium uberius exculta tandemque ad Analysin certam revocata terebatur, ut sublimiora ingenia ad veritates maxime abstrusas atque abditas accederent. Admiranda igitur de Motu solidorum ac fluidorum hodie prostant inventa, sed ita ab Inventoribus proposita, ut ab iis tangendis arceantur Tyrones & quotquot in Mathesi consenescere omneque tempus suum consumere prohibentur. Nostrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui sedato animo in Elementis nostris tractandis progreditur, eo quo conscripta sunt, ordine, illa eâdem facilitate perspiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perspexerat. Ea de causa, Mechanica inprimis & Hydraulica plurimis accessionibus in nova hac Editione aucta. Ita Theoriam de Motu gravium effecimus generalem, ut, cum in priore Editione tantummodo cum GALILÆO motum uniformiter acceleratum exposuerimus, nunc ad accelerationem quacunque lege factam illam extenderimus. Addidimus Methodos investigandi Centrum gravitatis in spatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum, tendentiamque mediam in Motu composito; ut alia taceamus. Integrum Caput octavum de descensu & ascensu corporum

porum in lineis curvis, quod præclara maxime continet ævi hujus inventa, loco conveniente inſeruimus. Theoriam de motu Penduli ex ſublimioribus inventis effecimus uberiorem: Id quod etiam circa Theoriam de Centro oſcillationis curæ nobis cordique fuit. Eadem nobis dicenda ſunt de Motu projectorum & de Motu corporum ex percuſſione. Inprimis autem Theoria de Viribus centralibus uberrimè a nobis pertractata, cujus antea primas tantummodo lineas duxeramus. Caput decimum - quartum integrum de Reſiſtentia medii nunc demum accedit. Non commemoramus ea, quæ paſſim adſperſa a nobis fuere: Quâ de causâ de Hydroſtaticæ & Aërometriæ acceſſionibus ſpecialiora non proferimus. Hydraulicæ tandem Theoriam non uno modo reddidimus ampliorem, eamque duobus integris Capitibus de Curſu fluminum & de Percuſſione fluidorum auximus. Ac hoc pacto finem, quem intendimus, nos conſecutos eſſe ſperamus. Cur ex intervallo demum prodeat Tomus Secundus, cauſæ in vulgus notæ ſunt, ut de iis dicere ſupervacaneum exiſtimem. Operam daturi ſumus, ut Tomus Tertius, etſi mole Secundum ſuperaturus, celerius ſequatur, ſi Deo ita viſum fuerit. Nullus vero dubito non defuturam in hoc Secundo Tomo materiam, in qua interea induſtriam ſuam exerceant Mathematum cultores, donec Tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo, quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt: Utut ingens quoque eorum farrago ſit, quæ ad vitæ non minus jucunditatem, quam neceſſitatem utilia. Quotquot igitur animum habent ſciendi cupidum, ex materiis, de quibus hic inſtituitur tractatio, plurimum voluptatis percipient. Neque ullus dubito

bito fore, ut, qui cum attentione in iis discutiendis versati fuerint, Artem inveniendi ipso usu sibi sint comparaturi, qua deinceps extra Mathesin felicissime utentur. Dabam MARBURGI CATTORUM, die 28 Martii, Anno 1733.



ELEMENTA



ELEMENTA MECHANICÆ ET STATICÆ.

PRÆFATIO.



PLERISQUE Autoribus, qui Mechanicæ Elementa in uſum tyronum explicarunt, non omnis Motus ratio habetur, ſed ejus tantum qui, vel Virium vel Temporis aliquo compendio, ope Machinarum perficitur. Nec improbandum eſt eorum inſtitutum; ſi quidem plura docere non intendunt, quam quæ in conſtruendis & examinandis Machinis uſum præbere poſſunt. Quo-

Quoniam tamen nobis conſtitutum eſt Matheſeos Elementa dare, non modo ad uſum vitæ humanæ, ſed & ad profectum Scientiarum, Phyſicæ præſertim, ſufficientia; ideo conſultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illuſtrandam Motus doctrinam hactenus inventa. Hæc enim neceſſaria ſunt ad Naturæ cognitionem, ut ſine iis certa obtineri nunquam poſſit; cum in Motu plurimorum Phænomenorum ratio contineatur. Ipſarum vero etiam Machinarum conſideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in Phyſicis aliquando verſaturus; cum Motus corporum organicorum explicatio fruſtra ſine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars Motuum Scientiæ ſuperſtruatur, Experientia clariſſime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos neceſſitatibus vitæ humanæ impulſi non ſine maximo ſudore perageremus. Eum igitur in finem, non ſolum Machinarum ſimplicium (quod vulgo fieri ſolet) rationem omnem fideliter expoſui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum conſtructionem ſcitu neceſſaria ſunt, & deſideratam hactenus in iſtiuſmodi Elementis tractationem de Potentiarum ad Machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his ſolis contenti præterire poſſunt Motus regulas: Machinarum enim Vires ſine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica ſejungant; conſultius tamen viſum fuit ſororio vinculo utramque connecti, cum ita demonſtrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELEMEN-

ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Æquabili.

DEFINITIO I.

1. MECHANICA est Scientia Motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de Æquilibrio Solidorum agit.

DEFINITIO II.

2. *Quies* est permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero est continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. Moveri *nempe dicitur corpus, si successive aliis aliisque corporibus quiescentibus, aut ejusdem corporis quiescentis partibus fit contiguum.*

DEFINITIO III.

4. *Gravitas* est nisus deorsum versus centrum Terræ.

DEFINITIO IV.

5. *Gravitatio* est pressura, quam corpus in aliud sibi subjectum vi Gravitatis suæ exercet.

DEFINITIO V.

6. *Massa* corporis est materia ipsi cohærens, hoc est, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO VI.

7. *Moles* seu *Volumen* est expansio corporis secundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO VII.

9. *Vis Motrix*, seu *Vis* simpliciter, est principium motus, seu id unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, si cum motu actuali conjungitur, qualis est in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, si ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, seu quæ in solo nisu seu conatu ad motum consistit, qualis est in globo ex filo suspenso, & in elatere tenso quod se restituere nititur.

SCHOLION.

10. *Hanc Virium distinctionem dudum agnovere inter homines plebeios Molitores nostrates.* Mortuam *enim vocant* aquam *in alveo stagnantem aut segniter admodum fluentem;* vivam *vero, quæ impetu concepto rotis molendinorum circumagendis sufficit. Acutissimus* LEIBNITIUS *cum magnum momentum in ea situm esse deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in* Mechanicam *introduxit* (*a*).

DEFINITIO VIII.

11. *Tempus* hic voco eam temporis partem, qua motus durasse supponitur.

DEFINITIO IX.

12. *Spatium* est linea, quam mobile instar puncti consideratum motu suo describere concipitur.

DEFINITIO X.

13. *Velocitas* seu *Celeritas* est ea Vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore spatium datum percurrendi.

COROLLARIUM.

14. Celeritas adeo dupla est, qua eodem tempore spatium duplum describitur; tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum describitur; & ita porro in infinitum, in quacunque multiplicium vel submultiplicium specie.

SCHOLION I.

15. *Nimirum celeritas tanto major censetur ab omnibus, quanto majus spatium eodem tempore percurrit mobile. Ponamus mobile A intervallo unius minuti secundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile B, quod intervallo unius secundi percurrat spatium trium pedum. Ultro fatebuntur omnes celeritatem ipsius mobilis B majorem esse celeritate alterius A.*

(*a*) *Act. Erudit.* An. 1695. p. 124.

SCHOLION II.

16. *Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod satis patet attendenti, celeritas quasi per totam mobilis massam diffusa concipitur, ita ut eadem in singulis partibus existat. Proprie loquendo est gradus vis motricis.*

DEFINITIO XI.

17. *Linea directionis* est, juxta quam corpus progredi nititur.

DEFINITIO XII.

18. Velocitas sumta cum directione dicitur *Conatus.*

SCHOLION.

19. *Unde conatus censetur major, quo major est celeritas.*

DEFINITIO XIII.

20. *Vis resistendi* dicitur, quæ in contrarium, seu juxta oppositam directionem Vis cujuscunque alterius agit.

SCHOLION.

21. *Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.*

DEFINITIO XIV.

22. *Quantitas motus*, momentanea scilicet, est factum ex celeritate in massam. LEIBNITIUS appellat *Quantitatem motionis.*

SCHOLION.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & a quantitate massæ, & a quantitate celeritatis; ita ut in eodem corpore motus existimetur major, si major est celeritas, qua movetur; & in duobus corporibus, quorum eadem est celeritas, ejus motus major sit, cujus massæ quantitas major est.*

DEFINITIO XV.

24. *Motus æquabilis* eſt, ſi mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA I.

25. *Nihil eſt ſine ratione ſufficiente, cur potius ſit, quam non ſit.*

SCHOLION.

26. *De hoc Principio plura diximus in* Ontologia *ſeu* Philoſophia prima, *integro Capite 2, Sect. 1, Part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite ſuppoſuit* ARCHIMEDES *in libris* De Æquiponderantibus.

AXIOMA II.

27. *Si Mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribit.*

SCHOLION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum ſpatium dato tempore percurrendum (§. 13.); nulla ſane ratio eſt, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diverſa ſpatia deſcribere deberet. Deſcribit adeo eandem (§. 25.). Axiomatis hujus veritatem apertius ſtabilimus in* Philoſophia prima *(§. 656. Ontol.), ubi etiam Scientiarum Mathematicarum principia demonſtrativa ratione a priori ex notionibus ſimplicioribus deduximus.*

AXIOMA III.

29. *Si duo Mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia ſpatia deſcribunt.*

SCHOLION.

30. *Patet idem per Axioma primum (§. 25). Conferatur eadem* Philoſophia prima *(§. 660).*

THEOREMA I.

31. *In motu æquabili, Spatia a mobili percurſa ſunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis, *(per hypoth.)*, mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare ſi tempore t deſcribit ſpatium $ſ$, alio tempore t priori æquali deſcribit quoque ſpatium $ſ$ priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis t ſpatium bis $ſ$, immo tempore quocunque multiplici ſeu ſubmultiplici $nt (= T)$ ſpatium $nſ (= S)$. Sunt igitur ſpatia $ſ$ & S ut tempora t & T (§. 184 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA II.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur; Spatia deſcripta ſunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit ſpatium $ſ$, etiam mobile B, quod eadem celeritate fertur, (*per hypoth.*) eodem tempore t percurrit ſpatium $ſ$ priori æquale (§. 29). Sed ſi idem mobile percurrit tempore quocunque alio T ſpatium S, erit hoc ad alterum $ſ$ ut T ad t (§. 31). Quare cum ſpatium $ſ$ ſit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonſtrata*; ſpatia $ſ$ & S, a mobilibus A & B temporibus t & T deſcripta, ſunt ut tempora t & T, quibus deſcribuntur. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur; Spatia eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt ut Celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t celeritate c ſpatium $ſ$ deſcribit; eodem tempore t celeritate bis c deſcribit ſpa-

tium bis f, & celeritate quacunque multiplici vel submultiplici nc spatium quodcunque multiplex vel submultiplex nf (§. 31). Erunt adeo spatia f & S ($= nf$) descripta ut celeritates c & C ($= nc$). Quare si mobile B eodem tempore t celeritate C describit spatium S: erit adhuc spatium a mobili A descriptum f ad spatium a mobili B eodem tempore descriptum S ut celeritas illius c ad celeritatem hujus C. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta sunt in ratione composita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Describat mobile A celeritate c spatium f tempore t, & B celeritate C spatium S tempore T. Ponamus idem mobile B celeritate c describere spatium q tempore T. Quoniam celeritas c mobilium A & B eadem, erit $q:f = T:t$ (§. 32). Et quia spatia S & q eodem tempore T describuntur, erit $S:q = C:c$ (§. 33). Ergo $Sq:fq = TC:tc$ (§. 213 *Arithm.*); consequenter $S:f = TC:tc$ (§. 181 *Arithm.*); hoc est, spatia sunt in ratione composita temporum & celeritatum (§. 159 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

35. Si $S = f$; erit $CT = ct$, adeoque $C:c = t:T$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si duo corpora motu æquabili æqualia spatia describunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM II.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$; adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali spatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA V.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates* C *&* c *sunt in ratione composita ex directa spatiorum* S *&* f *& reciproca temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Est enim $S:f = CT:ct$ (34). Quare cum sit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arith.*); erit $C:c = St:fT$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

38. Quoniam $C:c = St:fT$ (§. 37); erit $C:c = \frac{S}{T}:\frac{f}{t}$ (§. 181 *Arithm.*). Quare celeritas C analytice exprimitur per $\frac{S}{T}$; hoc est, celeritas est ut spatium per tempus divisum.

THEOREMA VI.

39. *Si duo corpora motu æquabili lata celeritatibus* C *&* c *describunt spatia* S *&* f; *tempora* T *&* t, *quibus describuntur, erunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $S:f = CT:ct$ (§. 34); erit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arithm.*). Quare $T:t = cS:Cf$ (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

40. *Si spatia* S *&* f *a duobus mobi-* libus

libus motu æquabili descripta fuerint ut celeritates C *&* c, *tempora* T *&* t *erunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Est enim $S : s = CT : ct$ (§. 34). Quare si esse debet $S : s = C : c$, necesse est ut sit $T = t$ (§. 178 *Arithm.*). Est vero $S : s = C : c$ *per hypoth.* Ergo etiam $T = t$. *Q. e. d.*

Idem etiam hoc modo ostenditur. $S : s = C : c$, *per hypoth.* Sed $S : s = CT : ct$ (§. 34). Ergo $C : c = CT : ct$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $1 : 1 = T : t$ (§. 185 *Arithm.*). Quare cum sit $1 = 1$, erit etiam $T = t$. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

41. *Quantitates motus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur,* Q *&* q, *sunt in ratione composita celeritatum* C *&* c *& massarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Est enim $Q = CM$, & $q = cm$ (§. 22). Quare $Q : q = CM : cm$, hoc est, Q habet ad q rationem compositam ipsius C ad c & ipsius M ad m (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Si $Q = q$; erit $CM = cm$, adeoque $C : c = m : M$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si quantitates motus duorum mobilium motu æquabili latorum fuerint æquales; celeritates habent rationem massarum reciprocam.

COROLLARIUM II.

43. Quare si ulterius $M = m$; erit etiam $C = c$: hoc est, si duorum mobilium ejusdem massæ motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM III.

44. Similiter si $C = c$; erit $M = m$: hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moventur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt massæ eorundem æquales.

THEOREMA IX.

45. *Duorum corporum quæ motu æquabili feruntur, celeritates* C *&* c *sunt in ratione composita ex quantitatum motus* Q *&* q *directa & massarum* M *&* m *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41)
erit $Qcm = qCM$ (§. 297 *Arithm.*)
Ergo $C : c = Qm : qM$ (§. 299 *Arithm.*)
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

46. Si $C = c$; erit $Qm = qM$, adeoque $Q : q = M : m$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus massarum rationem habent.

COROLLARIUM II.

47. Quodsi ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $Q = q$: adeoque si duo mobilia æqualem massam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales sunt.

THEOREMA X.

48. *In motu æquabili massæ corporum* M *&* m *sunt in ratione composita ex quantitatum motus* Q *&* q *directa & celeritatum* C *&* c *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41)
erit $Qcm = qCM$ (§. 297 *Arithm.*)
Ergo $M : m = Qc : qC$ (§. 299 *Arithm.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM.

49. Si $M = m$; erit $\mathfrak{Q}c = qC$, adeoque $\mathfrak{Q} : q = C : c$ (§. 299 *Arithm.*) : hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum massæ fuerint æquales; quantitates motus sunt ut velocitates.

THEOREMA XI.

50. *In motu æquabili, quantitates motus* Q *&* q *sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum* M *&* m *atque spatiorum* S *&* ſ *& reciproca temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\underline{C : c = St : ſT}$ (§. 37)
& $\underline{\mathfrak{Q} : q = CM : cm}$ (§. 41)
erit $CQ : cq = CMSt : cmſT$
(§. 213 *Arithm.*)
$\overline{Q : q = MSt : mſT}$ (§. 185 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

51. Si $\mathfrak{Q} = q$; erit $MSt = mſT$, adeoque $M:m = ſT : St$, $S:ſ = mT:Mt$, $T : t = MS:mſ$: hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; 1°. massæ eorundem sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca spatiorum: 2°. Spatia sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca massarum: 3°. Tempora denique sunt in ratione composita massarum & spatiorum.

COROLLARIUM II.

52. Si præterea $M = m$; erit $ſT = St$, adeoque $S : ſ = T : t$ (§. 299 *Arithm.*). Nempe si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac massæ fuerint æquales; spatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM III.

53. Si ulterius $T = t$; erit quoque $S = ſ$. Duo igitur mobilia, quorum massæ ac quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt.

COROLLARIUM IV.

54. Si præter $\mathfrak{Q} = q$, fuerit $S = ſ$; erit $mT = Mt$ (§. 51) adeoque $M : m = T : t$ (§. 299 *Arithm.*) : hoc est, si duo mobilia, quorum quantitates motus æquales sunt, æquabili motu æqualia spatia percurrunt; massæ eorundem sunt temporibus proportionales, vel, quod perinde est, tempora sunt massis proportionalia.

COROLLARIUM V.

55. Si ulterius $T = t$; erit etiam $M = m$; adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales sunt & quæ eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt, massæ æquales sunt.

COROLLARIUM VI.

56. Si præter $\mathfrak{Q} = q$, fuerit $T = t$; erit $MS = mſ$ (§. 51), adeoque $S : ſ = m : M$: hoc est, spatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili descripta sunt in ratione massarum reciproca.

THEOREMA XII.

57. *In motu æquabili, spatia* S *&* ſ *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca massarum* M *&* m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : mſT$ (§. 50)
erit $QmſT = qMSt$ (§. 297 *Arithm.*).
Unde $S : ſ = QTm : qtM$ (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM I.

58. Si $S = f$; erit $QTm = qtM$; adeoque $Q : q = tM : Tm$, $M : m = QT : qt$, $T : t = qM : Qm$ (§. 299 *Arithm.*). Quodsi adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia spatia feruntur; erunt 1°. quantitates motus in ratione composita ex directa massarum & reciproca temporum: 2°. massæ in ratione composita quantitatum motus atque temporum: 3°. tempora in ratione composita ex directa massarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM II.

59. Si præter $S = f$, fuerit $M = m$; erit $QT = qt$, adeoque $Q : q = t : T$ (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, quantitates motus sunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia spatia feruntur.

COROLLARIUM III.

60. Si præter $S = f$, fuerit $T = t$; erit $qM = Qm$ (§. 58), adeoque $Q : q = M : m$ (§. 299 *Arithm.*) Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia spatia æquali tempore motu æquabili feruntur, quantitates motus massis proportionales sunt.

THEOREMA XIII.

61. *Corporum motu æquabili latorum massæ* M *&* m *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca spatiorum* S *&* f.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : mfT$ (§. 50): erit $QmfT = qMSt$ (§. 297 *Arithm.*) Unde $M : m = QTf : qtS$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Si $M = m$; erit $QTf = qtS$, adeoque $Q : q = tS : Tf$, $S : f = QT : qt$ & $T : t = qS : Qf$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum massæ æquales, 1°. quantitates motus sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca temporum: 2°. spatia sunt in ratione quantitatum motus & temporum composita: 3°. tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca quantitatum motus.

COROLLARIUM II.

63. Si præter $M = m$ fuerit $T = t$; erit $qS = Qf$, adeoque $Q : q = S : f$ (§. 299 *Arithm.*); hoc est quantitates motus duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, spatiis æquali tempore peractis proportionales sunt.

THEOREMA XIV.

64. *In motu æquabili tempora* T *&* t *sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum* M *&* m *atque spatiorum* S *&* f *& reciproca quantitatum motus* Q *&* q.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : mfT$ (§. 50); erit $QmfT = qMSt$ (§. 297 *Arithm.*). Unde $T : t = qMS : Qmf$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

65. Si $T = t$; erit $qMS = Qmf$, adeoque $Q : q = MS : mf$, $M : m = Qf : qS$ & $S : f = Qm : qM$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquidiuturnus; erunt 1°. quantitates motus in ratione massarum & spatiorum composita: 2°. massæ in ratione composita ex quantitatum motus directa & spatiorum reciproca: 3°. spatia in ratione composita ex directa quantitatum motus & reciproca massarum.

SCHOLION.

66. *Suadeo tyronibus, ut hactenus demonstrata numeris illustrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus A, cujus massa sit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 secundorum emetiri spatium 12 pedum, & corpus aliud B, cujus massa sit ut 5, tempore 8 secundorum emetiri spatium 16 pedum: habebimus* M = 7, T = 3, S = 12, m = 5, t = 8, ſ = 16, *adeoque* C = 4, c = 2 (§. 38.), Q = 28, q = 10 (§. 22). *Hinc utique deprehenditur.*

C : c = St : ſT (§. 37)
4 : 2 = 12. 8 : 16. 3 = 96 : 48 = 4 : 2
S : ſ = CT : ct (§. 34)
12 : 16 = 4. 3 : 2. 8 = 12 : 16
T : t = cS : Cſ (§. 39)
3 : 8 = 2. 12 : 4. 16 = 24 : 64 = 3 : 8
C : c = Qm : qM (§. 45)
4 : 2 = 28. 5 : 10. 7 = 140 : 70 = 4 : 2
M : m = Qc : qC (§. 48)
7 : 5 = 28. 2 : 10. 4 = 56 : 40 = 7 : 5
S : ſ = TQm : tqM (§. 57)
12 : 16 = 3. 28. 5 : 8. 10. 7 = 420 : 560 = 12 : 16
M : m = TQſ : tqS (§. 61)
7 : 5 = 3. 28. 16 : 8. 10. 12 = 7 : 5
Q : q = MST : mſT (§. 50)
28 : 10 = 7. 12. 8 : 5. 16. 3 = 672 : 240 = 28 : 10

Eodem modo illustrantur singula Theorematum Corollaria.

Sit enim S = 12, T = 6, ſ = 8, t = 4; *erit* C = 12 : 6 = 2, & c = 8 : 4 = 2, *consequenter ob* C = c
S : ſ = T : t (§. 32)
12 : 8 = 6 : 4.

Sit S = 12 & ſ = 12. *Quoniam* S = CT & ſ = ct (§. 34); *si* C = 2 & c = 3, *erit* T = 6 & t = 4. *Habemus adeo*
C : c = t : T (§. 35)
2 : 3 = 4 : 6.

Si pro S & ſ *ponatur* Q & q, *pro* T & t *vero* M & m; *idem Exemplum illustrabit primum Theorematis VIII Corollarium* (§.42). *Iisdem observatis Exemplum præcedens in Corollarium primum Theorematis quinti quadrat.*

Sit denique Q = 12, q = 8, M = 4, m = 4; *erit* C = 12 : 4 = 3, & c = 8 : 4 = 2, (§. 22), *adeoque*
Q : q = C : c (§. 49)
12 : 8 = 3 : 2.

CAPUT II.

De Motu uniformiter accelerato & retardato.

DEFINITIO XVI.

67. *Motus acceleratus* est, qui nova capit celeritatis incrementa. *Uniformiter acceleratus* est, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

COROLLARIUM I.

68. In motu adeo uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora quibus acquiruntur.

COROLLARIUM II.

69. Quare si tempuscula elementaria fuerit dt & dT, celeritates elementares iis respondentes dc & $d\mathfrak{C}$; erit $t : T = c : \mathfrak{C}$ (§. 192 *Arithm.* & §. *præc.*) Sunt enim t & T summæ ipsorum dt & dT, c & $\mathfrak{C}$ vero summæ ipsorum dc & dC (§. 178. 67 *Arithm.*)

DEFINITIO XVII.

70. *Motus retardatus* est, cujus cele-

leritas decrescit. *Uniformiter retardatus* dicitur, si continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

AXIOMA II.

71. *Corpus semel quiescens nunquam movebitur, nisi aliunde ad motum concitetur: semel autem motum eadem velocitate & secundum eandem directionem moveri perget, nisi a causa aliqua statum suum mutare cogatur.*

SCHOLION.

72. *Hæc satis manifesta sunt ex Axiomate omnis Philosophiæ fundamentali, quod nihil sit sine ratione sufficiente (§. 25): quemadmodum idem ostendimus in* Cosmologia. *Nec experientia eidem repugnat, cum semper ratio assignari possit, tam motus retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumstantias satis perpendamus.*

COROLLARIUM I.

73. Corpus itaque, quod nonnisi impulsu semel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

COROLLARIUM II.

74. Quodsi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur necesse est, altera nempe, qua progrederetur secundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

AXIOMA III.

75. *Si nisus & renisus duorum corporum fuerint æquales; motus nullus subsequitur, sed corpora se mutuo impellentia juxta se invicem quiescunt.*

AXIOMA IV.

76. *Si corpus motum secundum eandem directionem, qua movetur, impellitur; motus acceleratur* (§. 67).

AXIOMA V.

77. *Corpus motum a vi resistente retardatur* (§. 20. 70).

OBSERVATIO I.

78. *Gravitas corporum eadem est in qualibet a superficie Telluris distantia, in qua experimentum capere licet: quam in posterum* Intervallum non nimis magnum *dicemus.*

OBSERVATIO II.

79. *Gravia descendunt motu accelerato.*

THEOREMA XV.

80. *Si corpus ex quiete motu uniformiter accelerato fertur, spatia sunt in ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Designet recta AB tempus quo motus mobilis acceleratur, & rectæ ad AB applicatæ PM, BC sint ut celeritates in fine temporis AP, AB acquisitæ. Quoniam motus uniformiter acceleratur & motus a quiete incipit, *per hypoth.* erit AP : AB = PM : BC (§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB perpendiculares *per construct.* adeoque inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Est igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*), idque rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ponamus *pm* esse alteri lineæ PM infinite propinquam: celeritates PM & *pm* non different nisi quantitate infinite parva *m*R in fine tempusculi P*p*, atque adeo tempusculo toto *Pp* eadem celeritate fertur mobile (§ 4 *Analys.*); consequenter motus isto tempusculo æquabilis est (§. 24). Enimvero in

Tab. I. Fig. 1.

 motu

Tab. I. Fig. 1. motu æquabili spatium est ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arithm.*), adeoque spatium a mobili tempusculo P*p* confectum ut rectangulum P*p* RM (§. 376 *Geom.*); consequenter cum singulis tempusculis, quibus AP constat, ipsi P*p* æqualibus istiusmodi parallelogrammula respondeant, quæ simul sumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analys. infin.*), area APM exprimit spatium à mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit spatium à mobili tempore AB confectum. Sunt igitur spatia temporibus AP & AB descripta ut triangula APM & ABC; consequenter ob eorundem similitudinem (§. 268 *Geom.*) in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc est, temporum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68); spatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus describuntur, acquisitarum (§. 80).

COROLLARIUM II.

82. In motu uniformiter accelerato tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 159 *Arithm.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM III.

83. Etiam celeritates in fine temporum sunt in ratione subduplicata spatiorum illis descriptorum (§. 159 *Arithm.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA XVI.

84. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, crescunt temporibus æqualibus secundum numeros impares:* 1, 3, 5, 7, 9, &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. spatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo percursum ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25. &c. (80). Quodsi ergo subtrahas spatium intra minutum unum percursum a spatio intra duo confecto 4; remanebit spatium minuto secundo respondens 3. Eodem modo reperitur spatium minuto tertio absolutum $9 - 4 = 5$, spatium quarto respondens $16 - 9 = 7$, quod quinto convenit $25 - 16 = 9$ &c. & ita porro (§. 83 *Analys.*). Spatium ergo minuti primi est ut 1, secundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9, &c. adeoque spatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

85. *Corpora gravia, in medio non resistente, per intervalla non nimis magna, motu uniformiter accelerato descendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia descendant motu accelerato (§. 79); Vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Est vero gravitas in intervallo non nimis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorsum impelli debent (§. 25). Itaque

si

ſi tempuſculo primo impelluntur celeritate c, etiam ſecundo celeritate c; impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quòcunque æquali. Quoniam vero medium non reſiſtit *per hypoth.* celeritatem ſemel acquiſitam conſtanter retinent (§. 71), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, conſequenter motu uniformiter accelerato deſcendunt (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

86. Sunt igitur ſpatia deſcenſus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81); & ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. creſcunt (§. 84).

COROLLARIUM II.

87. Tempora vero, itemque velocitates, ſunt in ratione ſpatiorum ſubduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION I.

88. *Dum gravia deſcendere ſupponimus in medio non reſiſtente, ab omni externo impedimento abſtrahimus, quocunque tandem nomine veniat & a quacunque cauſa ortum trahat. Unde motum quoque ſecludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Aſtronomia adſtruendum, in tranſverſum rapiuntur gravia ipſo deſcenſus tempore: quamvis in intervallo non nimis magno nulla inde in deſcenſum gravium irregularitas irrepat.*

SCHOLION II.

89. GALILÆUS GALILÆI, *qui legem deſcenſus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experientiis conſonam deprehendit* (a). *In tabula ſcilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiorem, agglutinata intus membrana, ne ſcabritie ſua pilam æneam bene politam in deſcenſu remoraretur. Eam poſtea ſupra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis ſucceſſive elevavit, & tempus, in qua pila per canalem deſcendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit ſpatia decurſa ſemper eſſe ut temporum quadrata. Notandum vero ſpatia computanda eſſe non in longitudine, ſed in altitudine plani, vi eorum, quæ inferius demonſtrabuntur.*

SCHOLION III.

90. *Eadem experimenta, modo tamen diverſo, ſæpius cum* GRIMALDO *ſuo repetiit* Joh. Baptiſta RICCIOLUS (b), *plurimos Globos cretaceos ejúſdem molis, pondere* 8 *unciarum, ex diverſarum turrium aut ædium feneſtris dimittens & tempus deſcenſus perpendiculi vibrationibus dimetiens. Perpendiculi vibrationes numeravit cum* GRIMALDO *à tranſitu Caudæ Leonis per Meridianum usque ad alterum tranſitum, ut certo conſtaret, quot vibrationes penduli reſpondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps uſus in obſervationibus Aſtronomicis, antequam Horologia oſcillatoria ab* HUGENIO *fuiſſent inventa. Experimenta ſequens repræſentat Tabella.*

Vibrationes Penduli.	Tempus		Spatium in fine temporis.	Spatium ſingulis temporibus confectum.
	″	‴	Ped. Rom.	Ped. Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

 SCHO-

(a) In *Dialogis de motu locali*, Dial. 3. p. m. 157. 158.

(b) *Almageſt. Nov.* Tom. I. lib. 2. c. 21. prop. 4. fol. 89. 90.

SCHOLION IV.

91. *Cum adeo experimenta* Riccioli *in observando maxime exercitati in tanto intervallo instituta Theoriæ apprime consentiant; vix attendenda esse videntur, quæ in contrarium affert (c)* Dechales, *qui se expertum scribit, uno minuto semisecundo grave descensu suo confecisse pedes* $4\frac{1}{4}$, *duobus* $16\frac{1}{2}$, *tribus* 36, *quatuor* 60, *quinque* 90, *sex* 123. *Sufficit, quod ipse a resistentia aëris irregularitatem deducat, quam in Demonstratione insuper habuimus.*

THEOREMA XVIII.

92. *Si grave in medio non resistente per intervallum non nimis magnum descendit; spatium ab eo decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 1. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum descensus repræsentet, in partes quotcunque æquales divisa, & ad abscissas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ sint ut celeritates cadendo in istis temporibus acquisitæ. Quoniam itaque AP:AQ=PM:QI; AP:AS=PM:SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et spatium tempore AB percursum est ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonstratione Theorematis XV (§. 80) constat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter descriptum cum sit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique istud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) Tab. I. Fig. 1. *Q. e. d.*

(c) *Statica* lib. 2. prop. 11. *Mund. Math.* Tom. II. f. 275.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipsius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquisita conficitur, æquale est spatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro descendit.

PROBLEMA I.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data descendit; spatia definire, quæ singulis istius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, spatium parte temporis 1 confectum x; erit (§. 86),

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Est adeo spatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decursum parte secunda $= 3a : t^2$, tertia descriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86).

E. gr. supra in Experimentis Riccioli (§. 90) intra 4 secunda globus cretaceus descendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo secundo confectum $= 240 : 16 = 15$, spatium confectum secundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$. Est autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA II.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non resistente per spatium datum descendit; determinare tempus, quo aliud spatium datum in eodem medio conficiet.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86), quæratur ad ſpatium per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis, (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum temporis quæſiti.
2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis RICCIOLI (§. 90) intervallo 4 minutorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur, quo tempore cenfecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{(135 . 16 : 240)} = \sqrt{(135 : 15)} = \sqrt{9} = 3$.

PROBLEMA III.

96. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit; determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui erit ſpatium quæſitum.

E. gr. Per experimenta RICCIOLI, Globus cretaceus intervallo duorum ſecundorum confecit ſpatium 60 pedum: quæritur quantum ſpatium confecturus ſit intervallo 4 ſecundorum? Reperietur ſpatium quæſitum $16 . 60 : 4 = 4 . 60 = 240$.

THEOREMA XIX.

97. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato; ſpatium dimidium ejus percurrit quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum repræſentans recta AB in partes quotcunque æquales diviſa & ad eam applicentur rectæ BC, SH, QI, PM, quæ ſint ut velocitates temporis partibus *o*, BS, BQ, BP, BA reſpondentes, ita ut, dimiſſis perpendicularibus HE, IF, MG, rectæ CE, CF, CG, CB ſint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc eſt, BS, BQ, BP, BA amiſſæ. Quoniam CE : CF = EH : FI & CG : CB = GM : BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodſi B*b* ſit tempuſculum infinite parvum, motus erit uniformis, adeoque ſpatiolum a mobili deſcriptum ut areola B*bc*C, conſequenter ſpatium tempore AB confectum ut triangulum ABC, quemadmodum ex Demonſtratione Theor. XV (§. 80) conſtat. Enimvero ſpatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter deſcriptum eſt ut rectangulum ABCD (§. 34). Ergo illud hujus dimidium (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.* Tab. I. *Fig.* 1

THEOREMA XX.

98. *Spatia motu uniformiter retardato deſcripta temporibus æqualibus ſecundum numeros impares retrogrado ordine decreſcunt.*

DEMONSTRATIO.

Percurrat mobile tempuſculo primo ſpatium 7 pedum; dico, quod ſecundo

Tab. I. Fig. 1. do confecturum ſit ſpatium 5 pedum, tertio ſpatium 3, quarto ſpatium unius, ſi motus uniformiter retardetur. Sint enim partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, ſemiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet: erunt trapezia BSHC, SQIH, QPMI, & △PAM ut ſpatia temporibus iſtis deſcripta: quod patet ex Demonſtratione Theorematis præcedentis (§. 97). Sit igitur $BC = 4$ & $BS = SQ = QP = PA = 1$; erit $SH = 3$, $QI = 2$, $PM = 1$ (§. 70), $BSHC = (4+3)\, 1 : 2 = \frac{7}{2}$, $SQIH = (3+2)\, 1 : 2 = \frac{5}{2}$, $QPMI = (2+1)\, 1 : 2 = \frac{3}{2}$ (§. 400 *Geom.*), $PAM = \frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*), conſequenter ſpatia æqualibus temporibus deſcripta ſunt ut $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 7, 5, 3, 1 (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Theorema XXI.

Tab. I. Fig. 9. 99. *Si ad altitudinem* AE *applicentur celeritates* PM, ES, *deſcenſu uniformiter accelerato per ſpatia* AP, AE *acquiſitæ; locus celeritatum* AMS *erit Parabola.*

Demonstratio.

Quoniam AP & AE ſunt ſpatia & PM atque ES celeritates deſcenſu per ea acquiſitæ; erit $AP : AE = PM^2 : ES^2$ (§. 81), hoc eſt, quadrata ſemiordinatarum ſunt ut abſciſſæ. Eſt igitur AMS Parabola. (§. 402 *Anal. fin.*) *Q. e. d.*

Corollarium.

100. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates ſunt ut tempora (§. 68); ſi ad ſpatia AP, AE applicentur tempora PM, ES, quibus deſcribuntur, curva temporis AMS erit itidem Parabola. Tab. I. Fig. 9.

Problema IV.

101. *Data celeritate mobilis in motu quomodocunque accelerato per tempus; invenire ſpatium.*

Resolutio.

Deſignet in axe curvæ AP tempus & ſemiordinata PM celeritatem eodem acquiſitam, ſitque AMS locus celeritatum. Ducatur *pm* ipſi PM infinite propinqua. Fiat $AP = t$, $PM = c$, erit $Pp = dt$ & elementum $PMmp = cdt$ (§. 98 *Analyſ. infin.*). Enimvero quoniam tempuſculo *dt* motus eſt æquabilis; erit ſpatiolum a mobili deſcriptum $= cdt$ (§. 34), conſequenter $\int cdt$ ſive area AMP deſignabit ſpatium tempore AP deſcriptum. Quare ſi detur celeritas *c* per tempus *t*, non alia re opus eſt, quam ut valore hoc in elemento *cdt* ſubſtituto formula ſummetur.

E. gr. Sit $c = t^n$: erit $cdt = t^n dt$, adeoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Sunt igitur ſpatia APM & AES temporibus AP & AE decurſa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, conſequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 178 *Arithm.*), adeoque, ob $t^n = c$, ut *ct* ad *CT*. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquiſita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata temporis; ſpatia ſunt in ratione compoſita celeritatum atque temporum.

PRO-

PROBLEMA V.

Tab. I. Fig. 9. 102. *Data celeritate mobilis motu continuo, sed quomodocunque accelerato lati per spatium; invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas $= c$, tempus $= t$, spatium r; elementum spatii dr tempusculo dt percursum est cdt (§. 101). Habemus itaque

$$cdt = dr$$
$$dt = \frac{dr}{c}$$
$$t = \int\frac{dr}{c}$$

Quare si celeritas detur per r, non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento $dr : c$ substituto formula summetur.

E. gr. Sit in Hypothesi BALIANI c ut r, erit $dr : r = dt$, adeoque $t = \int\frac{dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analys. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates sunt ut spatia, tempora sunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\int\frac{dr}{r}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ Hyperbolæ 1 divisum (§. 244 *in Analys. in fin.*); ideo

Theorema. In hypothesi BALIANI, in qua celeritates sunt ut spatia, tempus exhibetur per spatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio à quadratura Hyperbolæ pendet.

Similiter si celeritas fuerit in ratione multiplicata vel submultiplicata quacunque spatii, hoc est, c ut r^n; erit $dt = dr : r^n = r^{-n}\,dr$, consequenter $t = \frac{1}{-n+1}r^{-n+1} = \frac{1}{1-n} \times \frac{r}{r^n}$, adeoque $T : t = \frac{1}{1-n}.\frac{R}{R^n} : \frac{1}{1-n}.\frac{r}{r^n} = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c} = Rc : rC$.

Theorema. Si celeritates acquisitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLION.

103. VARIGNONIUS, *Geometra eximius,* (a) *doctrinam de motu accelerato & retardato Analysi generali absolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam Analysin faciunt, etsi in Mechanica, ubi in Hypothesibus naturæ exemplo* GALILÆI *acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut Tyrones ad solutiones Problematum Physico-Mathematicorum præparemus, utque intelligant principia in his Elementis stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta Analysi cum primis principiis Matheseos connexum exhibere lubet.*

PROBLEMA VI.

104. *Si tempora sint ut abscissæ* AP *& celeritates istis acquisitæ ut semiordinatæ* PN *curvæ* ANS *ejus naturæ, ut semiordinata* PN *sit ad semiordinatam Hyperbolæ æquilateræ* PM *in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata dimidii axis* AC *ad abscissam* CP *à centro* C *computatam: invenire spatia dato tempore descripta.* Tab. XIII. Fig. 122. a.

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1707. p. 290. & seq.

Resolutio.

Tab. XIII. *Fig.* 122. a. Ex ſuperioribus (§. 101) liquet ſpatia quæſita eſſe ut aream APN, adeoque pendere à quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR eſt Hyperbola æquilatera, cujus axis tranſverſus AB, centrum C; ſi fiat $AC = a$, $AP = t$; erit $BP = 2a + t$, adeoque, ob AP. PB $= PM^2$ (§. 507 *Analyſ.*), $PM^2 = 2at + t^2$; conſequenter $PM = \sqrt{(2at + t^2)}$. Quare cum porro ſit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$$(a+t)^n : a^n = \sqrt{(2at + t^2)} : PN,$$

erit $PN = a^n \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n = c$. Eſt nempe c celeritas tempore AP acquiſita, quam PN repræſentat *per hypoth.* Quare ſi in Elemento ſpatii $PNnp = cdt$ (§. 101) ſubſtituatur valor ipſius c; prodibit Elementum ſpeciale $a^n dt \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n$. Totum adeo negotium huc redit, ut hoc Elementum ſummabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$$a + t = x$$

erit $dt = dx$

$$t = x - a$$

$$2at = 2ax - 2a^2$$

$$t^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$2at + t^2 = x^2 - a^2$$

$$\sqrt{(2at+t^2)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$(a+t)^n = x^n$$

$$\frac{a^n dt \sqrt{(2at + t^2)}}{(a+t)^n} = \frac{a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)}}{x^n}$$

Fiat porro Tab. XIII. *Fig.* 122.

$$x^2 = \frac{a^3}{a-z}, \qquad x = \frac{a^{3:2}}{(a-z)^{1:2}}$$

$$2xdx = \frac{a^3 dz}{(a-z)^2} \qquad x^n = \frac{a^{3n:2}}{(a-z)^{n:2}}$$

$$dx = \frac{a^3 dz}{2x(a-z)^2} = \frac{a^3 dz\,(a-z)^{1:2}}{2a^{3:2}(a-z)^2}$$

$$= \frac{a^{3:2} dz}{2(a-z)^{3:2}}$$

$$a^n dx = \frac{a^{n+3:2} dz}{2(a-z)^{3:2}}$$

Jam $x^2 - a^2 = \frac{a^3}{a-z} - a^2 = \frac{a^2 z}{a-z}$

$$\sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{az^{1:2}}{(a-z)^{1:2}}$$

adeoque

$$a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} dz}{2(a-z)^2}$$

Quare tandem habetur

$$\frac{a^n dx \sqrt{(x^2 - a^2)}}{x^n} = \frac{a^{n+5:2} z^{1:2} (a-z)^{n:2}}{2a^{3n:2}(a-z)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} a^{(5-n):2} z^{1:2} (a-z)^{(n-4):2} dz$$

Elementum hoc $PNnp$ areæ APN integrabile eſt, ſi n fuerit numerus poſitivus par binario major.

E. gr. Sit $n = 4$, erit $(n-4) : 2 = 0$, adeoque $(a-z)^{(n-4):2} = (a-z)^0 = 1$ (§. 55 *Analyſ.*), conſequenter

$$PNnp = \tfrac{1}{2} a^{1:2} z^{1:2} dz,$$

adeoque $ANP = \tfrac{1}{3} a^{1:2} z^{3:2}$

$$= \tfrac{1}{3} z \sqrt{az}$$

Jam quia

$$x^2 = a^3 : (a-z)$$

$$a - z = a^3 : x^2$$

$$z = a - a^3 : x^2$$

$$az = (a^2 x^2 - a^4) : x^2$$

$$\sqrt{az} = a\sqrt{(x^2 - a^2)} : x$$

$$\tfrac{1}{3} z \sqrt{az} = \frac{a^2 (x^2 - a^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}}{3x^3}$$

Por-

Porro

$$x = t + a$$

$$x^2 = t^2 + 2at + a^2$$

$$x^2 - a^2 = t^2 + 2at$$

$$\tfrac{2}{3}z\sqrt{az} = \frac{a^2(t^2+2at)\sqrt{(t^2+2at)}}{3(a+t)^3} = \text{ANP}$$

S C H O L I O N.

105. *Apparet adeo, Exemplum hoc non alium habere usum, quam ad exercendum Calculum summatorium. Et idem quoque de sequentibus patebit.*

P R O B L E M A VII.

106. *Si celeritas tempore t acquisita fuerit ut* $t^{n-1} : (t^n + a^{2n})$; *determinare spatium r.*

R E S O L U T I O.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101), erit $dr = t^{n-1}\,dt : (t^{2n} + a^{2n})$. Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

erit

$$t = a^{(n-1):n}x^{1:n}$$

$$dt = \frac{1}{n}a^{(n-1):n}x^{1:n-1}dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n : t$

$$t^{n-1} = a^{n-1}x : a^{(n-1):n}x^{1:n}$$

$$= a^{(nn-2n+1):n}x^{(n-1):n}$$

$$t^{n-1}dt = \frac{1}{n}a^{n-1}dx$$

$$\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}+a^{2n}} = \frac{\frac{1}{n}a^{n-1}dx}{a^{2n-2}x^2+a^{2n}}$$

$$= \tfrac{1}{n}a^{1-n}\frac{dx}{x^2+a^2}$$

Quare spatium $r = \frac{1}{n}a^{1-n}\int\frac{dx}{x^2+a^2}$.

Si tangens arcus circuli fuerit x, radius a, erit $\int\frac{a^2dx}{x^2+a^2}$ arcus (§. 158 *Analys. in fin.*), ut adeo quadratura curvæ, quæ spatium r exhibet, pendeat à rectificatione arcus circuli.

VARIGNONIUS formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad sinum versum: id quod fit hoc modo. Sit

$$x = a\sqrt{(2a : y - 1)}$$

$$= a(2ay^{-1} - 1)^{1:2}$$

erit $dx = -a^2y^{-2}dy : \sqrt{(2ay^{-1}-1)}$. Elementum hoc in præsente casu sumendum est positivum, quia crescente x decrescit y, consequenter ipsius y differentiale $-dy$.

Porro $x^2 = 2a^3 : y - a^2$

$$x^2 + a^2 = 2a^3 : y$$

Quamobrem

$$\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a^2ydy}{2a^3y^2\sqrt{(2ay^{-1}-1)}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

$$\frac{1\cdot a^{1-n}dx}{n\cdot(x^2+a^2)} = \frac{1}{2na^{n+1}}\cdot\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

P R O B L E M A VIII.

107. *Data celeritate c tempore t acquisita, quæ sit ut* $t^{n-1} : (t^{2n} - a^{2n})$; *invenire spatium r.*

R E S O L U T I O.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

erit $dr = t^{n-1}dt : (t^{2n} - a^{2n})$.

Ponatur ut ante (§. 106)

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

reperietur

$$\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}-a^{2n}} = \frac{1}{na^{n-1}}\cdot\frac{dx}{x^2-a^2}$$

 pror-

prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = a\sqrt{(2ay^{-1}+1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{dy}{2a\sqrt{(2ay+y^2)}}$ ut ante, adeoque tandem

$$dr = \frac{1}{2na^{n+1}} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$$

Ponatur denique

$$v - a = y$$

erit $v^2 - 2av + a^2 = y^2$

$$2av - 2a^2 = 2ay$$

$$v^2 - a^2 = y^2 + 2ay$$

$$\sqrt{(v^2 - a^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ay)}$$

$$dv = dy$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(v^2 - a^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2+2ay)}}$$

Tab. XIII. *Fig.* 123. a. Quoniam $a^2dv : 2\sqrt{(v^2 - a^2)}$ est sector hyperbolicus CAM, abscissis à centro computatis (§. 189 *Analys. infin.*), erit dimidius axis Hyperbolæ æquilateræ $= a$, & CP $= v$; consequenter $a^2dy : \sqrt{(y^2 + 2ay)}$ exprimit eundem sectorem CAM, abscissa AP existente y. Patet itaque determinationem spatii in casu præsente pendere à quadratura Hyperbolæ.

SCHOLION I.

108. *Apparet ex his Problematis, quam utile sit formulas omnes elementorum Arcuum, segmentorum & sectorum pro sectionibus conicis aliisque curvis descriptu facilioribus atque cognitarum proprietatum reperire, sibique familiares reddere, ut formulæ non summabiles ad eas tanquam simpliciores reduci possint, quemadmodum & paulo ante vidimus* (§. 106) *posse constructiones curvarum ad alias descriptu faciliores reduci, per quas construantur: cujus rei exempla quoque dedimus in Algebra* (§. 245 & *seqq. Analys. infinit.*)

SCHOLION II.

109. *Potest etiam sectoris* CAM *Elementum independenter à formula* $a^2dv : \sqrt{(v^2 - a^2)}$ *inveniri hoc modo. Sit* AC = CB = a, AP $= y$, *erit* PB $= 2a + y$, *consequenter ob* PM² = AP. PB (§.507 Analys. finit.) $= 2ay + y^2$; PM $= \sqrt{(2ay + y^2)}$, *qua in* $\frac{1}{2}$ CP $= \frac{1}{2}(a+y)$ *ducta prodit area trianguli* CMP $= \frac{1}{2}(a+y)\sqrt{(2ay+y^2)}$. Tab. XIII. *Fig.* 123.

Ergo $CmM + mMPp = \frac{1}{2}dy\sqrt{(2ay+y^2)} + \frac{ady+ydy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} \cdot \frac{a+y}{2} = \frac{2aydy+y^2dy+\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$

Jam $mMPp = dy\sqrt{(2ay+y^2)} = \frac{2aydy+y^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$. *Ergo* CmM *elementum sectoris* $CMA = \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay+y^2)}}$.

DEFINITIO XVIII.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempusculo quocunque infinite parvo successive nascitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita resolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempusculi particulis natas. Particulæ istiusmodi elementares quantitatis motus, tempusculo infinite parvo genitæ, dicuntur *Sollicitatio ad motum.*

COROLLARIUM.

111. Quod si ergo istæ particulæ ponantur æquales, quatenus spectantur ut effectus ab eadem causa tempusculis æqualibus producti; si sollicitatio ad motum dicatur g, erit nisus elementaris seu quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$.

PROBLEMA IX.

112. *Data accelerationis lege; determinare sollicitationem ad motum.*

RESO-

RESOLUTIO.

Si ſollicitatio ſit g, erit quantitas motus tempuſculo dt genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempuſculo iſto $= dc$, maſſa mobilis $= m$. Quoniam tempuſculo infinite parvo dt motus æquabilis ſupponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, adeoque $g = mdc : dt$.

Quare ſi ex data accelerationis lege determinetur dt per dc, vel contra; prodibit valor ipſius g.

E. gr. In Hypotheſi *Galilæana* gravium, ſeu in motu æquabiliter accelerato, celeritas c eſt ut tempus t, adeoque dt ut dc. Quare g ut $mdc : dc$, hoc eſt, ut m. Quare patet

Theorema. In Hypotheſi *Galilæana* gravium ſeu in motu æquabiliter accelerato ſollicitatio ad motum eſt ut maſſa, adeoque conſtans.

Si fuerit c ut t^n

erit $dc = nt^{n-1}dt$

$$g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnt^{n-1}dt}{dt}$$

$$= nmt^{n-1}$$

$$= nmt^n : t$$

$$= nmc : t$$

Theorema. Si celeritas creſcit in ratione temporis multiplicata, erit ſolicitatio ad motum ut factum ex maſſa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe & ut tempus reciproce: hoc eſt, ſi duo fuerint mobilia, ſollicitationes ad motum erunt in ratione compoſita ex directa maſſarum & celeritatum in exponentes dignitatis temporum ductarum, & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMC}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$, ſeu ut $NMCt$ ad $nmcT$.

PROBLEMA X.

113. *Data ſollicitatione ad motum; invenire mobilis motu continuo accelerato lati tum velocitatem in locis ſingulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.*

RESOLUTIO.

Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, PN &c. ſint ut ſollicitationes ad motum in A, P &c. PM ſit ut celeritas à mobili in P acquiſita. Ducatur pn ipſi PN infinite propinqua & dicatur $PN = g$, $AP = r$, $PM = c$, maſſa mobilis $= m$; erit $Pp = dr$. Sit porro tempuſculum, quo mobile per Pp deſcendit, $= dt$: quia motus in ſpatiolo Pp æquabilis ſupponitur, erit Tab. XIII. *Fig.* 122. b.

$c = dr : dt$ (§. 38) & $g = mdc : dt$ (§. 112).

$$cdt = dr \qquad gdt = mdc$$

$$dt = dr : c \qquad dt = mdc : g$$

$$\frac{dr}{c} = \frac{mdc}{g}$$

$$gdr = mcdc$$

$$\int gdr = \tfrac{1}{2}mc^2$$

Eſt vero $\int gdr$ area APNC & $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}PM^2$. Quare ſi mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 *Arithm.*).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque ſolicitatione urgetur, velocitas ejus in fine ſpatii dati AP acquiſita eſt ut recta, quæ poteſt aream ſolicitationum APNC, ſeu eſt in ratione ſubduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo

 $c =$

Tab. XIII. *Fig.* 122. a.

$$c = dr : dt \qquad \int gdr = \tfrac{1}{2} mc^2$$

$$\frac{2\int gdr}{m} = c^2$$

$$\frac{\sqrt{2\int gdr}}{\sqrt{m}} = c$$

$$dr : dt = \sqrt{2\int gdr} : \sqrt{m}$$

$$dr = dt \sqrt{2\int gdr} : \sqrt{m}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{2\int gdr} : \sqrt{m}} = dt$$

$$\int \frac{1 dr}{\sqrt{2\int gdr} : \sqrt{m}} = t$$

Quodſi ergo fiat $PL = \frac{1}{\sqrt{2\int gdr} : \sqrt{m}}$, ſeu, mobili exiſtente eodem, $= 1 : \sqrt{2\int gdr}$, area DAPLE deſignabit tempus.

Ponamus jam $AQ = R$, $QS = G$, erit $C = \sqrt{2\int GdR}$, mobili exiſtente eodem, ut maſſa poni poſſit 1, aut ejus nulla habenda ſit ratio. Erit adeo

$$C : c = \sqrt{2\int GdR} : \sqrt{2\int gdr}.$$

$$\text{Sed } PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2\int GdR}} : \frac{1}{\sqrt{2\int gdr}}$$

$$= \sqrt{2\int gdr} : \sqrt{2\int GdR}$$

Ergo $PL : QO = c : C$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque ſollicitatione movetur motu continuo accelerato, erunt tempora QO & PL ; quibus ſpatia data AQ & AP conficit, celeritatibus in fine illorum ſpatiorum acquiſitis reciproce proportionalia, nempe ut PM ad QT.

SCHOLION I.

114. *Conſentit Analyſis cum iis, quæ* NEWTONUS (a) *demonſtravit, niſi quod is* Vim centripetam *vocet, quod nos* Sollicitationem *appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem ſumunt tanquam effectum vis motricis eidem proportionalem, atque adeo quantitatem motus tanquam menſuram vis illius. Quare cum* NEWTONUS *vim illam conſideret ut urgentem mobile verſus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in caſu deſcenſus gravium gravitatem vocant, quia gravitas conſideratur ut cauſa acceleratrix motus gravium & celeritas momentis ſingulis deſcendenti ſuperaccedens tanquam effectus illius cauſæ.*

(a) In *Princip. Phil. Natural. Mathemat.* Lib. I. Prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

Tab. XIII. Fig. 122.

SCHOLION II.

115. *Ex Theorematis per Problema præſens erutis omnia deducere licet, quæ de motu gravium in Hypotheſi* Galilæana *ſive in alia quacunque demonſtrantur. Etenim in Hypotheſi* Galilæana *eſt c ut t, adeoque dc ut dt. Jam gdr = cdc* (§. 113). *Ergo gdr = cdt, conſequenter gdr : dt = c, adeoque, ob dr : dt = c, erit gc = c. Cum adeo ſit g = 1, gravitas in Hypotheſi* Galilæana *conſtans, hoc eſt, elementa ſingula, ex quibus quantitas motus tempuſculo infinite parvo conſtat, ſunt inter ſe æqualia. Jam quia g = 1, erit, in eadem Hypotheſi,* $\int gdr = \int dr = \frac{1}{2}c^2$, *hoc eſt, r ut* c^2, (§. 181 *Arithm.*) *quemadmodum ſupra* (§. 86). *Similiter cum in Hypotheſi* BALIANI *ſit c ut r ; erit gdr = rdr* (§. 113), *adeoque g = r. Jam initio deſcenſus r = 0 : ergo g = 0, hoc eſt ſollicitatio ad motum initio nulla eſt, ſeu phraſi communi Mathematicorum gravitas nulla eſt : quod cum ſit abſurdum, Hypotheſis* Baliana *impoſſibilis.*

COROLLARIUM I.

116. Quoniam $\sqrt{2\int gdr}$ = APNC continuo creſcit, ſemiordinata $PL = 1 : \sqrt{2\int gdr}$ continuo decreſcit. Jam cum ſit in A, $dr = 0$; erit $AD = 1 : 0 = \infty$. Eſt igitur AD aſymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLION III.

117. *Hinc patet ratio, cur curva temporis* ELF *ita fuerit delineata, ut cum axe* AB *non concurrat, ſicuti curva celeritatum* AMT, *neque rectam* AD *ad axem* AB *normalem ſecet, ſicuti curva ſollicitationum* CNG.

COROL-

COROLLARIUM II.

118. Cum sit $gdr = cdc$ (113), adeoque $g = cdc : dr =$ PM. mR : Pp; Sollicitatio ad motum, in quacunque accelerationis Hypothesi, erit ut subnormalis curvæ celeritatum (*§. 35 Analyſ. infin.*)

PROBLEMA XI.

Tab. XIII. Fig. 123. b. 119. *Si ſollicitatio centralis ſit diſtantiæ à centro* AD, PD *&c. proportionalis; invenire velocitatem in quovis puncto* P *& tempus deſcenſus per* AP.

RESOLUTIO.

Quoniam AD : PD = AC : PN *per hypoth.* ſcala ſollicitationum centralium DC eſt linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit AD $= a$, AP ſpatium deſcenſus $= r$, PN ſollicitatio in P $= g$, erit PD $= a - r$. Eſt vero PN ut PD, *per hypoth.*, adeoque g ut $a - r$. Quare cum ſit (*§.* 113),

$$\int gdr = \tfrac{1}{2} c^2$$

erit

$$\int adr - \int rdr = \tfrac{1}{2} c^2$$

$$ar - \tfrac{1}{2} r^2 = \tfrac{1}{2} c^2$$

$$2ar - r^2 = c^2$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD $= a$, AP $= r$: ſi ex centro D radio AD deſcribatur Quadrans AIH, erit ſemiordinata PI $= \sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Analyſ. finit.*) Habemus itaque ſequens

Theorema. Si ſollicitatio centralis ſit proportionalis diſtantiæ locorum à centro, velocitates in fine ſpatii acquiſitæ ſunt ſinibus arcuum reſpondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem deſcripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ *per demonſtrata*

Ergo $dr = dt \sqrt{(2ar - r^2)}$

$$dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Tab. XIII. Fig. 123. b.

Quoniam $a \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ eſt arcus AI (§. 157 *Analyſ. infin.*); erit tempus deſcenſus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque ſequens

Theorema. In Hypotheſi Problematis, tempora deſcenſus per ſpatia AP ſunt ut arcus AI circuli ex centro D deſcripti.

Quodſi ſpecies curvæ celeritatum AMG deſideretur, fiat AC $= b$. Cum ſit AD : AC = DP : PN, *per hyp.*

$$a : b = a - r : \text{PN}$$

erit PN $= g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\tfrac{1}{2} c^2 = \int gdr$ (§. 113)

Ergo $\tfrac{1}{2} c^2 = \int bdr - \int brdr : a$

$$= br - br^2 : 2a$$

Patet itaque (§. 421 *Anal. finit.*) ſequens

Theorema. In Hypotheſi Problematis, locum celeritatum AMG eſſe Ellipſin, cujus parameter 2AC eſt dupla ſollicitatio initialis, axis 2AD dupla diſtantia mobilis initio deſcenſus a centro.

Si $a = r$, erit GD$^2 = 2ab - 2a^2 b : 2a = 2ab - ab = ab$, adeoque GD $= \sqrt{ab}$. Cum itaque GD ſit Axis dimidius conjugatus (§. 423 *Anal. finit.*); erit in D centrum Ellipſeos, & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per ſpatia AP & AD deſcendit, ſi ſollicitationes fuerint diſtantiis à centro proportionales, per idem ſpatium corpus quodvis eodem tempore deſcendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLION.

121. *Omnia hæc conſona ſunt iis, quæ* NEWTONUS (*a*) *demonſtravit.*

CAPUT

(*a*) In *Princip. Natural. Mathem.* lib. 1. prop. 38. p. 119.

CAPUT III.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO XIX.

122. *Centrum gravitatis* est, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, si neutra alteram movet.

COROLLARIUM I.

123. Quodsi ergo descensus Centri gravitatis impeditur, grave quiescit.

COROLLARIUM II.

124. Quare si corpus ex Centro gravitatis suspenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM III.

125. Totam corporis gravitatem in Centrum gravitatis coactam supponere licet, adeoque pro corpore gravi solum Centrum gravitatis surrogari potest in demonstrationibus.

DEFINITIO XX.

126. *Diameter gravitatis* est recta transiens per Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Intersectio itaque duarum Diametrorum determinat Centrum gravitatis.

DEFINITIO XXI.

128. *Planum gravitatis* est figura plana, in qua situm est Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo intersectio duorum Planorum gravitatis aut plurium est Diameter gravitatis.

DEFINITIO XXII.

130. *Gravia homogenea* sunt, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO XXIII.

131. *Gravia heterogenea* sunt, quorum gravitates non sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ inter se non erunt pondere æquales. Aut si duorum gravium partes sumas volumine æquales, & eædem sint pondere inæquales; gravia inter se heterogenea sunt, licet in se homogenea esse possint.

DEFINITIO XXIV.

132. *Centrum magnitudinis* est punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA XXII.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete, in medio non resistente, eodem tempore per idem spatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Descendat grave A per spatium r: erit tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Descendat etiam grave B per idem vel æquale spatium r: erit etiam tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Si ergo spatium descensus ex quiete idem est, tempus etiam descensus idem est. *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

134. *Idem observatione confirmatur. Nam in spatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in* Aërometria *docemus) levissima plumula eodem tempore ex data altitudine descendit, quo globus plumbeus. Imo si corpora magna & ponderosa in aëre per aequalia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines sint mediocres, monente* HUGENIO *(a). Pendulorum in primis experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus* RICCIOLUS *globos argillaceos 20 unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole istis aequales, sed pondere subduplos per intervallum 280 pedum demittens contrarium probare conatur (b), ideo non consentiunt, quia resistentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitae sunt ut tempus (§. 85); velocitates gravium descendentium ex quiete dato tempore aequales sunt.

THEOREMA XXIII.

136. *Materia, quae cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendentium dato tempore aequales sunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiae, quae cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nisus versus centrum Terrae (§. 4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, adeoque illud quod quantitati motus accedit, consequenter sollicitatio ad motum (§. 110). Sed sollicitatio est etiam massae proportionalis (§. 112). Ergo materia, quae cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. *Q. e. d.*

(a) In *Horologio oscillatorio.* Part. 4. Prop. 5.
(b) *Almag. Nov.* Tom. I. Lib. 2. c. 21. Prop. 1. f. 89.

SCHOLION.

137. *Liquet jam veritas Definitionis quintae (§. 6).*

COROLLARIUM I.

138. Massa igitur corporum recte aestimatur per pondus.

COROLLARIUM II.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 41) & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus aequales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 42).

COROLLARIUM III.

140. Massa invariata, pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA V.

141. *In homogeneis, quae secundum longitudinem in partes similes & aequales secari possunt, Centrum gravitatis idem est cum Centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

142. Quodsi ergo linea recta AB bifariam secetur in C; erit C Centrum gravitatis. Tab. I. *Fig.* 2.

SCHOLION.

143. *Tale corpus homogeneum, quod secundum longitudinem in partes similes secari potest, est e. gr. Cylindrus plumbeus. Si enim longitudo* AE *concipiatur in tres partes aequales* ED, DC & CA *vel quotcunque* Tab. I. *Fig.* 3.

plures divisa; secabitur in Cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint (§. 535 Geom.); *atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium* (§. 570 Geom.).

THEOREMA XXIV.

Tab. I. Fig. 4. 144. *Si Centra gravitatis duorum corporum* A & B *jungantur recta* AB; *Centri gravitatis communis* C *distantiæ* BC & AC *a Centris gravitatis particularibus* B & A *sunt reciproce ut pondera* A & B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & AC : CB = 1 : 3. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec BD = AC & AE = CB; erit EC = CD (§. 88 *Arithm.*). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales divisa, quot nempe librarum sunt pondera junctim sumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomodocunque varietur figura (§. 140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffusa concipiatur, Centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipsius B per FD, & gravitas ipsius A per EF uniformiter (§. 142); consequenter pondera A & B junctim sumta rectam ED repræsentabunt. Hujus vero Centrum gravitatis commune est in C (§. *cit.*). Ergo idem est Centrum gravitatis commune ponderum A & B. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

145. Quodsi gravitates corporum A & B fuerint æquales, Centrum gravitatis commune C erit in medio rectæ AB Centra gravitatis conjungentis. Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM II.

146. Quia A : B = BC : AC; erit A. AC = B. BC. Unde patet vires æquiponderantium æstimandas esse per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis. Factum hoc *Momentum* ponderum vulgo vocant.

SCHOLION.

147. *Theorema hoc utilissimum Experimento non ineleganti illustrari potest. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter se æqualia, & quorum latitudo sit dupla profunditatis, longitudo vero sextupla latitudinis: quamvis necesse non sit, ut hæ rationes accurate observentur, sufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimensiones. Parentur præterea alia quædam; unum sit longitudinis duplæ, alterum triplæ, tertium quadruplæ & ita porro. Quodsi parallelepipedum longitudinis duplæ colloces super latere prismatis trigoni, ita ut latus prismatis ipsum dividat in partes æquales* AC & CB; *partes* AC & CB *æquiponderabunt*: *quo ipso* Axioma (§. 141) *confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum triplæ longitudinis* DE *ea lege super prismate, ut ejus latus ipsum dividat in partes* DF, FE, *quæ sunt in ratione subdupla: pars* FE *præponderabit. Quodsi vero tria parallelepipeda simplicis longitudinis ipsi* DF *superimposueris; quatuor parallelepipeda duobus* FK, KE *in unum* FE *conjunctis æquiponderabunt. Est enim ipsius* FE *Centrum gravitatis in* K, *& ipsius* DF *in medio* L, *per experimentum primum. Distantiæ igitur Centrorum gravitatis a fulcro* LF & FK *sunt ut* DF & FE, *seu ut pondera* (§. 130 Mech. & 573 Geom.). *Est ergo ibi Centrum gravitatis commune, ut habet Theorema nostrum* (§. 144). *Eodem modo deprehenduntur 9 prismata sibi mutuo superimposita æquiponderare uni* IH, *cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.* Tab. I. Fig. 5.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 4. 148. Quoniam A : B = BC : AC (§. 144); erit etiam A + B : A = BC + AC : BC (§. 190 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

149. Reperitur adeo Centrum gravitatis commune duorum ponderum C, si factum ex pondere uno A in distantiam Centrorum gravitatis separatorum AB (= AC + CB) dividatur per summam ponderum A & B (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. A = 12, B = 4, AB = 24; erit BC = 24. 12 : 16 = 18.

COROLLARIUM V.

150. Quodsi pondus A detur & distantia Centrorum gravitatis particularium AB, una cum Centro gravitatis communi C, reperitur pondus B = A. AC : BC (§. 302 *Arithm.*), hoc est, si momentum ponderis dati dividatur per distantiam ponderis quæsiti B a Centro gravitatis communi (§. 146). Sit ex. gr. A = 12, BC = 18, AC = 6; erit B = 6. 12 : 18 = 12 : 3 = 4.

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig. 6. 151. *Ponderum plurium datorum* a, b, c, d, *Centrum gravitatis commune in recta* AB *determinare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur Centrum gravitatis commune duorum ponderum a & b (§. 149): quod sit in F.
2. In F concipiatur applicari pondus $a+b$ duobus reliquis a & b æquale (§. 125), & quæratur porro in recta FE Centrum gravitatis commune ponderum $a+b$ & c (§. 149): quod sit in G.
3. Denique in G concipiatur applicari pondus $a+b+c$ duobus $a+b$ & c æquale (§. 125), & quæratur inter ipsum & pondus d Centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod sit in H. Tab. I. Fig. 6.

Est adeo H Centrum gravitatis commune ponderum a, b, c & d. Patet etiam, quomodo sit progrediendum, si plura pondera dentur.

Sit e. gr. $a = 20$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 5$, AC = 9, CE = 6, EB = 12: erit AF = b. AC : $(a+b)$ = 10. 9 : 30 = 3, adeoque FC = 6 & FE = FC + CE = 12. Hinc reperitur FG = c. FE : $(a+b+c)$ = 15. 12:45 = 4. Quare GE = FE − FG = 8, & GB = GE + EB = 20. Invenitur adeo GH = d. GB : $(a+b+c+d)$ = 5. 20 : 50 = 2. Unde HB = GB − GH = 18, & (ob AB = AC + CE + EB = 27) AH = 9.

PROBLEMA XIII.

152. *Duobus ponderibus* D *&* E *extra Centrum gravitatis commune in* C *suspensis; determinare quodnam eorum & quantum præponderet.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in distantiam suam a centro suspensionis, nempe D in AC & E in BC: ex qua parte factum majus prodit, versus eam est præponderatio.
2. Factum minus a majore subtrahatur: erit residuum præpondium.

E. gr. Sit D = 30 librarum, E = 20, AC = 2, BC = 4: erit D. AC = 60, E. BC = 80, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit AC : CB = d : md, & pondus D = mp; æquiponderabit eidem in B pondus p (§. 150). Sed pondus E majus est quam p. Dicatur ergo excessus

Tab. I. Fig. 7. sus r; ita ut sit $E = p + r$. Quoniam momentum ipsius r æquale est momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur mrd (§. 146); excessus momenti ponderis E supra momentum alterius D est mrd. Sed mrd est differentia inter mpd & $mpd + mrd$, hoc est, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo excessus momenti ipsius E supra momentum alterius D, si factum D. AC ex E. CB subtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

153. Ponderum D & E itaque extra Centrum gravitatis in C suspensorum momenta sunt in ratione composita ipsorummet ponderum D & E & distantiarum a puncto suspensionis AC & CB.

COROLLARIUM II.

154. Ponderis itaque ex ipso puncto C suspensi momentum respectu reliquorum D & E nullum est, seu eadem ratione D & E inter se ponderant, ac si pondus in C plane abesset, quia scilicet distantia ejus nulla est.

PROBLEMA XIV.

Tab. I. Fig. 8. 155. *Determinare præponderationem; ponderibus pluribus* a, b, c, d *extra Centrum gravitatis in* C *suspensis.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera c & d in suas distantias a puncto suspensionis CE & CB: summa dabit momentum ponderum c & d junctim, seu ponderationem versus dextram (§. 153).
2. Ducantur quoque pondera a & b in suas distantias AC & CD: summa denuo dabit ponderationem versus sinistram (§. *cit.*).
3. Quodsi ergo ponderationem majorem a minore subtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæsita. Tab. I. Fig. 8.

E. gr. Sit AC = 6, DC = 4, CE = 5, CB = 8, $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$, $d = 8$: erit ponderatio versus dextram = c. EC + d.CB = 20. 5 + 8. 8 = 164; versus sinistram = a. AC + b. DC = 12. 6 + 15. 4 = 132. Præponderant ergo c & d versus dextram, momento ut 32.

PROBLEMA XV.

156. *Ponderibus quotcunque extra Centrum gravitatis in* C *suspensis & versus dexteram præponderantibus; determinare punctum* F, *ex quo si summa omnium ponderum suspendatur, eadem maneat præponderatio versus dextram, quæ fuerat ante in dato ponderum* a, b, c, d *situ.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera c & d, vel quotcunque fuerint, versus dextram præponderant (§. 155).
2. Cum momentum summæ ponderum in F suspendendæ eidem æquale esse debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in summam ponderum (§. 153). Quare si per summam ponderum dividatur; quotus erit distantia CF, ex qua suspendenda est ponderum summa, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in Problemate præcedente; erit momentum quo pondera versus dexteram præponderant 32. Quodsi hoc dividas per summam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ est distantia CF quæsita.

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. I. *Fig.* 9. 157. Si Elementa figurarum, quale $mMNn$, concipiantur instar ponderum ad axem AE appensorum & in vertice A punctum suspensionis; determinabitur punctum in AE, ex quo summa omnium ponderum suspensa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc est Centrum gravitatis (§. 125), summa momentorum omnium pondusculorum per summam pondusculorum divisa (§. 156). Sit enim $AP = x$, $MP = y$, $Pp = dx$; erit unum pondusculum $2ydx$, summa omnium $2\int ydx$, momentum unius ponduscului $2yxdx$ (§. 153), summa omnium $2\int yxdx$, consequenter distantia Centri gravitatis a vertice $AF = \int yxdx : \int ydx$. Quodsi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in *Analysi Infinitorum* docuimus, Centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA XVI.

Tab. I. *Fig.* 10. 158. *Determinare Centrum gravitatis in Triangulo* BAC.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD basin BC bifariam secans in D. Quoniam $\triangle$ BAD $= \triangle$DAC (§. 440 *Geom.*): utrumque in totidem pondiscula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata resolvi potest; adeoque Centrum gravitatis $\triangle$BAC erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat $AD = a$, $BC = b$, $AP = x$, $MN = y$; erit (§. 397 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$

$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur $AE = c$ perpendicularis ad BC, erit $AD : AE = AP : AQ$ (§. 396 *Geom.*), adeoque $AQ = cx : a$ & $Qq = cdx : a$. Unde momentum $yxdx = cbx^2dx : a^2$, & $\int yxdx = cbx^3 : 3a^2$, quae summa, per aream trianguli $AMN = cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Geom.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis a vertice $= 2acbx^3 : 3acbx^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodsi pro x substituatur a; prodibit distantia Centri gravitatis totius Trianguli a vertice, $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$ AD. Tab. I. *Fig.* 10.

PROBLEMA XVII.

159. *Determinare Centrum gravitatis in Parabola.* Tab. I. *Fig.* 9.

RESOLUTIO.

Ad Parabolam est

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx \text{ (§. 103 } \textit{Anal. infin.})$$

$$xydx = a^{1:2}x^{3:2}dx$$

$$\int xydx = \tfrac{2}{5}a^{1:2}x^{5:2}$$

sed $\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$ (§. *cit.*)

Ergo $\int xydx : \int ydx = \frac{3}{5}x = AF$ (§. 157).

PROBLEMA XVIII.

160. *Determinare Centrum gravitatis in omnibus Parabolis superiorum generum & curvis agnatis in infinitum.*

RESOLUTIO.

In infinitis Parabolis & curvis agnatis est (§. 105 *Analys. infinit.*).

$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$

$$xydx = a^{n:r}x^{(m+r):r}dx$$

$$\int xydx = \frac{r}{m+2r}a^{n:r}x^{(m+2r):r}$$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{(m+r):r} \text{ (§. } \textit{cit.})$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{m+r}{m+2r}x = AF \text{ (§. 157)}.$$

E. gr. In Paraboloide cubicali, $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analys. finit.*). Ergo $AF = \frac{4}{7}AP$.

In Paraboloide surdesolidali, $m = 1$, $r = 5$. Ergo $AF = \frac{6}{11}AP$.

Tab. I. Fig. 9. In Paraboloide biquadratico, $m = 1$, $r = 4$. Ergo $AF = \frac{5}{9} AP$.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$, $AF = \frac{5}{8} AP$.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, $AF = \frac{7}{11} AP$.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, $AF = \frac{9}{14} AP$.

COROLLARIUM.

161. Distantia ergo FP Centri gravitatis a basi est $= x - \frac{m+r}{m+2r} x = \frac{mx + 2rx - mx - rx}{m + 2r}$

$= \frac{r}{m+2r} x$.

E. gr. In Parabola *Apolloniana*, $m = 1$, $r = 2$. Ergo $PF = \frac{2}{5} AP$.

In Paraboloide cubicali, $m = 1$, $r = 3$. Ergo $PF = \frac{3}{7} AP$.

In curva ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo $PF = \frac{3}{8} AP$.

PROBLEMA XIX.

162. *Determinare Centrum gravitatis in Parabola exteriore* AST.

RESOLUTIO.

Si $AQ = x$, $QM = y$, Parameter $= 1$; erit (§. 388 *Analys. finit.*) $x^2 = y$ & hinc

$$ydx = x^2 dx$$
$$xydx = x^3 dx$$
$$\int xydx = \tfrac{1}{4} x^4$$
$$\int ydx = \tfrac{1}{3} x^3$$
$$\int xydx : \int ydx = \tfrac{3}{4} x = \tfrac{3}{4} AQ = AL.$$

PROBLEMA XX.

163. *Determinare Centrum gravitatis in infinitis Parabolis exterioribus superiorum generum, & aliis curvis agnatis.*

RESOLUTIO.

Si Parameter $= 1$, pro infinitis Parabolis superioribus & curvis agnatis est $x^r = y^n$ (§. 519 *Analys. finit.*).

Quare

Tab. I. Fig. 9.

$$ydx = x^{r:n} dx$$
$$xydx = x^{(r+n):n} dx$$
$$\int xydx = \frac{n x^{(r+2n):n}}{r+2n}$$
$$\int ydx = \frac{n}{r+n} x^{(r+n):n}$$
$$\int xydx : \int ydx = \frac{r+n}{r+2n} x = AL.$$

E. g. in Paraboloide cubicali, $r = 3$, $n = 1$. Ergo $AL = \frac{4}{5} AQ$.

In Paraboloide biquadratico, $r = 4$, $n = 1$. Ergo $AL = \frac{5}{6} AQ$.

In Paraboloide surdesolidali, $r = 5$, $n = 1$. Ergo $AL = \frac{6}{7} AQ$.

In curva ad quam $x^3 = y^2$, $r = 3$, $n = 2$. Ergo $AL = \frac{5}{7} AQ$.

In curva ad quam $x^4 = y^3$, $r = 4$, $n = 3$. Ergo $AL = \frac{7}{10} AQ$.

PROBLEMA XXI.

164. *Determinare Centrum gravitatis in curva ad quam* $b^2 y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$ (§. 99 *Analys. infinit.*)

$$xydx = (bx^3 dx - x^4 dx) : b^2$$
$$\int xydx = x^4 : 4b - x^5 : 5b^2 = (5bx^4 - 4x^5) : 20b^2$$
$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2 = (4bx^3 - 3x^4) : 12b^2$$
$$\int xydx : \int ydx = \frac{12b^2 (5bx^4 - 4x^5)}{20b^2 (4bx^3 - 3x^4)}$$
$$= \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

Est adeo $20b - 15x : 15b - 12x = x : AF$.

PROBLEMA XXII.

165. *Determinare Centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.*

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. I. *Fig.* 11. Sit Mp ad AB normalis ipsi DP infinite propinqua; erit arculus DM infinite parvus. Sit chordæ DE arcus dati DHE diameter AB parallela, quæ instar axis consideretur, ad quem pondufcula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut MD. PD. (§. 153). Quoniam itaque ad radium HC, qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) bisecat, pondufcula & numero & momento æqualia utrinque disponuntur; transit is per Centrum gravitatis (§. 122). Sit jam PC = DG = x, DC = a, erit DR = Pp = dx. Jam cum sit angulus CDM rectus (§. 308 *Geom.*), & PDE itidem rectus (§. 230 *Geom.*), adeoque PDC = RDM (§. 91 *Arithm.*), sintque etiam anguli DRM & DPC recti *per construct.* erit MD.: DR = DC; PD, (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur MD.PD = DR.DC = adx (§. 297 *Arithm.*). Summa ergo momentorum arcus DH est ax = DC. DG, quæ, divisa per arcum DH, Centri gravitatis F distantiam a Centro circuli C determinat (§. 157.). Est itaque arcus DH : DG = DC : CK.

Quodsi pro DH ponatur quadrans AH, & pro DG radius AC; prodibit distantia Centri gravitatis semiperipheriæ AC^2 : AH, hoc est, distantia hæc CF est tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

PROBLEMA XXIII.

166. *Determinare Centrum gravitatis in sectore circuli* ACB.

RESOLUTIO.

Ex antecedentibus liquet, si DC sectorem bifariam secet, Centrum gravitatis fore in recta DC. Tab. II. *Fig.* 12. Ducatur radio PC arcus PNM, & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam segmentum annulare est pondusculum ex centro C suspensum, & quidem simul differentiale sectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp seu Nn momentum segmenti annularis PNMmnp, hoc est, differentiale momenti sectoris. Jam momentum arcus ADB = 2AC. AE, & momentum arcus PNM = 2PC. Pn (§. 165), & △ACB = EC. AE, atque △PCM = Pn. Cn (§. 392 *Geom.* Est igitur △ ACB : △ PCM = EC. AE : Cn. Pn, & momenta arcuum ADB & PNM = AC. AE : PC. Pn (§. 181 *Arithm.*). Est vero AC : PC = EC : Cn (§. 268 *Geom.*). Ergo △ ACB : △ PCM = AC. AE : PC. Pn. (§. 184 *Arithm.*); consequenter momentum arcus ADB est ad momentum arcus PNM ut △ ACB ad △ PCM (§. 167 *Arithm.*), hoc est, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus AD = p, AC = a, AE = b; erit momentum arcus ADB = $2ab$ (§. 165). Sit porro PC = x; reperietur, per modo demonstrata, momentum arcus PNM = $2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero segmenti annularis PMmp = $2bx^2dx : a$. Hujus summa $2bx^3 : 3a$ est momentum sectoris CPM. Quare si fiat $x = a$, erit momentum sectoris CAB = $2a^3b : 3a = \frac{2}{3}a^2b$, quo per summam ponderum seu aream sectoris ACB = ap diviso,

Tab.II. Fig.12. viſo, prodibit diſtantia Centri gravitatis ſectoris ACB $= 2ab : 3p = 2$AC. AE: 3AD. Eſt vero AC. AE:AD diſtantia Centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Diſtantia igitur Centri gravitatis ſectoris a centro circuli eſt ad diſtantiam Centri gravitatis arcus ut 2 ad 3.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig.11. 167. Diſtantia ergo Centri gravitatis ſemicirculi à centro circuli C eſt $\frac{2}{3}$ AC^2 : AH(§. 166). Quare ut $\frac{2}{3}$AH, ſeu arcus 60°, ad AC ita AC ad diſtantiam Centri gravitatis ſemicirculi à centro circuli (§. 185 *Arithm.*)

PROBLEMA XXIV.

Tab. I. Fig.11. 168. *Invenire Centrum gravitatis ſegmenti* DHED.

RESOLUTIO.

1. Quæratur Centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158): quod ſit in L.
2. Quæratur Centrum gravitatis ſectoris DCEHD (§. 166); quod ſit in F.
3. Cum F ſit commune Centrum gravitatis trianguli DCE & ſegmenti DEHD; quæratur, ad ſegmentum DEHD, triangulum DCE & LF, quarta proportionalis FK: erit FK diſtantia Centri gravitatis ſegmenti K à Centro gravitatis ſectoris F (§. 144). Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præſtare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA XXV.

169. *Invenire Centrum gravitatis Lunulæ* HIPPOCRATIS ADBEA.

RESOLUTIO.

1. Quæratur Centrum gravitatis ſemicirculi ADB (§. 167): quod ſit in G. Tab.II. Fig.13.
2. Quæratur porro Centrum gravitatis ſegmenti AEBFA (§. 168): quod ſit in H.
3. Cum adeo G ſit Centrum gravitatis commune Lunulæ HIPPOCRATIS ADBEA & ſegmenti AEBA; quæratur, ad Lunulam, ſegmentum & HG, quarta proportionalis GI: erit GI diſtantia Centri gravitatis Lunulæ I a Centro gravitatis ſemicirculi G (§. 144).

Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, niſi numeris utamur.

PROBLEMA XXVI.

170. *Invenire Centrum gravitatis in Parabola truncata* SMNH. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

1. Quæratur Centrum gravitatis Parabolæ MAN (§. 159): quod ſit in F.
2. Quæratur item Centrum gravitatis Parabolæ SAH (§. *cit.*), quod ſit in O.
3. Quoniam Centrum gravitatis commune Parabolæ MAN & Parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratur porro, ad Parabolam truncatam SMNH, Parabolam MAN & diſtantiam FO, quarta proportionalis OK: erit in K Centrum gravitatis Parabolæ truncatæ (§. 144).

SCHOLION.

171. *Patet eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illuſtravimus, ſemper inveniri Centrum gravitatis differentiæ duarum figurarum, quarum Centra gravitatis dantur.*

RESO-

PROBLEMA XXVII.

Tab. II. Fig. 14. 172. *Invenire Centrum gravitatis in Parallelogrammo & Parallelepipedo.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per Centrum magnitudinis (§. 132) adeoque & gravitatis transit (§. 141); consequenter in I est Centrum gravitatis parallelogrammi (§. 127). Eodem modo patet in K esse Centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum CBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*) utrumque per centrum gravitatis ejus transit (141); adeoque communis intersectio IK est diameter gravitatis (§. 129).
2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum transiens per L & basibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 535 *Geom.*); per Centrum gravitatis transit (§. 141) adeoque in L gravitatis Centrum est.

SCHOLION.

173. *Attendentibus statim manifestum est, non absimili modo Centrum gravitatis in Prismatibus & Cylindris reperiri, esseque illud punctum medium rectæ Centra gravitatis basium oppositarum conjungentis. In Polygonis autem regularibus Centrum gravitatis idem esse cum centro circuli circumscribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum vero Centrum gravitatis segmentorum & sectorum, imo lunularum circuli per superiora inveniri potest; ita per Problema præsens constat, quomodo variorum segmentorum cylindricorum Centrum gravitatis inveniri possit; quorum nempe bases sunt circuli segmenta, sectores, annuli, lunulæ.*

PROBLEMA XXVIII.

174. *Invenire Centrum gravitatis Coni & Pyramidis.* Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

Centrum gravitatis Coni esse in axe AC satis claret ex superioribus. Si $AP = x$; $Pp = dx$ & ponduſculum in Cono est $prx^2dx : 2a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc summa momentorum $prx^4 : 8a^2$, quæ, per summam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis portionis AMN a vertice $A = 6a^2prx^4 : 8a^2prx^3 = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AP$; adeoque Coni integri Centrum gravitatis distat a vertice $\frac{3}{4}AC$.

Eodem prorsus modo invenitur distantia Centri gravitatis a vertice in Pyramide $= \frac{3}{4}AC$.

PROBLEMA XXIX.

175. *Invenire Centrum gravitatis Conoidis parabolici* ABCD *ex rotatione Parabolæ* AMBC *circa axem* AC *geniti.* Tab. II. Fig. 16.

RESOLUTIO.

Ponduſculum Conoidis $MNnm = pxdx : 2r$ (§. 202 *Anal. infin.*) adeoque momentum $= px^2dx : 2r$ (§. 153); consequenter summa momentorum $= px^3 : 6r$, quæ, per summam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis

Tab.II. Fig.16. portionis conoidicæ AMPN a vertice $A = 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3}x$. Eſt adeo diſtantia Centri gravitatis a vertice in Conoide parabolico $ABD = \frac{2}{3}AC$.

PROBLEMA XXX.

176. *Invenire Centrum gravitatis Conoidis paraboloidici ex rotatione Paraboloidis cujuſcunque* AMBC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum Conoidis paraboloidici indefinitum eſt $px^{2:m}dx : 2r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{(2+m):m}dx : 2r$ (§. 153). Hinc ſumma momentorum $mpx^{(2m+2):m} : (4m+4)r$, quæ, per ſummam ponderum $mpx^{(2+m):m} : (2m+4)r$ (202 *Anal. infinit.*) diviſa, dat diſtantiam Centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice $A = (2m+4)\,mrpx^{(2+2m):m} : (4m+4)\,mrpx^{(2+m):m} = \frac{m+2}{2m+2}x$

$= \frac{m+2}{2m+2}$ AP; conſequenter in integro

Conoide $\frac{m+2}{2m+2}$ AC.

Sit e. gr. $m = 2$; erit $AH = \frac{2}{3}AC$.
Sit $m = 3$; erit $AH = \frac{5}{8}AC$.
Sit $m = 4$; erit $AH = \frac{3}{5}AC$.
Sit $m = 5$; erit $AH = \frac{7}{12}AC$.

PROBLEMA XXXI.

177. *Invenire Centrum gravitatis ſegmenti Sphæræ.*

RESOLUTIO.

In ſegmento ſphærico ponduſculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde ſumma momentorum $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ, per ſummam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Analyſ. infin.*) diviſa, definit diſtantiam Centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Eſt adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc eſt, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Arithm.*) ita x ad diſtantiam Centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quodſi pro x ſubſtituatur r, ſeu ſemidiameter Sphæræ, prodibit diſtantia Centri gravitatis a vertice in hemiſpherio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo ſi pro x ſubſtituatur $2r$, Sphæræ integræ Centrum gravitatis reperitur diſtare a vertice ſemidiametro, r, hoc eſt, idem cum centro Sphæræ.

PROBLEMA XXXII.

179. *Invenire Centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico ponduſculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Anal. infin.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum ſumma $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *Analyſ. infinit. cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ diviſa, diſtantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4pbx^3) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Eſt adeo ut

6a

$6a + 4x$ *ad* $4a + 3x$, ita x ad diſtantiam Centri gravitatis a vertice. Conſtat vero eſſe a axem tranſverſum Hyperbolæ genitricis, x altitudinem Conoidis, ſeu illius abſciſſam (459 *Anal. fin.*).

PROBLEMA XXXIII.

180. *Invenire Centrum gravitatis ſegmenti Sphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In Sphæroide elliptico ponduſculum $pbxdx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2 dx : 2r - pbx^3 dx : 2ar$ (§. 153.) Quare momentorum ſumma $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per ſummam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ diviſa, diſtantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Eſt adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc eſt, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$, ita x ad diſtantiam Centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem Ellipſis genetricis, ſeu ipſum axem majorem ſphæroidis; x autem altitudinem ſegmenti, ſeu portionem axis inter verticem & baſin interceptam.

COROLLARIUM I.

181. Quodſi pro x ponatur a, prodit pro Centro gravitatis totius Sphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Eſt nempe in medio axe.

COROLLARIUM II.

182. Sphæræ igitur & Sphæroidis elliptici communem axem habentium Centrum gravitatis idem eſt (§. 178).

COROLLARIUM III.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit diſtantia Centri gravitatis in dimidio Sphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in Hemiſphærio (§. 178). Nam ſi, ut ibi, fiat $a = 2r$, erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA XXXIV.

184. *Invenire Centrum gravitatis in Cono truncato* BMND *& in Pyramide truncata.* Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur Centrum gravitatis Coni AMN (§. 174): quod ſit in F.
2. Inveniatur quoque Centrum gravitatis Coni majoris BAD (§. *cit.*): quod ſit in G.
3. Quæratur, ad Conum truncatum BMND, Conum minorem MAN, & FG, quarta proportionalis GH, erit in H Centrum gravitatis Coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem Coni truncati BMND ad minorem MAN lineis eſſe exprimendam, niſi numeris utamur.

SCHOLION.

185. *Eadem methodo Centrum gravitatis reperies in Conoidibus truncatis, itemque in Sphæra & Sphæroidibus truncatis. Enimvero, quamvis multa adhuc ea de re addi poſſent, filum tamen abrumpi conſultum ducimus; cum ex hactenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant uſum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum Centrum gravitatis aut punctum ipſi in ſuperficie corporis cujuſcunque reſpondens Mechanice explorandi, quantum ad praxin ſufficit.*

PROBLEMA XXXV.

186. *Determinare Centrum gravitatis Mechanice in corpore quocunque.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.17. 1. Super fune extenso, aut latere prismatis trigoni FG, corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, transit per Centrum gravitatis (§. 124).

2. Super eodem corpus, mutato situ, æquilibretur: erit MN denuo latus plani per Centrum gravitatis transeuntis (§. *cit.*)

Intersectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in superficie corporis quæsitum, quod nempe est in diametro gravitatis (§. 126).

Aliter.

Tab.II. Fig.18. 1. Corpus datum O ita collocetur super tabula horizontali, ut, si vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, sit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. *cit.*)

Communis adeo intersectio rectarum AB & CD in superficie corporis punctum C Centro gravitatis imminens determinat (§. 129).

Aliter.

Laminæ Centrum gravitatis invenies, si cuspidi alicujus styli eam imposueris, & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo sustentatur, Centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

187. Corporis adeo humani in directum extensi Centrum gravitatis, vi modi primi, observante BORELLO (a), inter nates & pubim existit. Quare totius Corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura concessit locum.

SCHOLION.

188. *Quoniam subinde etiam in applicatione methodi superioris distantia Centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in solidis, ut illic per intersectionem duorum, hic trium normalium prodeat Centrum gravitatis; ideo unum saltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus suspendendis utile etiam est nosse perimetrorum Centra gravitatis; ideo nec inconsultum videtur uno alteroque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illustrata (§. 157 & seqq.) huc applicetur.*

PROBLEMA XXXVI.

189. *Invenire Centrum gravitatis in spatio parabolico mixtilineo* APM.

RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua. Quæratur primo distantia Centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum Elementum PM*mp*, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 *Anal. infinit.*) consideretur instar pondusculi ad axem librationis AB in P suspensi, erit momentum ejus $=$ PM*mp*. $\frac{1}{2}$PM (§. 153), Centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§. 172). Sit jam AP $= x$, PM $= y$, erit P*p* $= dx$, adeoque P*pm*M $= ydx$, consequen- Tab. XIII. Fig. 124.

(a) *De motu animalium* part. I. Prop. 134. p. m. 167.

Tab. XIII. Fig. 124. quenter momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2dx$. Jam in parabola $y^2 = x$, parametro existente 1 (§. 388 *Anal. finit.*) atque hinc $2ydy = dx$. Quare momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2 dx = y^3 dy$, eorumque summa $= \frac{1}{4}y^4$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $= \int ydx$, $= \int 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3$. Ergo QL $= \int \frac{1}{2}y^2 dx : \int ydx$ (§. 157) $= 3y^4 : 8y^3 = \frac{3}{8}y$. Quare si fiat AD $= \frac{3}{8}$ PM & ex puncto D ducatur DL ipsi AB parallela; erit in ea Centrum gravitatis spatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex Centro gravitatis O parallelogrammuli PM*mp* ad AR normalis OK, & consideretur instar pondusculi ad axem librationis AR suspensi, erit PM*mp*. OK momentum ejus $= xydx$. Est vero in parabola $y = x^{1:2}$ (§. 392 *Analys. fin.*). Ergo momentum pondusculi $= x^{3:2} dx$, consequenter eorum summa $= \int xydx$ $= \frac{2}{5}x^{5:2}$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2}$ (§. 103 *Analys. infinit.*). Ergo DL $= \int xydx : \int ydx$ (§. 157) $= 3x^{5:2} : 5x^{3:2}$ $= \frac{3}{5}x$. Quare si fiat AQ $= \frac{3}{5}$AP, & in Q erigatur normalis QL ipsi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L Centrum gravitatis spatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

PROBLEMA XXXVII.

190. *Invenire Centrum gravitatis perimetri Trianguli.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 125. Sit Triangulum ABC æquilaterum, vel isoscele.

1. Bisecentur rectæ in D, E & F: erunt puncta ista Centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§. 142).
2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam divisa, erit G Centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§. 145). Tab. XIII. Fig. 125.
3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC instar ponderum consideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens; fiatque, ducta recta GF, ut AB + AC + BC : BC = GF : GH: erit in H Centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 148).

PROBLEMA XXXVIII.

191. *Invenire Centrum gravitatis perimetri figuræ irregularis cujuscunque*, v. gr. *Pentagonæ.* Tab. XIII. Fig. 127.

RESOLUTIO.

1. Bisecentur singula latera AE, ED, DC, CB, BA, in G, F, K, I, H, erunt in istis divisionum punctis eorum Centra gravitatis particularia (§. 142).
2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque AB+AE:AE=GH:HL; erit in L Centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 148).
3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque AB+AE+ED:ED=LF:LM; erit in M Centrum gravitatis commune laterum AB, AE & ED (§. *cit.*)
4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque AB + AE + ED + BC : BC = MI : MN; erit in N Centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (§. *cit.*)
5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque AB + BC + CD

 + DE

Tab. XIII. Fig. 127. +DE+EA : DC = NK : NO; erit in O Centrum gravitatis commune totius perimetri (§. *cit.*).

SCHOLION.

192. *Me non monente apparet, hac ratione determinari posse Centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomodocunque in eodem plano sitorum.*

THEOREMA XXV.

193. *Omnis figura sive superficialis, sive solida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis, seu lineam quam Centrum gravitatis describit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in Centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale facto ex pondere moto in viam Centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ instar gravium homogeneorum considerentur; pondera ipsarum sunt ut volumina (§. 130); adeoque pondus motum est magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. XIII. Fig. 124. Idem etiam Analytice ostenditur de solido rotatione genito hoc modo. Sit $AP = x$, $PM = y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $= r : p$; erit solidum rotatione genitum $= \int py^2dx : 2r$ (§. 197 *Anal. infin.*). Sit jam in L Centrum gravitatis, & $pS = QL$, distantia ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio pS descripti via rotationis Centri gravitatis. Quare cum sit $pS = \frac{1}{2}\int y^2dx : \int ydx$ (§. 189); erit via rotationis Centri gravitatis $= p\int y^2dx : 2r\int ydx$. Quare si in hanc viam ducatur planum generans $\int ydx$; erit solidum rotatione genitum $= p\int y^2dx : 2r$, ut ante.

COROLLARIUM I.

194. Hinc cum parallelogrammum ABDC describatur, si recta AB juxta ductum alterius AC motu sibi semper parallelo descendat (§. 102. & 233 *Geom.*) & ex Coroll. II. Theor. XXVI. (215.) independenter ab his constet, viam Centri gravitatis E æqualem esse rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc est, altitudini parallelogrammi (§. 227 *Geom.*); area ejusdem æquatur facto ex basi CD seu linea describente in altitudinem EF. Tab. II. Fig. 19.

SCHOLION I.

195. *Hæc consona sunt iis, quæ de parallelogrammorum areis investigandis demonstrata sunt in Geometria* (§. 370. 375. 387. Geom.)

COROLLARIUM II.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC descendente describuntur, soliditatem haberi, si planum describens per altitudinem multiplicetur.

SCHOLION II.

197. *Hæc denuo consentiunt cum iis, quæ de prismatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonstrata sunt* (§. 539 & 541 Geom.).

COROLLARIUM III.

198. Cum circulus describatur, si radius CL circa centrum C rotetur (§. 131 *Geom.*); Centrum vero gravitatis radii CL sit in medio F (§. 142); via Centri gravitatis est peripheria Tab. II. Fig. 20.

Tab.II. Fig.20. pheria circuli X. radio fubduplo defcripta; confequenter area circuli æquatur facto ex radio CL in peripheriam radio fubduplo CF defcriptam.

SCHOLION III.

199. *Hæc iis confentanea effe, quæ in Geometria de circulo demonftrata funt* (*§.* 410 Geom.), *ftatim patet confideranti, quod peripheria radio fubduplo defcripta fit peripheriæ integro defcriptæ dimidia* (*§.* 412 Geom.).

COROLLARIUM IV.

Tab.II. Fig.21. 200. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipfum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri fuperficiem defcribit (§. 465 *Geom.*). Eft vero Centrum gravitatis rectæ BC in medio F (*§.* 142) & Centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via adeo hujus eft peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF defcripta. Quare fuperficies cylindri eft factum ex altitudine BC in peripheriam circuli radio EF defcriptam five bafin, ut in Geometria demonftravimus (*§.* 516 *Geom.*): foliditas vero cylindri eft factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui eft ipfius EF feu femidiametri cylindri fubduplus, defcriptam.

SCHOLION IV.

201. *Sit altitudo plani defcribentis, adeoque cylindri,* BC = a, *femidiameter bafis* DC = r, *erit* EG = $\frac{1}{2}$r, *&, pofita ratione femidiametri ad peripheriam* = 1 : m, *peripheria radio* $\frac{1}{2}$r *defcripta* = $\frac{1}{2}$mr. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}$mr *in aream rectanguli* AC = ar; *erit foliditas cylindri* = $\frac{1}{2}$amr². *Eft vero* $\frac{1}{2}$mar² = $\frac{1}{2}$r. mr. a & $\frac{1}{2}$r. mr *area circuli radio* DC *defcripti. Conftat ergo cylindrum reperiri æqualem facto ex bafi in altitudinem, ut in Geometria* (*§.* 541) *demonftratum.*

COROLLARIUM V.

202. Similiter cum Centrum gravitatis rectæ AB fit in medio M (*§.* 142) & fuperficies Coni defcribatur, fi triangulum ABC circa axem AC rotetur (*§.*467 *Geom.*), fitque præterea PM = $\frac{1}{2}$BC (§. 268 *Geom.*), fuperficies Coni æqualis eft facto ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, feu femidiametri bafeos BC fubduplo defcriptam. Tab.II. Fig.15.

SCHOLION V.

203. *Sit* BC = r, AB = a, *ratio radii ad peripheriam* 1 : m; *erit* PM = $\frac{1}{2}$r *& peripheria hoc radio defcripta* = $\frac{1}{2}$mr. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}$mr *in latus Coni* AB, *prodit fuperficies* $\frac{1}{2}$amr. *Sed* $\frac{1}{2}$amr *eft etiam factum ex* $\frac{1}{2}$a *&* mr. *Ergo fuperficies Coni producitur ex peripheria bafeos in latus dimidium, ut in Geometria* (§. 519) *demonftratum.*

COROLLARIUM VI.

204. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, Conum defcribit (§.467 *Geom.*). Sed fi CB divifa bifariam in D ducatur recta AD, fiatque AO = $\frac{2}{3}$AD; erit in O Centrum gravitatis (*§.* 158). Æquatur ergo Coni foliditas facto ex triangulo CAB in peripheriam radio PO defcriptam (*§.* 193). Eft vero AD : AO = DB : OP (§.268 *Geom.*). Sed AO = $\frac{2}{3}$AD & DB = $\frac{1}{2}$CB *per demonftr.* Ergo OP = $\frac{2}{3}$ DB = $\frac{1}{3}$CB. Tab.II. Fig.22.

SCHOLION VI.

205. *Sit* CB = r, AB = a, *ratio radii ad peripheriam* = 1 : m; *erit* OP = $\frac{1}{3}$r, *peripheria hoc radio defcripta* $\frac{1}{3}$ mr, △ ACB = $\frac{1}{2}$ar, *adeoque foliditas Coni* $\frac{1}{3}$ mr. $\frac{1}{2}$ar = $\frac{1}{6}$amr². *Eft vero etiam* $\frac{1}{6}$amr² = $\frac{1}{2}$r. m[illegible] $\frac{1}{3}$a, *feu factum ex bafi Coni in tertiam altitudinis partem, ut in* Geometria *aliunde demonftratum* (§. 548 Geom.).

SCHOLION VII.

206. *Elegans hoc Theorema, quod inter præcipua feculi fuperioris in Geometria inventa referri folet, jam olim* PAPPUS *comme-*

memoravit (a); sed Paulus Guldinus, *è Soc. Jesu, expressius plurimorum exemplorum inductione ostendit (b). Usi sunt eodem Geometræ, præsertim ante inventum a* Leibnitio *calculum summatorium, cum* Guldino, *quemadmodum indicaverat* Pappus, *in dimetiendis solidis & superficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: sed idem usum habere adhuc potest in quibusdam casibus, ubi Calculi summatorii ope idem difficilius præstaretur. Ego in Tyronum gratiam exemplis tritis regulam illustrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, simulque ostendi, eidem locum esse, si magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri posse a* Guldino *etiam annotatum reperio (c): unde nec cum* Pappo *ad solum rotationis motum Theorema restrinxi. Illustris* Leibnitius *(d) invenit, succedere quoque negotium, si axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.*

CAPUT IV.

De Quiete & Lapsu Corporum gravium.

Definitio XXV.

207. Linea *horizontalis vera* est, cujus singula puncta a centro Telluris æqualiter distant.

Corollarium.

208. Linea horizontalis est arcus circuli ex centro Telluris per punctum datum descripti (*§.* 37. 41 *Geom.*).

Definitio XXVI.

Tab.II. Fig.20. 209. *Linea horizontalis apparens* BD est recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

Corollarium.

210. Est adeo ad semidiametrum Telluris in puncto contactus A perpendicularis (*§.* 308 *Geom.*).

Definitio XXVII.

211. *Lapsus* est mutatio situs vi gravitatis.

Theorema XXVI.

212. *Si corpora gravia versus centrum Terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem est perpendicularis, & contra.*

Demonstratio.

I. Si corpora gravia versus centrum Terræ nituntur, linea directionis eorundem semidiametro Telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 *Mech.* & §. 38 *Anal. infin.*), quam apparentem perpendicularis (§. 209). *Quod erat unum.* Tab. Fig.

II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis; semidiametro Telluris in directum jacet (§. 210). Continuata igitur in centrum Telluris incidit (§. 470 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

Corollarium.

213. Cum Terra sit propemodum sphærica, ut in *Geographia* demonstratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terrestrium æquabilium

(a) Sub finem Præfat. ad Lib. 7. *Collect. Mathem.*
(b) Lib. 2. & 3. *de Centro Gravitatis.*
(c) Lib. 2. c. 8. Prop. 3. f. 147.
(d) In *Actis Erud.* An. 1695. p. 493.

Tab.II. Fig.20. bilium superficies in omnibus suis punctis a centro Telluris æqualiter absunt (§. 470 *Geom.*). Quare cum experientia constet, gravia per lineas perpendiculares ad superficiem aquarum descendere; gravia niti versus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLION.

214. *Quodsi Terræ figura non sit perfecte sphærica, ex descensu perpendiculari gravium concludi nequit, quod versus centrum illius nitantur: cum in solo circulo, cujus rotatione sphæra generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant* (§. 38 Analys. infinit.). *Sed suo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique assumi posse citra erroris assignabilis periculum, gravia niti versus centrum Terræ. Immo in Staticis sufficit, descensum perpendicularem ad libellam aquarum experientia constare.*

COROLLARIUM II.

215. Quoniam pro corpore gravi, salva gravitate, solum gravitatis centrum substitui potest (§. 125); linea directionis corporis gravis est recta ex Centro gravitatis ad lineam horizontalem sive apparentem, sive veram perpendicularis.

PROBLEMA XXXIX.

216. *Data semidiametro Telluris* AC *vel* LC *una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis* AD, *determinare distantiam puncti extremi* D *à linea horizontali vera* AL.

RESOLUTIO.

1. Quadrato semidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta CD (§. 417 *Geom.*).
3. Inde subtrahatur semidiameter CL: quod relinquitur, est distantia lineæ horizontalis apparentis a vera DL. Tab.II.

E. gr. Ponamus semidiametrum Telluris, *Fig.*20. qualis vulgo statuitur, 860 milliarium Germanicorum, & AD unius milliaris: erit

$$AC^2 = 739600$$
$$AD^2 = 1$$
$$DC^2 = 739601$$
Unde $DC = 860.00057$
$$CL = 860$$
$$LD = 0.00057 \text{ seu } \tfrac{57}{100000}$$

Aliter.

Quoniam $GD : AD = AD : DL$ (§. 334 *Geom.*); erit $DL = AD^2 : GD$ (§. 302 *Arithm.*). Est vero DL ipsius GL, seu diametri Telluris, particula admodum exigua, quippe in distantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, seu $\frac{57}{172000000}$ diametri Telluris. Quamobrem $AD^2 : GL$ sensibiliter non differt a $AD^2 : GD$. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Parisinorum seu 129600 linearum (pes enim Parisinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta PICARDUM (a) 39231564 pedum Parisinorum seu linearum 5649345216. Quodsi ergo $AD^2 = 16796160000$ per $GL = 5649345216$ dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

SCHOLION.

217. *Hac posteriore methodo* PICARDUS (*b*) *Tabulam construxit, quam huc transferre in usum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis* AD *in pedibus Parisinis; altera puncti extremi* D *altitudinem* DL *supra lineam horizontalem veram* AL.

(*a*) *Traité du Nivellement*, p. 196.
(*b*) Loc. cit. c. 1. p. 7.

AD	DL	AD	DL
300 ped.	0 dig. $0\frac{1}{3}$ lin.	3300 ped.	3 dig. 6 lin.
600	$1\frac{1}{3}$	3600	4. 0
900	3	3900	4. 8
1200	$5\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	$8\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. $9\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

COROLLARIUM.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem sensibilem pro vera assumi, consequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi potest.

PROBLEMA XL.

219. *Explorare, utrum planum aliquod propositum sit horizontale, nec ne.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.23. 1. Ex trabeculis ligneis construatur triangulum æquicrurum FCG, continuatis cruribus in AB, quo longius, eo melius.

2. Ex vertice C suspendatur globus plumbeus D & basis trianguli FG dividatur bifariam in E.

3. Libella sic constructa collocetur super plano dato, ita ut cruribus suis AC & CB eidem insistat.

Dico, si filum CD transeat per punctum medium E, planum esse horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate sua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 17). Quodsi ergo FG bifariam secet in E; erit CD ad FG perpendicularis (§. 184 *Geom.*). Tab.II. Fig.23. Quoniam vero AC = CB *per construct.* adeoque AC : CB = CF : CG; erit $x = o$ (§. 207 *Geom.*), consequenter AB ipsi FG parallela (§. 255 *Geom.*) & CD etiam ad AB (§. 230 *Geom.*), hoc est, linea directionis globi ad planum, cui libella insistit, perpendicularis. Planum adeo horizontale est (§. 212).

SCHOLION.

220. *Figura Instrumenti variis modis mutari solet, eodem tamen semper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes Staticas plerumque sufficit; ita inferius Artem libellandi exposituri alia libellarum genera hac accuratiora describemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus amplissimos continuatur.*

DEFINITIO XXVIII.

221. Per *Basin corporis gravis* intelligo figuram, in cujus perimetro circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipsæ incumbunt. Tab.II. Fig.24.

E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur basis ejus.

THEOREMA XXVII.

222. *Si linea directionis corporis gravis intra basin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; corpus in situ suo acquiescit: sin illa extra basin cadit, vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; in eam labitur partem versus quam cadit Centrum gravitatis.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab.II. Fig.25. I. Incumbat corpus GB plano cuidam alteri firmo ac ſtabili AFEB, ſitque linea directionis CD. Cum hæc ex Centro gravitatis C educatur (§. 215); Centrum gravitatis deſcendere nititur per rectam CD (§. 19). Sed juxta eandem ipſi renititur corpus, cui incumbit, idque ſatis firmum ac ſtabile, ut cedere neſciat, *per hypoth.* Deſcenſus adeo Centri gravitatis impeditur (§. 75), adeoque corpus quieſcit (§. 123). *Quod erat unum.*

Tab.II. Fig.24. II. Incumbant extrema alicujus corporis duobus fulcris FE & CD, & linea directionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex Centro gravitatis I ducitur (§. 215); Centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur (§. 17). Sed corpus proprio pondere eo uſque incurvari nequit, ut a fulcris recedant ejus extrema, *per hypotheſ.* Ergo Centrum gravitatis impeditur, quo minus deſcendat; conſequenter corpus in hoc ſitu acquieſcit (§. 123). *Quod erat ſecundum.*

Tab.II. Fig.26. III. Cadat linea directionis CM corporis IL extra baſin. Cum Centrum gravitatis ſit I (§. 215); id ſecundum rectam CM deſcendere nititur (§. 17). Quare cum nihil ſecundum eandem directionem ipſi reſiſtat; actu deſcendet, adeoque corpus labitur in eam partem verſus quam cadit Centrum gravitatis (§. 211). *Quod erat tertium.*

Tab.II. Fig.24. IV. Denique corpus grave duobus fulcris EF & DC ita incumbat, ut linea directionis IL intra baſin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex Centro gravitatis I ducitur; Centrum gravitatis per rectam IL deſcendere nititur. Quare cum corpus proprio pondere eo uſque incurvari poſſit, ut a fulcris recedat, *per hypoth.* Centrum gravitatis actu deſcendit, adeoque corpus labitur in eam partem, verſus quam linea directionis cadit (§. 211). *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur, ut linea directionis extra baſin emoveatur, conſequenter, quo longius ea diſtat a perimetro baſis; eo firmius corpus in loco ſuo conſiſtit.

PROBLEMA XLI.

224. *Invenire, utrum corpus grave in dato ſitu extra lapſus periculum conſtituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur Centrum gravitatis corporis gravis (§. 186).
2. Ex eo dimittatur perpendicularis in lineam horizontalem apparentem, juxta Problema XL (§. 219), ſi opus ſit determinandam: quæ erit linea directionis (§. 215).

Quodſi perpendiculum intra baſin corporis cadit, extra lapſus periculum conſtituitur: ſin minus, certo ruet in eam partem, verſus quam perpendiculum cadit (§. 222).

SCHOLION I.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres inclinatæ* Bononienſis *&* Piſana *non corruant; etſi illa anno* 1110 *excitata ad altitudi-*

tudinem pedum 130 *assurgat & perpendiculum a basi intervallo* 9 *pedum recedat; hæc vero anno* 1173 *exstructa altitudinem habeat cubitorum* 78 *& intervallum inter basin atque perpendiculum cubitorum* $7\frac{1}{3}$ *admittat: id quod expressius ostendit* PAULUS CASATUS (*a*).

SCHOLION II.

226. *Idem Problema motibus animalium explicandis inservit: qualia inprimis dedit* JOHANNES ALPHONSUS BORELLUS (*b*). E. gr. *Cum Centrum gravitatis in homine inter nates & pubim existat; linea directionis intra spatium calcaneis interjectum adeoque intra basin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento insistit: quare in hoc situ firmiter consistit. Enimvero si pes alteruter elevetur, basis definietur spatio, quod pes unus occupat* (§. 221). *Cadit adeo linea directionis extra basin, nempe versus dexteram, si pes dexter elevetur, consequenter homo super solo pede sinistro stare non poterit* (§. 222), *nisi corpus in latere sinistro incurvet, quo linea directionis in pedem sinistrum retrahatur. Enimvero talia fusius prosequi non est nostri instituti: apprime autem observanda sunt in Picturis & Sculpturis.*

SCHOLION III.

227. *Immo hinc ratio reddi potest multorum in structura corporis animalis occurrentium.* E. gr. *Cum homo erectus stare ac incedere debeat, necessarium utique fuit, ut planum per medium transiens corpus divideret ipsum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales sunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent; quæ sui similes non habent, ut frons, nasus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram, ut in partes æquales & similes, adeoque in æquiponderantes, dividi possint.*

(*a*) *Mechanic.* Lib. I. c. 9. p. 50. & seqq.

(*b*) *De motu Animalium* c. 18. usque ad 23. p. 165. & seqq. conf. CASATUM *Mechan.* Lib. I. c. 11. p. 562. & seqq.

DEFINITIO XXIX.

228. *Centrum motus* est punctum, circa quod grave, aut plura gravia commune Centrum gravitatis habentia rotari possunt. Tab. I. Fig. 2?

E. gr. Si pondera P & Q rotari possint circa punctum N, ita ut descendente P ipsum Q ascendat; dicetur N centrum motus.

THEOREMA XXVIII.

229. *Distantia* IN *Centri gravitatis ponderis particularis a Centro gravitatis communi aut centro motus* N, *est ad lineam directionis* Ip *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis *Ip* corporis *p* transeat per Centrum gravitatis ipsius (§. 215) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto Centrum gravitatis corporis existat (§. 78); distantia Centri gravitatis corporis *p* a Centro motus, vel Centro gravitatis communi N, eadem est quæ distantia ipsius N a linea directionis. Sed distantia ipsius N a linea directionis *Ip* est perpendicularis NI (§. 225 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI est distantia Centri gravitatis corporis *p* a puncto N. *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

230. *Dato Centro gravitatis* C, *una cum pondere corporis* AB; *determinare vires in* A & B *requisitas, ut in situ horizontali sustentetur.* Tab. III. Fig. ?

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 28. 1. Quæratur, ad summam distantiarum virium in A & B applicatarum a Centro gravitatis corporis sustentati C, pondus ejusdem G & distantiam vis in B applicatæ BC, numerus quartus proportionalis: Dico, hunc esse vim in A applicandam.

2. Quare si is subtrahatur a pondere G, relinquetur vis in B applicanda. Sit ex. gr. G = 300 librarum, AC = 5′, CB = 8′: erit AC + CB = AB = 13′, adeoque vis in A applicanda = G.CB:AB = 300.8:13 = $184\frac{8}{13}$, consequenter vis in B = $115\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB sustentatur a viribus A & B *per hypoth.* necesse est ut eadem vi renitantur; quantum illud deorsum nititur (§. 75). Nititur autem corpus AB deorsum tota vi gravitatis, hoc est, quanta est ponderis G eidem æqualis & ex Centro gravitatis C suspensi (§. 125). Ergo vires A & B junctim sumtæ ponderi huic æquantur; consequenter eorum Centrum gravitatis commune in C (vi §. *cit.*). Sed cum linea AB sit horizontalis, *per hypoth.* adeoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (§. 215) vires autem in A & B secundum eandem directionem renitantur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares, & hinc a Centro gravitatis communi C distant intervallis AC & CB (§. 229). Est adeo AC + CB : CB = G : A (§. 148). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Corpus adeo AB gravitat in fulcra a quibus sustentatur, in ratione reciproca distantiarum a Centro gravitatis ipsius.

SCHOLION.

232. *Ne mirentur Tyrones, nos ad vires resistentes quascunque & grave sursum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorsum nitentibus demonstrata sunt: eodem enim manente effectu, pondera* H *&* I *facili negotio, si ita visum fuerit, substitui possunt.*

PROBLEMA XLIII.

233. *Dato Centro gravitatis* F *corporis* IH, *una cum gravitate ipsius; determinare punctum* M, *quod si plano horizontali incumbat, pondus datum* G *in* L *appensum corpus* IH *ex situ horizontali dimovere nequit.* Tab. II. Fig. 18.

RESOLUTIO.

Concipiatur in Centro gravitatis F appensum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 125), & quæratur ejusdem atque ponderis dati G Centrum gravitatis commune M (§. 149). Quodsi enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus HI e situ suo dimovere nequit (§. 124). *Q. e. i. & d.*

Sit ex. gr. baculi Centrum gravitatis F, situla aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, LF = 18″. Reperietur LM = LF. F : (G + F) = 18. 2 : 26 = 18 : 13 = 1″ 4‴ fere. Mirum ergo non est (quod Statices ignari mirantur) situlam baculo IH supra mensam posito appensam non decidere.

PROBLEMA XLIV.

234. *Dato corporis* AB *Centro gravitatis* C, *una cum pondere ejus* G; *determinare puncta* L *&* M, *in quibus supponenda sunt fulcra* MN *&* LO, *ut in data ratione premantur.* Tab. III. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 28. Sumantur in linea horizontali AB, quæ per Centrum gravitatis C tranſit, rectæ MC & CL in data ratione. Quodſi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis ſupponas, ea premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodſi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus ſupponant operarii; pondus portare poterunt, ſi viribus eorum proportionatum. Unde patet, quomodo onus ferendum in data ratione diſtribui poſſit.

SCHOLION.

236. *Si pondus ferendum ex longurione extra Centrum gravitatis ipſius ſuſpendatur; quærendum eſt Centrum gravitatis commune ponderis atque longurionis, & ſuppoſito in eodem pondere utrique æquali, reliqua peraguntur ut in reſolutione Problematis. Exempla ſpecialia, quibus Problemata hæc illuſtrantur, dedit* STEVINUS (*a*).

(*a*) Stat. Lib. 2. Prop. 7. 8. *Operum* f. 474. & ſeqq.

CAPUT V.

De Motu Rectilineo compoſito.

DEFINITIO XXX.

237. MOtus *ſimplex* eſt, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO XXXI.

238. *Motus compoſitus* eſt, qui efficitur a viribus pluribus conſpirantibus. Dicuntur autem *vires conſpirare*, ſi directio unius non eſt oppoſita directioni alterius; veluti cum radius circuli circa centrum rotari, & interea punctum per eam recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus eſt compoſitus (§. 74).

DEFINITIO XXXII.

240. *Angulus directionis* eſt, quem lineæ directionis duarum virium conſpirantium comprehendunt.

THEOREMA XXIX.

241. *Si mobile* A *duplici vi urgeatur, altera quidem ſecundum directionem* AB, *altera vero ſecundum directionem* AC, *ita ut celeritates ſint ut latera* AB *&* AC; *motu compoſito diagonalem parallelogrammi* AD *deſcribit.* Tab. I. Fig. 19

DEMONSTRATIO.

Si mobile A ſola vi ſecundum AB impreſſa moveretur, momento primo foret in aliquo puncto rectæ AB, veluti in H, & ad rectam HL ipſi AC parallelam accederet. Si ſola vi ſecundum AC impreſſa progrederetur, eodem momento foret in aliquo puncto ipſius rectæ AC, veluti in I, & ad rectam IL ipſi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium ſibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, adeoque eodem momento mobile accedet tum ad HL, tum

Tab.II. Fig.19. tum ad IL; consequenter erit in puncto L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam vero celeritates sunt ut AB ad BD, *per hypoth.* & spatia AH & HL eodem tempore descripta sunt ut celeritates (§. 33), consequenter AH:HL = AB:BD; erit AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*), consequenter AL pars diagonalis AD (§. 337 *Geom.*). Eodem modo patet, ductis KM & MG ipsis AB & AC parallelis, quod mobile momento secundo futurum sit in M, tandemque in D. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

242. Quodsi ergo concipiamus rectam AC motu æquabili sibi semper parallelo juxta ductum alterius rectæ AB moveri, ac interea punctum motu æquabili in eadem descendere; punctum repræsentabit corpus, quod duplici vi, juxta directiones AB & AC, celeritatibus quæ sunt ut AB & AC, movetur, adeoque motu composito describetur triangulum ABD.

SCHOLION.

243. *Solent igitur nonnulli in demonstrando Theoremate præsente punctum in linea* AC *descendens, dum ipsa interea juxta ductum rectæ* AB *promovetur, pro corpore sumere, quod duplici vi juxta hypothesin Theorematis movetur: id quod etiam ad juvandam imaginationem utiliter sumi potest, cum sic pateat possibilitas hypotheseos intuitiva ratione.*

COROLLARIUM II.

244. Mobile motu composito eodem tempore describit diagonalem AD, quo motu disjuncto describeret latera parallelogrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM III.

245. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC construi possit, constructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam super basi communi (*vi §.* 337. 205. *Geom.*); omnis motus rectilineus, ubi ad demonstrandum utile fuerit, in compositum resolvi potest. Tab.II. Fig.19.

COROLLARIUM IV.

246. Quoniam vero laterum AC & CD ratio varia esse potest, pro diversitate angulorum CAD & DAB; motu quoque variis modis composito eadem recta AD describi (§. 245); adeoque & idem motus rectilineus in varios compositos resolvi potest.

THEOREMA XXX.

247. *In motu composito uniformi, velocitas a viribus conspirantibus producta est ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis* AD *parallelogrammi* ABDC, *juxta cujus latera agunt separatæ, ad latus alterutrum* AB *vel* AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC sigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 241). Est ergo diagonalis AD spatium a viribus conspirantibus dato tempore descriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore sunt ut spatia (§. 33). Est ergo celeritas a viribus conspirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

248. Datis itaque viribus conspirantibus, hoc est, data celeritatum ratione, per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per easdem rectas positione datas, aut per angulum directionis; datur motus obliqui celeritas & directio; quia diago-

Tab.II. Fig.19. diagonalis & magnitudine & poſitione datur (*§. 339* & ſeqq. *Geom.*)

COROLLARIUM II.

249. Non tamen vice verſa motu obliquo dato dantur ſimplices; quia idem ex diverſis ſimplicibus componi poteſt (*§.* 245).

COROLLARIUM III.

250. Motus adeo ſimplex per diagonalem AD, celeritate ut AD, æquipollet motibus per latera AB & AC, celeritatibus ut AB & AC conjunctis; hoc eſt, perinde eſt, ſive mobile juxta directionem AD celeritate ut AD, ſive ſimul juxta directiones AB & AC celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241, 246.)

THEOREMA XXXI.

Tab. III. Fig.30. 251. *In motu compoſito ab iiſdem viribus producto major eſt velocitas, ſi angulus directionis minor: illa autem minor, ſi hic major.*

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eædem ſunt, *per hypoth.* erit AC utrique parallelogrammo AFEC & BACD communis, & præterea AB = AF. Evidens eſt in hypotheſi anguli majoris deſcribi diagonalem AD, in hypotheſi minoris vero ipſam AE, & quidem eodem tempore, ob AB = AF, (§. 244). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 33). Quare cum AD < AE; velocitas in hypotheſi anguli majoris minor eſt, quam in hypotheſi minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Cum datis cruribus AC & CE cum angulo intercepto ACE, angulus CEA (*§.* 40 *Trigon.*) & inde porro AE (*§. 36 Trig.*) reperiatur; data virium conſpirantium celeritate & angulo directionis; in caſu quocunque ſpeciali celeritas motus compoſiti inveniri; conſequenter ratio celeritatum, ab iiſdem viribus, ſub diverſis directionum angulis, productarum definiri poteſt.

THEOREMA XXXII.

253. *Si mobile a duabus viribus ſecundum directiones* AB *&* AC *trahitur, quæ æquipollent tertiæ trahenti ſecundum directionem* AD; *erunt ſollicitationes ad motum inter ſe reciproce ut ſinus angulorum, quos lineæ directionis* BA *&* AC *cum linea directionis tertiæ AD comprehendunt, & alterutra earum erit ad ſollicitationem a media pendentem, ut ſinus anguli quem linea directionis alterius cum linea directionis tertiæ comprehendit ad ſinum anguli* BAC. Tab.II. Fig.29.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipſi AC & DC ipſi AB parallela (§. 258 *Geom.*); erit angulus BDA = DAC & ADC = BAD (§. 255 *Geom.*), ac BACD parallelogrammum (§. 102 *Geom.*). Quoniam vires ſecundum directiones AB & AC trahentes in ſollicitando mobili ad motum, ſeu quatenus mobile ad motum urgent (§. 110), æquipollent vi mobile ſecundum directionem AD trahenti, *per hypoth.* ſollicitationes laterales ſunt ut AB & BD = AC (§. 335 *Geom.*) media vero ſollicitatio ut AD (§. 250). Erunt igitur (§. 33 *Trigon.*) laterales ut ſinus angulorum BDA & BAD, & lateralis ſecundum directionem AB trahens ad mediam ſecundum directionem AD trahentem ut ſinus anguli BDA ſeu DAC ad ſinum anguli

ABD

Tab.II. ABD seu BAC (§. 233 *Geom.* & §. 5 *Fig.29. Trigon.*), lateralis vero agentis secundum directionem AC sive BD ut sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

254. *Sollicitationes sunt in ratione composita massarum & celeritatum initialium* (§. 110. 22), *consequenter celeritatum in motu aequabili, ubi* c *est ut* dc. *Rectae, per quas exponuntur motus in resolutione compositi in simplices, sunt ut celeritates* (§. 250). *Quare si per eas exponuntur sollicitationes, massae corporum, in quibus concipiuntur vires, supponendae sunt aequales* (§. 181 Arithm.) *id quod semper facere licet, cum corpori, cuicunque data celeritate lato, vel data celeritate initiali instructo, dari possit aliud eidem in sollicitatione ad motum aequivalens, quod habet massam datam* (§. 146), *quia celeritates initiales sunt ut distantiae a centro motus. Atque haec ratio est, cur in praesente tractatione, praecisa massa corporum, ea consideramus instar punctorum, in quibus non spectatur nisi celeritas initialis.*

DEFINITIO XXXIII.

255. Per *Tendentiam* intelligimus rectam velocitatis & directionis repraesentatricem. Et *Tendentia media* vocatur, quae in motu composito pluribus datis simul substitui potest.

PROBLEMA XLII.

Tab. XIII. Fig. 128. 256. *Si mobile* A *urgetur secundum directiones* BA, CA, DA, EA *celeritatibus ut* AB, AC, AD, AE; *determinare directionem & celeritatem mobilis in motu composito, qui ex simplicibus istis resultat: seu datis quotcunque tendentiis* AB, AC, AD, AE; *invenire mediam* AK.

RESOLUTIO.

1. Per Centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiae mediae ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A. Tab. XIII. *Fig.* 128.
2. In hanc ex A transferatur AG toties, quot sunt tendentiae datae.

Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex singulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, G*g*: tendentiae BA aequivalebunt laterales B*b* & *b*A, secundae CA laterales C*c* & *c*A, tertiae DA laterales *Dd* & *d*A, quartae EA laterales E*e* & *e*A (§. 250, 255). Jam cum directiones B*b*, C*c*, D*d* & E*e* sibi mutuo non sint contrariae, tendentiae cognomines in determinanda media sunt attendendae: ex adverso cum directiones *b*A & *c*A sint contrariae directionibus *d*A & *e*A, sintque velocitates versus partem S majores velocitatibus versus partem R *per hypoth.* excessus tendentiarum versus S supra tendentias versus R attendendus erit in media determinanda. Jam si parallelogrammum A*g*GH compleatur; tendentiae perpendiculares B*b*, C*c*, D*d* & E*e* aequivalebunt mediae 4AH & excessus contrariarum fortiorum supra debiliores $Ae + Ad - Ab - Ac$ aequivalet tendentiae mediae parallelae 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero si AH continuetur in I, donec fiat $AI = 4AH$ & ducatur IK parallela

Tab. XIII. Fig. 128. rallela ipsi HG, erit etiam IK=4HG & AK=4AG (§.268 *Geom.*). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleant diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque AB, AC, AD & AE tendentiæ AK æquipollent, adeoque ipsa AK media est (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

257. *Ex Demonstratione adeo Problematis præsentis patet, si mobile ad motum urgeatur viribus* B, C, D *&* E *eo modo, ut, si* B *sola ageret, mobile* A *progrederetur secundum directionem* AB *celeritate ut* AB; *si sola* C *ipsum impelleret, secundum directionem* AC *celeritate ut* AC; *si sola vis* D *mobile urgeret, secundum directionem* AD *celeritate ut* AD, *si denique sola vis* E *mobile* A *ad motum concitaret, secundum directionem* AE *celeritate ut* AE; *idem mobile* A *viribus* B, C, D, E *una agentibus moveri secundum directionem* AK *celeritate ut* AK. *Patet vero eodem prorsus modo tendentiam mediam determinari, si plures quotcunque dentur. Opus autem est in Demonstratione resolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonstrari possit,* AK *esse directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas sit ut* 4 AG *absque ea patet* (§. 156). Tab. XIII. Fig. 128.

CAPUT VI.

De Descensu Gravium in plano inclinato.

DEFINITIO XXXIV.

258. *Planum inclinatum* est, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XXXV.

259. *Gravitatem absolutam* voco, qua corpus descendit libere in medio non resistente, seu in descensu libero ad motum sollicitatur.

DEFINITIO XXXVI.

260. *Gravitatem respectivam* appello, qua corpus descendit, parte aliqua ad superandam resistentiam impensa, seu qua in descensu per resistentiam impedito ad motum sollicitatur. Talis est, qua descendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad resistentiam plani vincendam impenditur, seu qua ad motum sollicitatur super plano inclinato.

THEOREMA XXXIII.

261. *Si grave in plano inclinato consistit, gravitas respectiva est ad gravitatem absolutam ut altitudo plani* AB *ad longitudinem* AC. Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D secundum directionem AC descendere nitatur in plano inclinato, libere autem descenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212); si erigatur in D, DG perpendicularis ad AC, & ducatur GF ipsi AC parallela occurrens ipsi DH in F, exponet DF gravitatem absolutam, DG vero partem, quæ resistentiam plani vincit, & FG gravitatem respectivam (§. 250, 260). Quodsi parallelogrammum DGFE compleatur; erit

Tab. III. Fig. 31. erit EF = DG & FG = ED (§. 335 *Geom.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ut DF ad FG sive DE. Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares existant, *per hypoth.* inter se parallelæ sunt (§. 256 *Geom.*), adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti sunt, *per hypoth.* erit DF : DE = CA : AB (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas absoluta ad respectivam ut CA ad AB (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Corollarium I.

262. Cum adeo globus D super plano inclinato gravitate tantum respectiva gravitet; pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, si fuerit ad ipsum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC.

Corollarium II.

263. Quod si longitudo plani CA sumatur pro sinu toto, erit AB sinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ponderis super plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipsum sustentans, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

Corollarium III.

264. Hinc gravitates respectivæ ejusdem corporis super diversis planis inclinatis sunt inter se ut sinus anguli inclinationis. Est enim ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas absoluta ad respectivam super eodem (§. 263) & ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas absoluta ad respectivam super hoc plano (§. *cit.*). Quare ut sinus anguli inclinationis planorum, ita sunt gravitates respectivæ ejusdem corporis super iisdem (§. 196 *Arithm.*). Tab. III. Fig. 31.

Corollarium IV.

265. Major ergo gravitas respectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa est, quo minor hic existit: cum crescentibus angulis crescant, decrescentibus decrescant sinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2. *Trigon.*).

Corollarium V.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas respectiva degenerat in absolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas respectiva prorsus exspirat, hoc est, grave secundum longitudinem plani nullum nisum exercet.

Corollarium VI.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipsi æqualis est: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

Problema XLIII.

268. *Invenire sinum anguli inclinationis plani, super quo data vi pondus datum sustentari possit.*

Resolutio.

Fiat ut pondus datum D ad vim datam L, ita sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani (§. 262).

E. gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum: reperietur angulus inclinationis 2° 52′

Log. 1000 = 30000000
Log. 50 = 16989700 }
Log. Sin. tot. 100000000 }

Log. Sin. inclin. = 8 6989700, cui in tabulis quam proxime respondent 2° 52′.

Theorema XXXIV.

269. *Si pondus* L *juxta directionem perpendicularem* AB *descendit, & pondus*

Tab. III. Fig. 31. D *juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo ascensus ponderis* D *est ad altitudinem descensus alterius* L *ut sinus anguli inclinationis* C *ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ascendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam ascendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari descendat, *per hypoth.* erit altitudo, per quam ipsum descendit, ipsi CD æqualis. Altitudo igitur ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut DH ad CD. Enimvero si CD sumatur pro sinu toto, DH est sinus anguli inclinationis C (§. 2 *Trigon*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut sinus anguli inclinationis & sinus totus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

270. Est igitur altitudo descensus CD ponderis L ad altitudinem ascensus DH ponderis D, ut reciproce pondus D ad pondus L ipsi æquiponderans (§. 263).

COROLLARIUM II.

271. Quare cum sit CD. L = DH. D (§. 297 *Arithm.*), & nisus atque renisus æquiponderantium D & L æquales sint (§. 75); momenta ponderum D & L sunt in ratione composita massarum & altitudinum, per quas in plano, sive inclinato sive perpendiculari, vel ascendunt vel descendunt (§. 159 *Arithm.*).

THEOREMA XXXV.

Tab. XIII. Fig. 129. n. 1. 2. 272. *Si pondera* E & D *trahentia rectam* AB *habeant Centrum gravitatis commune in* C; *erunt ea inter se in ratione reciproca distantiarum* CH & CI, *nempe* E : D = CI : CH.

DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendiculares, & ex Centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipsi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac si planis inclinatis BD & AE incumberent; perinde erit ac si in B suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod est ad D ut FB ad BD, & in A suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod est ad E ut AG ad AE (§. 261). Sit pondus prius P; alterum Q: erit P : D = BF : BD & Q : E = AG : AE. Enimvero, propter parallelismum linearum GE & DF atque AB, angulus GEA = HAC & FDB = ABD (§. 233 *Geom.*). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I sint recti *per construct.* erit BF : BD = CI : CB & AG : AE = CH : CA (§. 267 *Geom.*), consequenter P : D = CI : CB & Q : E = CH : CA (§. 167 *Arithm.*). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem sint in æquilibrio *per demonstr.* erit P : Q = AC : CB (§. 144), consequenter P : E = CH : CB (§. 200 *Arithm.*), & hinc tandem D : E = CH : CI (§. 199 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. XIII. Fig. 129. n. 1. 2.

COROLLARIUM I.

273. Quoniam pondera D & E sibi invicem æquilibrantur, si sub obliqua quacunque directione rationem reciprocam distantiarum habuerint, hoc est, si D : E = CH : CI (§. 272); est vero E. CH = D. CI (§. 297 *Arithm.*); vires æquiponderantium etiam sub directionibus obliquis æstimandæ

mandæ sunt per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 274. Si pondera sive ex Centro gravitatis communi, sive ex alio quocunque extra illud posito suspendantur; momenta sunt in ratione composita massarum & distantiarum a puncto suspensionis N: nempe in eo situ, quo Centrum gravitatis ipsius P descendit per altitudinem IK & Centrum gravitatis alterius ponderis Q ascendit per altitudinem OH, ut Q. ON & P. IN (§. 146. 271. 273). Sed cum verticales ad N sint æquales (§. 156 *Geom.*), & lineæ directionum KI & HO sint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); ON : NI = HO : IK (§. 267 *Geom.*). Quare momenta ponderum Q & P sunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc est, in ratione composita massarum & altitudinum, per quas perpendiculariter Centrum gravitatis vel ascendit, vel descendit. Superior igitur (§. 146. 273) constituta virium æstimatio cum præsente consentit.

COROLLARIUM III.

275. Vires adeo æquales sunt, quæ pondera elevant per altitudines ipsis reciproce proportionales.

SCHOLION I.

276. *Hoc principium ad demonstrandas machinarum vires sine demonstratione assumit* CARTESIUS (*a*). *Ait enim*, quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli potest, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

SCHOLION II.

277. *Hinc etiam ratio patet, cur currus onustus difficilius trahatur super plano inclinato, quam super horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ est ad pondus totum ipsius in ratione altitudinis ad longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilius trahatur in via lutosa & arenosa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si enim recta* FD *sit longitudini plani* AE *parallela, hoc est, linea directionis currus, atque* FC *altitudini* ED *parallela ope perpendiculali definiatur, & ex* C *ducatur perpendicularis* DC *ad* FD, *erit* y = o *&* o = x (§. 233 Geom.) *hincque* y = x. *Quare ob rectos* D *&* B, FC : FD = EA : EB (§. 267 Geom.). Tab. III. Fig. 32.

(*a*) In *Tract. de Mechanica* (qui inter *Posthuma* habetur) pag. 13.

THEOREMA XXXVI.

278. *Vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & velocitatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, sed non actu moveant pondera, sunt vires mortuæ (§. 9); adeoque in quacunque directione in ratione composita massarum & distantiarum a centro motus (§. 146. 273). Enimvero si ponamus Centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æquabiliter, eodem tempore describent arcus distantiis proportionales (§. 138. 412 *Geom.*): qui cum sint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 185 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

279. *In conatu jam adest celeritas initialis* dc, *elementum ejus, qua moveretur mobile, si motus actu sequeretur. Quare cum celeritas sit ut elementum ejus* dc; *mirum non est, quod vires hic sint in ratione celeritatum prodituraum & massarum composita. Sunt nempe in ratione composita massarum & celeritatum initialium, quibus*

instrum-

instruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, consequenter distantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.

COROLLARIUM.

280. Quodsi ergo massæ æquales sunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA XXXVII.

Tab. III. Fig. 33. 281. *Pondera* E *&* F *super planis inclinatis* AC *&* CB *ejusdem altitudinis* CD *æquiponderantia sunt ut longitudines planorum* AC *&* CB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant, *per hypoth.* eadem vis, quæ pondus E super plano inclinato AC sustentare valet, etiam alterum F super plano inclinato CB sustentabit, & hæc dicatur V. Est vero $V:E = DC:AC$ & $V:F = DC:CB$ (§. 262). Ergo $E:F = AC:CB$ (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

Tab. III. Fig. 34. 282. SIMON STEVINUS (*a*) *ingeniosam affert hujus Theorematis demonstrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo* GIH, *illud per se patet, partes* GK *&* HK *æquilibrari: æquipollet enim* GKH *catenæ in punctis* G *&* H *suspensæ. Quodsi jam* IH *non æquiponderet ipsi* GI, *pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa* GIH *orietur; qui cum sit absurdus, patet partes catenæ* IH *&* GI, *adeoque pondera quævis alia, quæ itidem sunt ut longitudines planorum* IH *&* GI *æquiponderare. Supponit adeo motum perpetuum esse absurdum, seu id Axiomatis instar sumit.*

(*a*) Element. Static. Lib. 1. Prop. 19. f. 448. Operum.

COROLLARIUM.

283. Quodsi communis planorum altitudo CD sumatur pro sinu toto, CB & CA sunt cosecantes angulorum inclinationis A & B (*§.* 11 *Trigon.*). Pondera igitur F & E super planis inclinatis CB & CA æquiponderantia sunt ut cosecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut sinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 *Trigon.*). Tab. III. Fig. 33.

THEOREMA XXXVIII.

284. *Grave super plano inclinato descendit motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO.

Gravitas respectiva est ad absolutam in constante ratione (§. 261), cumque adeo hæc non mutetur, (§. 78), illa quoque omni descensus tempore eadem. Quare cum eodem semper modo vis gravitatis grave ad motum sollicitet (§. 25); singulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato descendit (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

285. Sunt igitur spatia descensus in ratione duplicata temporum (*§.* 80), itemque velocitatum (*§.* 81).

COROLLARIUM II.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus crescunt secundum numeros impares (*§.* 84).

COROLLARIUM III.

287. Tempora vero sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem ratione existunt (*§.* 83.)

COROL-

COROLLARIUM IV.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato descendente decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM V.

289. Descensus adeo gravium super planis inclinatis iisdem legibus adstringitur, quibus descensus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLION.

290. *Hinc* GALILÆUS *leges illas exploraturus experimenta sumsit in planis inclinatis* (§. 89) : *tardior enim, ut in Theoremate sequente demonstratur, est descensus in plano inclinato, & hinc spatia facilius notari possunt.*

THEOREMA XXXIX.

291. *Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati est ad celeritatem quam perpendiculariter descendens eodem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.*

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatum descendit, producuntur a gravitate respectiva, dum vero perpendiculariter descendit, ab absoluta. Si celeritates sint ut C & c, tempusculum dt, massa mobilis m, gravitas absoluta & respectiva ut G & g, erit $G:g = \frac{mdC}{dt} : \frac{mdc}{dt}$ (§. 112), $= dC : dc$ (§. 181 *Arithm.*) $= C : c$ (§. 187 *Arithm.*). Sed G ad g ut longitudo plani ad altitudinem ipsius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis t celeritates C & c sunt ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato descendentis est in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis (§. 263).

THEOREMA XL.

293. *Spatium a gravi in plano inclinato confectum* AD *est ad spatium* AB *quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in descensu perpendiculari in fine temporis dati.* Tab. III. *Fig.* 35.

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in D constitutum habet, duplum ipsius AD spatium confecisset (§. 288). Similiter si ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in B habet, duplum ipsius AB confecisset (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur spatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percursa, *per hypoth.* ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB sunt ut eædem celeritates (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

294. Est igitur spatium in plano inclinato percursum ad spatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari descenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 291), itemque ut sinus anguli inclinationis B ad sinum totum (§. 292).

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 35. 295. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit AC : AB = AB : AD (§. 330 Geom.). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter descendit in B, super plano inclinato perveniet in D (§. 294).

COROLLARIUM III.

296. Dato igitur spatio descensus perpendicularis in altitudine plani AB, habetur spatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, si ex B ad AC perpendicularis dimittatur.

COROLLARIUM IV.

297. Similiter dato spatio in plano inclinato percurso AD, invenitur spatium AB per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidisset, si ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 36. 298. Cum in semicirculo anguli D, E, F, C, recti sint (§. 317 Geom.); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore descendit, quo nempe per diametrum AB, si ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 296).

PROBLEMA XLIV.

Tab. III. Fig. 35. 299. *Dato spatio AD in plano inclinato* AC *percurso; determinare spatium quod in alio plano inclinato* AF *eodem tempore percurreret.*

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B: erit AB spatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§. 297).
2. Quare si ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE spatium quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A in B (§. 296); consequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. *Q. e. i. & d.* Tab. III. Fig. 35.

COROLLARIUM.

300. Cum sit AB ad AD ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis C & AB ad AE ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis F (§. 294); spatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diversis planis inclinatis percurrere valet, sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F (§. 196 *Arithm.*) & reciproce ut gravia per eadem plana descendentia (§. 283); consequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AC & AF æque-altorum (§. 281). Et hinc Problema per calculum variis modis solvitur.

THEOREMA XLI.

301. *Velocitates, quæ in diversis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, sunt ut spatia eodem tempore percursa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE; erunt AD, AB & AE spatia eodem tempore percursa (§. 299). Cum adeo sit, ut AB ad AC ita velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam, & ut AB ad AF ita velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam (§. 291), consequenter ob AB : AC = AD : AB & AB : AF = AE : AB (§. 330 *Geom.* & §. 169 *Arithm.*), velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam

Tab. III. Fig. 35. ſitam ut AD ad AB & velocitas per AE acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam ut AE ad AB (§. 167 *Arithm.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquiſitæ ſunt ut ſpatia AD & AE iſto tempore percurſa (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

302. Velocitates in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiſitæ ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera per iſta plana deſcendentia, necnon reciproce ut eorundem planorum æque altorum longitudines AC & AF (§. 300).

T H E O R E M A XLII.

303. *Si grave per planum inclinatum* AC *ad lineam horizontalem* CB *pervenit; eandem celeritatem acquiſivit quam in deſcenſu perpendiculari* AB *uſque ad eandem lineam horizontalem* CB *acquireret.*

D E M O N S T R A T I O.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD ſpatium eodem tempore percurſum, quo percurritur AB (§. 296), adeoque celeritas per AB acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC ad AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquiſita eſt ad celeritatem per AD acquiſitam in ratione ſubduplicata ipſius AC ad AD (§. 287) $= \sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum ſit $AC : AB = AB : AD$ (§. 330 *Geom.*), adeoque AC ad AD in ratione duplicata $AC : AB$ (§. 216 *Arithm.*) $= AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arithm.*), conſequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} = AC : AB$; erit celeritas per AC acquiſita ad celeritatem per AD acquiſitam ut AC ad AB (§. 167 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquiſita eſt celeritati per AB acquiſitæ æqualis (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 35.

C O R O L L A R I U M I.

304. Grave igitur per diverſa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

C O R O L L A R I U M II.

305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 304). Quare ſi per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac ſi ſtatim ab initio in plano inclinato HK motum fuiſſet. Tab. III. Fig. 37.

C O R O L L A R I U M III.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior ſit quam per perpendiculum IM (§. 291), grave per LI & IK deſcendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam ſi conſtanter per LM perpendiculariter deſcendiſſet (§. 90 *Arithm.*).

C O R O L L A R I U M IV.

307. Quodſi grave deſcendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodſi ergo ubi ad M pervenit, motum ſuum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, niſi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. *cit.*). Quamobrem ſi ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum eſt, quam acquireret per OQ, ſeu QR (§. *cit.*). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquiret celeritatem, ac ſi perpendiculariter per QR deſcendiſſet. Tab. III. Fig. 38.

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 38. 308. Cum itaque curvæ ex rectis infinite parvis componantur; grave per curvam QS descendens eandem adipiscitur celeritatem, quam ex casu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA XLIII.

Tab. III. Fig. 35. 309. *Tempus descensus per planum inclinatum* AC *est ad tempus descensus perpendicularis per* AB, *ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB: *tempora vero descensuum per diversa plana inclinata æque-alta* AC & AG *sunt ut longitudines planorum.*

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquisita (§. 288), & tempus per AB æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquisita (§. 9). Sed celeritates istæ dimidiæ æquales sunt (§. 303). Tempora igitur sunt ut AC & AB (§. 32). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, tempora descensuum per AC & AG esse ut AC & AG. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLIV.

Tab. III. Fig. 36. 310. *Si diameter circuli* AB *fuerit ad lineam horizontalem* LM *perpendicularis; grave ex quovis peripheriæ puncto* D, E *vel* C *eodem tempore descendit in* B, *quo nempe diametrum* AB *percurrit.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC: erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut BG ad BC (§. 309). Tempus vero, quo GB percurritur, est ad tempus, quo AB percurritur, in ratione subduplicata BG ad AB (§. 87), hoc est, cum sit BG : BC = BC : AB (§. 330 *Geom.*) in ratione BG ad BC (§. 216 *Arithm.*). Tempus adeo descensus per GB ad tempus descensus per BC & per diametrum AB eandem rationem habet (§. 167 *Arithm.*). Ergo tempus quo percurritur BC æquale est tempori, quo AB percurritur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLV.

311. *Descensus per semicycloidem* DEF *& per quemcunque ejus arcum* DG *sunt æquidiuturni.* Tab. III. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infinitesimas resolutus, quarum una sit M*m*, & semicyclois DEF in numero totidem divisa, quarum una E*e*: erit DG : DF = M*m* : E*e* (§. 171 *Arithm.*). Concipiamus porro semicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut sit DF : DG = DE : DM = E*e* : M*m* (§. 167 *Arithm.*). Ducantur denique semiordinatæ TE, *te*, NM, *nm*, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam DF = 2AD, DE = 2DB, DM = 2DO & DG = 2DL (§. 168 *Analys. infinit.*), & DF : DE = DG : DM, *per hypoth.* erit DA : DB = DL : DO (§. 181 *Arithm.*), & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 260 *Arith.*). Quoniam vero DA : DB = DB : DT (§. 330 *Geom.*); erit $DA^2 : DB^2$ = DA : DT (§. 216. 259 *Arithm.*). Similiter quia DA : DL = DL : DH & DA : DO = DO : DN; erit $DA^2 : DL^2$ = DA

Tab. III. Fig. 39. = DA : DH & $DA^2 : DO^2$ = DA:DN (*§. cit. Arith.*), consequenter $DL^2 : DO^2$ = DH : DN (§. 196 *Arithm.*). Quamobrem ulterius DA : DT = DH : DN (§. 167 *Arith.*), & AT : DT = HN:DN (§. 193 *Arithm.*), adeoque AT : HN = DT : DN (§. 173 *Arithm.*) & $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} = \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ (§. 260 *Arithm.*). Sed ut $\sqrt{AT}$ ad $\sqrt{HN}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 307. 87), ita etiam DB ad DO (§. 310. 301), immo DE ad DM (§. 168 *Analyſ. infinit.* & §. 181 *Arithm.*). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut E*e* ad M*m* *per demonſtr.* conſequenter cum tempus per E*e* ſit ut ſpatium E*e* per velocitatem in E diviſum, & tempus per M*m* ut ſpatium M*m* per velocitatem in M diviſum (§. 37); tempus per E*e* æquale eſt tempori per M*m* (§. 185, 149 *Arith.*), & hinc tempus per omnia E*e*, hoc eſt per DF, æquale eſt tempori per omnia M*m*, hoc eſt per DG. (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 40. 312. *Si plana* DC & FH *cum horizontalibus* CK & HI *æquales efficiunt angulos; ſimiliter inclinata ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum efficiunt obliquum (§. 258); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus ſuis efficiunt, diſtingui poteſt eorum inclinatio (§. 476 *Geom.*). Jam anguli æquales ſunt ſimiles (§. 174 *Geom.*), adeoque per eos planorum inclinatio diſtingui nequit (§. 24 *Arithm.*). Ergo plana, quæ cum ſuis horizontalibus angulos efficiunt æquales, ſimiliter inclinata ſunt (§. *cit.*). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 40.

COROLLARIUM.

313. Cum in planis inclinatis ſimilibus DC & FH anguli C & H ſint æquales (§. 312) & demiſſis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 78 *Geom.*); erit CD : FH = DK:FI (§. 267 *Geom.*), hoc eſt, altitudines longitudinibus proportionales ſunt.

THEOREMA XLVII.

314. *Si duo gravia per duo aut plura plana* AB, BC & EG, GH *ſimiliter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe ſit* AB : BC = EG : GH ; *tempora deſcenſus erunt in ſubduplicata ratione longitudinum* AB, BC & EG, GH.

DEMONSTRATIO.

Sit AB : BC = $a:b$; erit ob AB : BC = EG : GH, *per hypoth.* EG = ma & GH = mb. Cum plana AB & EG ſint ſimiliter inclinata, *per hypoth.* non aliter quam partes ejuſdem plani percurruntur, adeoque tempus per AB eſt ad tempus per EG ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{am}$ (§. 287). Eodem modo oſtenditur, eſſe tempus per BC ad tempus per GH ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{mb}$, & ita porro, ſi plura fuerint plana. Quare tempus per AB+BC eſt ad tempus per EG+GH ut $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma}+\sqrt{mb}$ (§. 192 *Arithm.*), hoc eſt, ut $1 : \sqrt{m}$ (§. 181 *Arith.*) ſeu ut $\sqrt{(a+b)}$ ad $\sqrt{(ma+mb)}$ (§. 178 *Arithm.*) : quæ ratio ſubduplicata planorum AB+BC & EG+GH. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

315. Quoniam AB : EG = AP : EQ & CB : GH = BN : GO (§. 313) ſunt pro-

Tab. III. Fig. 40. portiones inter se similes, ob AB : EG = CB : GH *per hypoth.* erit AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO (§. 192 *Arithm.*) = [ob AP + BN = DM + MK = DK & EQ + GO = FL + LI = FI, (§. 226 *Geom.*)] DK : FI. Tempus igitur per plana similia & proportionalia AB, BC & EG, GH, cum sit in ratione subduplicata AB + BC & EG + GH (§. 314), in ratione quoque subduplicata altitudinum DK & FI existit.

COROLLARIUM II.

316. Et quia superficies curvæ AB & DE similes ac similiter positæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & similibus constant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione subduplicata AB ad DE. Tab. III. Fig. 41.

CAPUT VII.

De Ascensu Gravium, cum Perpendiculari, tum in plano inclinato.

THEOREMA XLVIII.

317. *Si grave, in medio non resistente, vi impressa, sive perpendiculariter sive per planum inclinatum ascendit; motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impressa perpendiculariter ascendit, a vi gravitatis absolutæ secundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum ascendit, a vi gravitatis respectivæ secundum directionem plani (§. 260) continuo deorsum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam absolutæ, quam respectivæ in omnibus locis, per quæ grave descendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), consequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

318. Grave igitur, sive perpendiculariter sive per declive, in medio non resistente ascendens spatium percurrit subduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi describeret cum ea celeritate quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM II.

319. Ejusdem igitur spatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decrescunt ut numeri impares 7, 5, 3, 1, (§. 98); adeoque ascensus tandem sistitur: consequenter ubi vis impressa fuerit absumta, corpus vi gravitatis rursus descendit.

COROLLARIUM III.

320. Sunt adeo inverse ut spatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes divisum; momento primo grave A descendet per spatium 1, B ascendet per 7; secundo A descendet per 3, B ascendet per 5; tertio A descendet per 5, B ascendet per 3; ultimo A descendet per 7, B ascendet per 1 (§. 86. 319).

COROL-

COROLLARIUM IV.

321. Unde grave vi impressa ascendens ad eam altitudinem ascendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua sursum propellitur.

COROLLARIUM V.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim ascendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non resistente.

PROBLEMA XLV.

323. *Dato tempore quo grave impetu impresso ad altitudinem datam ascendit; determinare spatia singulis momentis confecta.*

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem descendisse, & quærantur spatia singulis momentis percursa (§. 94): hæc enim inverso ordine sumta eadem sunt cum spatiis ascensus quæsitis (§. 320).

Ex. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 secunda ascendit per intervallum 240 pedum. Quæruntur spatia singulis temporibus confecta? Quodsi corpus descendisset, primo minuto descendisset per 15 pedes, secundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque ascendit per 105, secundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15. pedes.

PROBLEMA XLVI.

324. *Dato tempore quo grave vi impressa ad datam altitudinem ascendit; determinare tempus quo ad altitudinem aliam datam pervenit.*

RESOLUTIO.

Quæratur tempus, quo grave per altitudinem desideratam decidere potest (§. 95): eodem enim ad eandem ascendet (§. 320. 322).

Vide supra exemplum Probl. II. (§. 95).

THEOREMA XLIX.

325. *Vires corporum vivæ sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Corpus E cadendo per AB acquirit vim ascendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiscitur, qua per altitudinem CD elevari potest (§. 322). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur, in ratione composita altitudinum AB & CD atque massarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ consumuntur. Sed AB & CD sunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per istas altitudines acquisitarum (§. 86). Ergo vires E & F sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote, non solo nisu, sed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Constat igitur vires vivas esse in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM.

326. Quare si massæ fuerint æquales; vires sunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 *Arithm.*)

SCHOLION I.

327. *Errant qui promiscue vires omnes in ratione composita massarum & velocitatum esse statuunt, propterea quod mortuæ in ea-*

dem deprehenduntur (§. 278). *Errorem communem detexit & emendavit* (*a*) *Vir illustris* LEIBNITIUS. *Aliam Theorematis* Leibnitiani *demonstrationem invenit, & per litteras mecum pro humanitate sua communicavit Celeberrimus* BERNOULLIUS, *quam ipsis Viri ingeniosissimi verbis huc transcribo.* „Concipe, *inquit*, corpus C
Tab. IV. Fig. 43. „moveri oblique in elastrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP „existente 30 gr. cujus nempe sinus CP „est semissis radii CL. Suppono autem „eam esse resistentiam in elastro, ut ad „illud tendendum requiratur præcise „unus velocitatis gradus in illo corpore, „si perpendiculariter impingeret. Quid „ergo jam fiet post incursionem obliquam „corporis C in elastrum L? Quoniam „motus per CL componitur, ut notum „est, ex duobus collateralibus per CP „& PL (*vide* §. 245), & cum CP, secundum quam corpus directe impingit in „elastrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, consumetur hic „motus per CP, tenso elastro (perinde „enim esset ac si corpus C celeritate CP „perpendiculariter incurreret in elastrum, „quod per hypothesin eam celeritatem „destruere potest), remanente corporis „celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit $= PL = \sqrt{3}$ „(ponitur enim $CL = 2$), & applicato in „M alio simili elastro faciente cum LM „angulum LMQ, cujus sinus $LQ = CP = 1$; „per eandem rationem manifestum est, „corpus C post tensionem elastri L tensurum esse elastrum M, amisso motu per „LQ & servato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat $MN = QM$ „$= \sqrt{2}$, ibique substituto elastro simili „tertio constituente cum MN angulum „MNR semirectum, quo scilicet MR iterum sit $= CP = 1$; patet similiter „motum per MR totum impendi in „tensionem elastri N, corpore interim „moveri pergente directione & celeritate Tab. IV. Fig. 43. „$RN = 1$. Denique si hac celeritate residua impingat perpendiculariter in elastrum O, huic flectendo totam suam vim „reliquam dabit; ipsum itaque corpus „ad quietem redigetur. Hisce ita præmissis; patet nunc potentiam corporis „C tantam fuisse, ut per se solum tendere possit præcise quatuor elastra talia, „ad quæ singula seorsim tendenda requiritur dimidia velocitas corporis æqualis „ipsi C; adeoque cum effectus illius quadruplo major sit quam effectus hujus, „evidens est quoque vim corporis velocitate 2 gr. quadruplam esse vis corporis ejusdem vel æqualis velocitate 1 gr. „Haud absimili modo demonstrarem corpus C, velocitate 3 gr. tendere posse 9 „elastra, ad quorum unum tendendum „unus velocitatis gradus in eo corpore „requiritur, & tandem in genere numerum elastrorum tensorum semper esse „quadratum numeri graduum velocitatis. „Unde igitur sequetur, vires corporum „æqualium esse in duplicata ratione celeritatum. *Q. e. d.*

SCHOLION II.

328. *Prodiit nuper Parisiis Tractatus Mathematici hujus eminentis* (*b*), *in quo hanc virium mensuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnatam multo apparatu stabilivit. Præterea Viri celeberrimi* GRAVESANDIUS (*c*), HERMANNUS & BÜLFFINGERUS (*d*) *eandem mensuram aliis modis demonstrarunt, &* POLENUS (*e*) *experimentis confirmavit. Ego in* Principiis Dynamicis (*f*) *Analysi vere Dynamica eandem virium mensuram erui. Qui vires vivas a mortuis non distinguunt, vires promiscue*

(*a*) Acta Eruditorum, An. 1686. p. 161. & seqq.

(*b*) *Discours sur les Loix de la Communication du Mouvement, à Paris* 1727.

(*c*) In *Element. Phys.* Tom. I. p. 112. Edit. poster.

(*d*) In *Comment. Acad. Scient. Petropolitanæ* pp. 1. 45.

(*e*) In *Tractatu de Castellis*, p. 56. & seqq.

(*f*) In *Comment. Acad. Scient. Petropolitanæ* p. 231.

mixtue æstimant per celeritatem in massam ductam.

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 39. 329. *Si grave vel perpendiculariter per* AD, *vel per quamcunque superficiem* FED, *descendat & impetu concepto per aliam* DC *rursus ascendat; in punctis æque-altis veluti in* G, H *&* Q, *eandem vim eandemque celeritatem habebit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave, vi cadendo per AD vel FD acquisita, ad C usque ex D per DGC ascendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipsi superest vis, qua ad C usque ascendere valet. Sed eandem vim adipiscitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q (§. *cit.*). In punctis adeo æque-altis G, H & Q eandem vim habet. *Quod erat unum.* Tab. III. Fig. 39.

Sunt autem vires cadendo acquisitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales sint, *per demonstr.* celeritatum quoque quadrata, consequenter ipsæ celeritates æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

330. Quodsi adeo grave per superficiem quamcunque FED descendat & per aliam similem ac æqualem similiterque positam DGC rursus ascendat; idem omnino est, ac si eadem linea eadem velocitate singulis sui partibus bis percurretur (§. 329). Unde tempora descensus & ascensus per æqualia spatia æqualia sunt (§. 25).

CAPUT VIII.

De Descensu & Ascensu Corporum in Lineis Curvis.

DEFINITIO XXXVII.

331. CUrva *Isochrona* dicitur, in qua grave sine acceleratione descendit, hoc est, æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva Isochrona tempora descensus sunt ut altitudines ejusdem.

SCHOLION.

333. *Problema de Curva Isochrona invenienda propofuit* LEIBNITIUS (*a*), *& suppressa analysi demonstrationem syntheticam dedit* (*b*). *Dedit autem solutionem ope Calculi differentialis tunc temporis nascentis,* JACOBUS BERNOULLI (*c*): *dedere post eum alii alias.*

PROBLEMA XLVII.

334. *Invenire Curvam Isochronam.* Tab. XIII. Fig. 130.

RESOLUTIO.

Sit linea horizontalis BC, altitudo per quam grave ad eandem descendit AC, Curva Isochrona GMB. Sit $AP = x$, $PM = y$; erit, ducta pm ipsi PM infinite propinqua, $Pp = dx$, $mR = dy$

(*a*) *Nouvelles de la République des Lettres*, Septembre 1687.

(*b*) In *Actis Erudit.* An. 1689. p. 196. & seqq.

(*c*) In *Actis Erudit.* An. 1690. p. 217. & seqq.

Tab. XIII. Fig. 130. $= dy$ & $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam in Curva Isochrona tempora descensus sunt ut altitudines, per quas descenditur (§. 332); erit tempus per Mm ut Pp, adeoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquisita eadem est cum celeritate in P acquisita (§. 308), adeoque in ratione subduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arculus infinite parvus Mm percurritur, $= \sqrt{x}$. Jam cum per arculum Mm grave motu æquabili feratur, erit ipse tanquam spatium a mobili percursum (§. 12) $= dx\sqrt{x}$ (§. 34). Est itaque in Curva Isochrona

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$
$$xdx^2 = dx^2 + dy^2$$
$$xdx^2 - dx^2 = dy^2$$

hoc est $dx^2(x-1) = dy^2$

$$dx\sqrt{(x-1)} = dy$$

Fiat $x - 1 = v$

erit $dx = dv$

$$dx\sqrt{(x-1)} = dv\sqrt{v} = v^{1:2}dv$$

adeoque $v^{1:2}\,dv = dy$

$$\tfrac{2}{3}v^{3:2} = y$$
$$\tfrac{4}{9}v^3 = y^2,\ \text{sive}\ v^3 = \tfrac{9}{4}y^2$$

Apparet adeo, Curvam Isochronam esse e numero Paraboloidum quadratico-cubicalium (§. 519 *Analys. finit.*), cujus abscissa $= u$, semiordinata $PM = y$, parameter $\frac{9}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, est x, sed $v = x - 1$; curva BMG lineam verticalem AC non secat in A, sed in G; consequenter mobile cadere debet per altitudinem AG, antequam in curva GMB descendere possit. Et quia $AG = 1$, parameter vero $= \frac{9}{4}$; si sit parameter $= p$, erit $p = \frac{9}{4}$ AG, adeoque $\frac{4}{9}p = AG$, hoc est, altitudo AG, per quam descendere debet grave antequam per curvam ita descendere potest ut altitudines descensus sint tempori proportionales, est quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile adeo non ex quiete descensum inchoat, sed ea celeritate quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem. Tab. XIII. Fig. 130.

SCHOLION.

335. *Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter se parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero Problema in hypothesi directionum convergentium solvit* VARIGNONIUS (*a*). *Lubet igitur solutionem in eadem hypothesi subjungere.*

PROBLEMA XLVIII.

336. *Invenire Lineam Isochronam in hypothesi directionum in Centro Telluris convergentium.* Tab. XIV. Fig. 131.

RESOLUTIO.

Sit distantia AC puncti horizontalis A, unde grave cadit, a centro Telluris $C = b$, $AP = x$ ut ante, AN arcus radio AC descriptus $= y$, quia ad AC perinde ac in Problemate præcedente semiordinatæ ad eandem altitudinem perpendicularis (§. 38 *Analys. infinit.*). Sit porro radius Cn ipsi CN infinite propinquus, & radiis CP atque Cp particula infinite parva Pp differentibus describantur arcus concentrici PM & pm; erit $MR = Pp = dx$, $Nn = dy$ &

(*a*) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1699. p. 1. & seqq.

Tab. XIV. a. Fig. 131. & ob similitudinem sectorum CnN & CmR (§. 138, 412 *Geom.*).

$$CN : Nn = Cm : mR$$
$$b : dy = b - x :$$

adeoque $mR = (b - x)\, dy : b$.

Porro ob angulum ad R rectum (§. 38 *Analys. infinit.*).

$MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*)
adeoque $Mm^2 = dx^2 + (b-x)^2 dy^2 : b^2$
$= (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) : b^2$

Enimvero, vi Analyseos praecedentis (§. 334)

$$Mm^2 = x dx^2$$

Ergo $x dx^2 = (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) : b^2$

$$b^2 x dx^2 - b^2 dx^2 = (b-x)^2 dy^2$$
$$b dx \sqrt{(x-1)} = (b-x)\, dy$$
$$\frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x} = dy$$
$$\int \frac{b dx \sqrt{(x-1)}}{b-x} = y$$

Cum y sit arcus AN, & eo dato determinetur punctum M, ducto ex centro C radio CN & intervallo CP ob $AP = x$ noto, seu $= b - x$, arcu PM; non alia re opus est, quam ut arcus AN ex assumta AP sive x determinetur: id quod fit ope curvae BQD. Si enim Elementum ejus $PpQq$ ponatur $= b dx \sqrt{(x-1)} : (b-x)$; cum sit $Pp = dx$, erit semiordinata $PQ = b\sqrt{(x-1)} : (b-x)$. Quare si area BPQ dividatur per $AB = 1$; prodibit recta arcui AN aequalis. Construatur itaque parallelogrammum rectangulum ABLK, aequale areae BPQ, cujus altitudo constans $AB = 1$; erit $BL = AK = AN$ arcui; qui adeo circuli quadratura praesupposita determinari potest. Apparet itaque Curvae Isochronae in praesenti casu Tab. XIV. a. Fig. 131. constructionem pendere a quadratura curvae BQD & quadratura circuli.

Ut curvae BQD natura investigetur fiat

$$PQ = b\sqrt{(x-1)} : (b-x) = 0$$
$$\text{erit } x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Patet adeo, semiordinata PQ evanescente, x degenerare in $AB = 1$, sive in B, ubi $PQ = 0$, esse AB adhuc $= 1$.
Fiat porro $PQ = b\sqrt{(x-1)} : (b-x) = \infty$

$$\text{erit } b - x = 0$$
$$b = x$$

Ergo ubi $AP = x$ degenerat in $AC = b$, semiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis est asymptotus curvae BQD.

Ut curvae BQD constructio detegatur, fiat $BP = v$, erit, ob $AP = x$ & $AB = 1$.

$$x = v + 1$$
$$x - 1 = v$$
$$PQ = \frac{b\sqrt{(x-1)}}{b-x} = \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Quoniam $\sqrt{v}$ est semiordinata parabolae, cujus vertex B, abscissa BP, parameter $AB = 1$ (§. 392 *Anal. finit.*); construatur circa axem BC parabola BHS, erit $PH = \sqrt{v}$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectae AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter se parallelae (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*).

$$CP : PH = CA : AV$$
$$b - v - 1 : \sqrt{v} = b : \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Tab. XIV. a. Fig. 131. Est igitur $AV = PQ$, adeoque punctum curvæ Q, a qua constructio Isochronæ pendet, habetur si parallelogrammum PAVQ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum, si sit $VQ = AP = y$ & $AV = PQ = x$, $AB = a$; erit

$$x = \frac{b\sqrt{(ay - a^2)}}{b - y}$$

$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b-y)^2}$$

$$x^2(b-y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

seu ob $(b-y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$

$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0$$

Si fiat $x = 0$

erit $a^2b^2 - ab^2y = 0$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

Est igitur semiordinata AB in origine abscissarum $A = a$, quod convenit cum superioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Analyf. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Anal. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad Curvam Isochronam in hypothesi directionum convergentium eruatur, fiat præter $AB = 1$, $BP = v$, arculus mR, radio $Cp = CR$ descriptus $= dz$, cum sit $Pp = dv$, erit $Mm^2 = dz^2 + dv^2$ (§. 417 *Geom.*). Est vero $Mm^2 = xdx^2$ vi superioris Analyseos. Quare cum sit Tab. XIV. a. Fig. 131.

$$x = v + 1$$

erit $dx = dv$

$$dx^2 = dv^2$$

$$xdx^2 = (v + 1)\, dv^2$$

$$= vdv^2 + dv^2$$

Habemus itaque

$$dz^2 + dv^2 = vdv^2 + dv^2$$

$$dz^2 = vdv^2$$

$$dz = v^{1:2}dv$$

$$z = \tfrac{2}{3}v^{3:2}$$

$$\tfrac{9}{4}z^2 = v^3$$

hoc est, $\frac{9}{4}AB.\,PM^2 = BP^3$

Quoniam PM est arcus circuli radio CP descriptus, Curva Isochrona BMC in hypothesi directionum convergentium transcendens est (§. 380 *Analyf.*).

Ut Curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$ seu

$$\frac{dz}{dv} = \sqrt{v}$$

$$v = 0$$

erit $\frac{dz}{dv} = 0$

$$dv = \infty$$

Est vero in B, $v = 0$ & $dv = \infty$. Axis igitur CB curvam BMC in C tangit, adeoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quod si fiat $CP = 0$, arculus quoque radio CP descriptus $mR = dz = 0$: punctum ergo M coincidit cum C, adeoque curva BMC cum axe in C concurrit,

quæ

Tab. XIV. a. Fig. 131. quæ in B eam tangit. Neceſſe igitur eſt ut ibidem ſit ad axem concava, conſequenter punctum flexus contrarii habet.

Jam in puncto flexus contrarii M eſt $Mm^2 = CP.\ dPp$ (§. 309 *Anal. infin.*). Fiat igitur $CB = c$; cum ſit $BP = v$, erit $CP = c - v$, adeoque $Pp = - dv$. Jam

$$dz = v^{1:2} dv$$

adeoque $v^{-1:2} dz = dv$

$$- v^{-1:2} dz = - dv$$

$\frac{1}{2} v^{-3:2} dz dv = - ddv = dPp$, ob conſtantem dz,

$$\frac{1}{2}(c - v) v^{-3:2} dz dv = CP.\ dPp$$

Porro $Mm^2 = dz^2 + dv^2$
$= v dv^2 + dv^2$

Habemus itaque

$$v dv^2 + dv^2 = \frac{1}{2}(c - v) v^{-3:2} dz dv$$
$$= \frac{1}{2}(c - v) v^{-1} dv^2$$

$$v + 1 = (c - v) : 2v$$

$$v^2 + v = \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} v$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v = \frac{1}{2} c$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v + \frac{9}{16} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$v + \frac{3}{4} = \sqrt{(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16})}$$

$$v = \sqrt{(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16})} - \frac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} + \frac{1}{16})} - \frac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\frac{1}{2} AC.\ AB + \frac{1}{16} AB^2)} - \frac{3}{4} AB$$

ob $c + 1 = AC$.

Sit Cl ultimum elementum curvæ, erit $hl = dz$ & $hC = dv$, & ob rectum ad h (§. 38 *Anal. infin.*), hl ad hC ut ſinus anguli hCl ad ſinum anguli hlC (§. 33 *Trigon.*), adeoque $dv : dz = \text{ſin.}\, hCl : \text{ſin.}\, hlC$. Si Cl ſit ultimum curvæ elementum, punctum l infinite parvo intervallo ab axe AC diſtat, ſeu cum eo coincidit, atque adeo punctum l eſt in axe AC & angulus hCl idem cum ACG, intra quem curva BMC comprehenditur. Quare $dv : dz = \text{ſin.}\, ACG : \text{Coſin.}\, ACG$. Eſt vero $dz = dv \sqrt{v}$, adeoque $dz : dv = \sqrt{v} : 1 = \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$. Eſt igitur ſinus anguli ACG, intra quem curva continetur, ad ejus coſinum, in ratione ſubduplicata rectarum CB & BA (§. 159 *Arith.*). Et per hoc Theorema, angulus ACG, conſequenter arcus AG, determinatur, qui Curvæ Iſochronæ toti conſtruendæ ſufficit.

Denique in æquatione $dz = dv \sqrt{v}$ ſubſtituatur valor ipſius $v = x - 1$, erit $dz = dx \sqrt{(x - 1)}$.

Fiat $dz = 0$

erit $dx \sqrt{(x - 1)} = 0$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$
$$= AB$$

Quare cum x denotet altitudinem, per quam grave cadit, ſeu motus acceleratricem, & dz in puncto B ſit $= 0$, ubi axis BC Curvam tangit, *per demonſtrata*; grave non ex quiete motum in curva BMC incipere debet, ſed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem AB.

Tab. XIV. a. Fig. 132. Angulus, intra quem continetur Curva Iſochrona in hypotheſi directionum convergentium, determinatur, ſi ſuper AC, hoc eſt recta inter locum A, unde

Tab. XIV. a. *Fig.* 132. de descensus incipit, & Centrum Telluris C interjecta, describatur semicirculus; & in B, ubi Curva axem tangit, erigatur perpendicularis BD, factaque BE = BA ducatur ex C rectæ ED parallela CF perpendiculari BD ultra semicirculum continuatæ in F occurrens: est enim ACF angulus quæsitus, consequenter arcus AG ex centro C radio CA descriptus curvæ construendæ sufficit. Etenim AB:BD = BD:BC (§. 327 *Geom.*). Quare AB ad BD in ratione subduplicata AB ad BC (§. 216, 159 *Arithm.*), seu AB : BD = √AB:√BC; consequenter √BC:√AB = BD : AB aut BE (§. 169 *Arithm.*). Quoniam, FC parallela ipsi DE *per construct.* erit BD : BE = BF : BC (§. 268 *Geom.*), adeoque √BC : √AB = BF : BC (§. 167 *Arithm.*). Est vero etiam BF:BC = Sin. BCF. Sin. CFB (§. 33 *Trig.*) = Sin. ACG : Cosin. ACG. Ergo Sin. ACG: Cos. ACG = √BC : √AB (§. 167 *Arithm.*). Est igitur ACG angulus quæsitus.

Quodsi super AH = ½ AC semicirculus AIH describatur, & in B perpendicularis excitetur, ductisque AI & IH fiat IK = AL = ¼ AB & LO = KA, erit O punctum axis, cui punctum flexus contrarii respondet. Est enim AB: AI = AI : AH sive ½ AC (§. 330 *Geom.*), adeoque AI = √½AC. AB (§. 377 *Geom.*). Quare cum angulus AIK sit rectus (§. 317 *Geom.*), erit $AK = \sqrt{(\frac{1}{2}AC.AB + \frac{1}{16}AB^2)}$. Et quia LB = ¾AB & LO = AK *per construct.* erit $BO = \sqrt{(\frac{1}{2}AC.AB + \frac{1}{16}AB^2)} - \frac{3}{4}AB$. Quare in O est punctum axis, quod puncto flexus contrarii respondet.

SCHOLION I.

337. *Atque ita Calculo analytico eruimus præcipuas Curvæ Isochronæ proprietates in hypothesi directionum convergentium, quæ præsenti instituto inserviunt. Constat enim, quomodo sit construenda, supposita quadratura curvæ cujusdam per parabolam construendæ & quadratura circuli. Constat præterea, quænam sint puncta, quibus ductus curvæ determinatur, nempe quod in* B *axem tangat, eique convexitatem obvertat, punctum* O *respondeat flexui contrario, ita ut curva portioni axis* OC *concavitatem obvertat, in* C *denique eadem cum axe concurrat: tota autem intra angulum* ACG *contineatur. Quoniam tamen curva ista & rectificabilis, & quadrabilis est, quadraturam & longitudinem in Corollariis determinare libet.*

COROLLARIUM I.

338. Quoniam $Mm = dx\sqrt{x}$ (§. 336) $= x^{1:2}dx$, erit arcus curvæ $BM = \frac{2}{3}x^{3:2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Sed $x = v + 1$ (§. *cit.*). Ergo $BM = (\frac{2}{3} + \frac{2}{3}v)\sqrt{(v+1)} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{AP.\sqrt{AP.}}{AB} - \frac{2}{3}AB$. Quare si super AP describatur semicirculus & erecta in B perpendiculari BC & in D (est autem AD = ⅔ AP) perpendiculari DE ducatur recta AE occurrens ipsi DE in E, tandemque ex EA resecetur EG = ⅔ AB: erit AG longitudo arcus. Est enim AP : AC = AC : AB. (§. 330 *Geom.*), adeoque AC = √ AP, ob AB = 1. Porro, cum ED ipsi BC parallela (§. 256. *Geom.*), AB : AC = AD : AE (§. 268 *Geom.*). Ergo $AE = \frac{AD.\ AC}{AB} = \frac{2}{3}\frac{AP.\sqrt{AP.}}{AB}$ Quare cum GE = ⅔ AB, *per constr.* erit utique recta AG arcui curvæ æqualis. Tab. XIV. a. *Fig.* 131. Tab. XIII. *Fig.* 133.

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. XIV. a. Fig. 131. 339. Quoniam Elementum areæ est sector infinite parvus $CmR = mR. \frac{1}{2} CR = v^{1:2} dv (\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v)$ (§. 336) $= \frac{1}{2} cv^{1:2} dv - \frac{1}{2}v^{3:2} dv$; erit area BMC $= \frac{1}{3}cv^{3:2} - \frac{1}{5}v^{5:2} = (\frac{1}{3}cv - \frac{1}{5}v^2) \sqrt{v} = (5cv - 3v^2) \sqrt{v} : 15 = \frac{(5CB.BP - 3BP^2)\sqrt{BP}}{15AB}$, ob AB $= 1$. Quodsi fiat $v = c$, erit area integra $= (5c^2 - 3c^2)\sqrt{c} : 15 = \frac{2}{15}c^2 \sqrt{c} = \frac{2}{15}BC^2 \sqrt{BC} : AB$, denuo ob AB $= 1$.

SCHOLION II.

340. *Quoniam* v = BP, *& area curvæ incipit in puncto* B, *non opus est, ut de quantitate adjicienda solliciti simus. Sed cum in Corollario primo origo ipsius* x *in* A, *curva autem in* B: *ideo pro* x *substitui debebat* v *ut constaret de quantitate adjicienda.*

COROLLARIUM III.

341. Si CM ad PM perpendicularis (§. 38 *Anal. infinit.*) fiat infinite magna, erit ea axi AC parallela & PM arcus, itidemque alter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrit (§. 82, 256 *Geom.*). Quare cum x sive AP, intuitu infinitæ b sive AC, $= 0$; erit $b - x = b$, adeoque æquatio $y = \int \frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x}$ (§. 336) degenerat in sequentem $y = \int bdx \sqrt{(x-1)} : b = \int dx \sqrt{(x-1)}$; qui est casus *Leibnitianus* (§. 334).

SCHOLION III.

342. *Cum Centrum Terræ ingenti admodum intervallo distet, & altitudines in quibus gravium descensus nobis usui esse potest, respectu illius distantiæ, sint admodum exiguæ; casus directionum parallelarum praxi satisfacit, qui etiam ob faciliorem curvæ descriptionem sese commendat* (§. 334 Mech. & §. 581 *Analys.*). *In illo igitur acquiescere poteramus, nisi nobis quoque propositum esset speciminibus illustribus docere, quomodo principiis Mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in solvendis Problematis arduis sit utendum, & quo ordine ratiocinia sint concatenanda ut non perturbato animi statu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget de solutione generali Problematis in duplici hypothesi hactenus considerati nonnulla addere. Nimirum solvimus Problema de curva Isochrona in hypothesi accelerationis* Galilæana, *propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea capere licet, satisfacit, ita ut in locum hypotheseos naturæ quoad nos surrogari possit* (§. 85 & seqq.). *Enim vero cum aliæ quoque hypotheses non sint impossibiles, atque Geometræ sit Problema in omni hypothesi solvere, quamdiu ignoratur quænam illarum sit hypothesis naturæ; ut ostendamus restat quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem adeo solutionem hic inprimis admittimus, in usum Artis inveniendi; ut appareat progressus a solutionibus particularibus ad generales.*

PROBLEMA XLIX.

343. *Invenire Curvam Isochronam in quacunque accelerationis hypothesi.*

RESOLUTIO.

Quodsi acceleratio alia statuatur, quam quæ in hypothesi *Galilæana* obtinet, directionibus parallelis manentibus, Curvæ Isochronæ BMC accedat curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem descripta, cujus semiordinatæ PN, GE exprimunt celeritates per abscissas iisdem respondentes AP, AG acquisitas. Tab. XIV. a. Fig. 134.

Sit itaque AP $= x$, PM $= y$, PN $= v$, repe-

Tab. XIV. a. Fig. 134. reperitur; eodem prorsus quo supra (§. 334) modo, $Mm = vdx$, ut adeo habeamus

$$dx^2 + dy^2 = v^2\, dx^2$$
$$dy^2 = v^2\, dx^2 - dx^2$$
$$dy = dx\sqrt{(v^2 - 1)}$$

Quodsi jam sit $v = \sqrt{x}$, quemadmodum in hypothesi *Galilæana*: prodibit $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$, prorsus ut supra (§. *cit.*). Solutio itaque particularis convertitur in universalem, aut potius specialis in generalem, si pro $\sqrt{x}$ pones v, id quod regulis Logicis, quas stabilivimus, ad amussim congruit (§. 710 *Log.*).

Tab. XIV. a. Fig. 135. Quodsi magis arriserit ope loci sollicitationum centralium, seu Scalæ gravitatis IQO Problema solvere; pari facilitate idem præstatur. Accedat enim porro ad Curvam Isochronam BMC & curvam celeritatum ANE, Scala sollicitationum centralium IQO; & sit communis abscissa AP in altitudine acceleratrice $AP = x$, $PM = y$, $PN = v$, $PQ = g$; erit $v^2 = 2\int gdx$ (§. 113). Quare si pro v^2 hunc valorem substituas, prodibit $dy = dx\sqrt{(2\int gdx - 1)}$. Quodsi jam supponas, quemadmodum id obtinet in hypothesi *Galilæana* (§. 112), gravitatem constantem, quæ adeo sit ut 1; erit $dy = dx\sqrt{(2\int dx - 1)} = dx\sqrt{(2x - 1)}$, vel, cum hic sola ratio attendatur, minime autem magnitudo absoluta, $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$, ut supra (§. 334).

SCHOLION.

344. *In Curva Isochrona tempora descensus sunt ut altitudines per quas descenditur* (§. 332). *Inveniri autem possunt etiam Curvæ aliæ, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque constantem vel quomodocunque assignabilem habet. Quamobrem, in gratiam Artis inveniendi, solutionem Problematis generalem apponimus, sub quo Curva Isochrona tanquam casus particularis continetur.*

PROBLEMA L.

345. *Invenire Curvam, in qua grave descendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem per quam descendit relationem datam; seu ut tempora descensus habeant inter se relationem ex datis altitudinibus dato modo assignabilem; suppositis quacunque accelerationis lege, & directionibus sive parallelis, sive convergentibus.*

RESOLUTIO.

Non differt resolutio Problematis præsentis a resolutione præcedentis, Tab. XIV. a. Fig. 136.
nisi quod circa axem communem describatur, præter curvam descensus BMC, curva celeritatis ANE, etiam curva temporis ASH. Nimirum grave in curva BMC ea lege descendit, ut in M sit celeritas ut semiordinata PN, tempus vero ut PS.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PS = t$, $PM = y$; erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, itemque, ob suppositum per Mm motum æquabilem, vdt, ut supra (§. 334),

Habes

Tab. XIV. a. *Fig.* 136. Habemus itaque $vdt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$$v^2 dt^2 = dx^2 + dy^2$$

$$v^2 dt^2 - dx^2 = dy^2$$

$$dy = \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)}$$

$$y = \int \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)}$$

Quod si ergo, in dato casu speciali, v exprimatur per x & dt per dx, prodit æquatio curvæ descensus respondens.

Sit ex.gr. $v = \sqrt{x}$ & $t = x$, quemadmodum in Curva Isochrona, supposita accelerationis lege *Galilæana*; erit $dt = dx$, adeoque $y = \int \sqrt{(xdx^2 - dx^2)} = \int dx \sqrt{(x - 1)}$, ut suprà (§. 334).

Quod si quis in casu directionum convergentium Problema resolvere velit, non novo calculo opus est, sed in æquatione prima paulo ante (§. 336) inventa, pro $x\, dx^2$ substitui debet $v^2 dt^2$: quo facto habemus

$$v^2 dt^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2}$$

$$v^2 b^2 dt^2 = b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2$$

$$\frac{v^2 b^2 dt^2 - b^2 dx^2}{(b - x)^2} = dy^2$$

$$dy = \frac{b \sqrt{(v^2 dt^2 - dx^2)}}{b - x}$$

Quod si etiam hic, in dato casu speciali, v & t per x determinentur, æquatio curvæ descensus prodit.

Ex. gr. Sit ut ante $v = \sqrt{x}$, $t = x$, quemadmodum pro Curva Isochrona supposuimus; erit

$$dy = \frac{b\sqrt{(xdx^2 - dx^2)}}{b - x} = \frac{bdx \sqrt{(x - 1)}}{b - x},$$

ut supra (§. 336).

SCHOLION.

346. *Ubi adeo Problema in casu particulari solutum, veluti in casu* LEIBNITII, *non difficilis est solutio universalis, quamcunque universalitatem eidem donare volueris: id quod etiam in aliis Problematis similiter obtinet. Enimvero ubi solutio generalis ad casum specialem applicanda, plus difficultatis oritur; quatenus nempe formulæ, quæ per substitutionem prodeunt, vel summandæ, vel ad quadraturas aut rectificationes simpliciorum curvarum reducendæ. Atque ea ratio est, cur Geometræ eminentes Artem inveniendi sive Analysin promoturi parum solliciti fuerint de solutionibus generalibus, modo particulares dare possent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.*

DEFINITIO XXXVIII.

347. *Curva Isochrona paracentrica* dicitur, per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiam *Curva accessus & recessus æquabilis*. Tab. XIV. b. *Fig.* 137.

Sit BMC curva quæsita, D punctum fixum in axe datum, DM esse debet ut tempus descensus ab A in M.

SCHOLION.

348. *Problema de Curva Isochrona paracentrica invenienda primum propositum est a* LEIBNITIO (*a*); *sed cum solutu difficilius sit priore, dudum intactum reliquerunt Geometræ, donec tandem solutionem daret* Jacocobus BERNOULLI (*b*), *& simul solutiones* LEIBNITII *Fratrisque* Joannis (*c*) *eliceret. Generalius deinde idem Problema solvit* VARIGNONIUS (*d*). *Lubet hic dare solutionem præcedenti, quantum licet, affinem.*

PROBLEMA LI.

349. *Invenire Curvam Isochronam paracentricam.*

RESO-

(*a*) In *Actis Erudit.* A. 1689. p. 198.
(*b*) In *Actis Erudit.* A. 1694. p. 277.
(*c*) Ibid. p. 371. 394.
(*d*) In *Comment. Academ. Reg. Scient.* A. 1699. p. 9. & seqq.

RESOLUTIO.

Tab. XIV.b. *Fig.* 137. Sit A punctum, unde descensum inchoat grave; D punctum, a quo vel recedit, vel ad quod accedit, prout casus tulerit. Radio AD describatur semicirculus ANF, ductisque ad punctum curvæ M rectis DM & *Dm* infinite propinquis, agantur ad axem normales NQ & PM, itemque *nq*, quæ erit ipsi NQ infinite propinqua. Ducatur NT tangens circulum in N (§. 38 *Anal. infin.*) & *n*O normalis ad NQ, tandemque radio DM arculus MR ex centro D.

Sit jam DN = DA = DF = a, DQ = z, DM = t, erit mR = dt, Qq = nO = dz, & QN = $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quæratur jam, ut in Problemate anteriore de Curva Isochrona (§. 334 & 336) arcus Mm duplici modo, nempe 1°. ex principiis pure Geometricis, 2°. & ex principiis Mechanicis, seu conditione Problematis.

I. Quoniam TN circulum tangit in N, *per construct.* angulus TND rectus est (§. 38. *Anal. infinit.*), adeoque △ DNQ ∽ △QNT, seu angulus DNQ = QTN (§. 329 *Geom.*). Sed, ob parallelismum rectarum nO & QT (§. 256 *Geom.*) angulus OnN = QTN (§. 233 *Geom.*). Ergo OnN = DNQ (§. 87 *Arithm.*). Quare cum DQN & nON sint recti, *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$\text{NQ} : \text{DN} = n\text{O} : \text{N}n$$
$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = dz :$$
$$\text{Ergo N}n = adz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$$

Tab. XIV.b. Fig. 137. Porro ob sectores DnN & DRM similes (§. 138, 412 *Geom.*)

$$\text{DN} : \text{N}n = \text{DM} : \text{MR}$$
$$a : \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = t :$$
$$\text{Ergo MR} = tdz : \sqrt{(a^2 - z^2)}$$
$$\text{Hinc MR}^2 = t^2 dz^2 : (a^2 - z^2)$$
$$\text{Sed } m\text{R}^2 = dt^2$$

$$\text{Ergo M}m^2 = \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2$$
$$= \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum Mm æquabilis supponitur, erit spatium Mm in ratione composita temporis & celeritatis in M acquisitæ (§. 34). Sed tempus est ut mR sive dt (§. 347), & celeritas in M acquisita in hypothesi *Galilæana* seu gravitatis constantis ut $\sqrt{}$AP (§. 87). Ergo Mm = dt. $\sqrt{}$AP. Est vero, ob parallelas QN & PM (§. 268 *Geom.*)

$$\text{DN} : \text{DQ} = \text{DM} : \text{DP}$$
$$a : z = t :$$
$$\text{Ergo DP} = tz : a$$
$$\text{AP} = \text{AD} + \text{DP}$$
$$= a + tz : a$$
$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

Unde Mm = dt. $\sqrt{}$ AP, *per demonstr.*

$$= dt.\ \sqrt{(a^2 + tz)} : \sqrt{a}$$
$$\text{M}m^2 = \frac{a^2 dt^2 + tzdt^2}{1 . a}$$

hoc est, sumta a pro unitate,

$$\text{M}m^2 = \frac{a^2 dt^2 + tzdt^2}{a^2}$$

Habe-

Tab. XIV.b. *Fig.* 137.

Habemus itaque

$$\frac{a^2dt^2+tzdt^2}{a^2} = \frac{a^2dt^2 - z^2dt^2 + t^2dz^2}{a^2-z^2}$$

$$a^4dt^2 + a^2tzdt^2 - a^2z^2dt^2 - tz^3dt^2 = a^4dt^2 - a^2z^2dt^2 + a^2t^2dz^2$$

$$a^2tzdt^2 - tz^3\,dt^2 = a^2t^2dz^2$$

$$dt\sqrt{(a^2z - z^3)} = adz\sqrt{t}$$

$$\overline{}\ \sqrt{a}$$

$$dt\sqrt{(a^3z - az^3)} = adz\sqrt{at}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3z-az^3)}}$$

h.e. $a^{-1:2}t^{-1:2}dt = adz:\sqrt{(a^3z\ \ az^3)}$

$$2a^{-1:2}t^{1:2} = a\int(dz:\sqrt{(a^3z-az^3)})$$

$$\overline{}\ a$$

$$2a^{1:2}t^{1:2} = a^2\int(dz:\sqrt{(a^3z-az^3)})$$

Atque hæc est æquatio, quam dedit LEIBNITIUS pro Curva Isochrona paracentrica (*a*). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2\int(dz:\sqrt{(a^3z-az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis absolute summari nequit. Dari autem potest constructio, sive per quadraturam, sive per rectificationem alicujus curvæ. Dabimus primo constructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3dz:\sqrt{(a^3z-az^3)}$ est elementum areæ, erit semiordinata $v = a^3:\sqrt{(a^3z-az^3)}$ (§. 98 *Anal. infinit.*)

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$v = \infty$$

erit $\sqrt{(a^3z - az^3)} = 0$

$$a^3z - az^3 = 0$$

$$a^2 - z^2 = 0$$

$$z = a$$

Quando itaque z fit a, hoc est, DQ degenerat in DC, semiordinata CR fit infinita. Est adeo CR asymptotus curvæ.

Tab. XIV.a. *Fig.* 138.

(*a*) In *Actis* loc. cit. p. 371. & 372.

Tab. XIV.b. *Fig.* 138.

Fiat $z = 0$

erit $v = \frac{a^3}{0}$

Quare ubi z fit o, seu evanescit, semiordinata DS est Asymptotus curvæ. Quoniam $v = a^3(a^3z - az^3)^{-1:2}$

erit

$$dv = -\tfrac{1}{2}a^3(a^3z-az^3)^{-3:2}(a^3dz-3az^2dz)$$

Si jam fiat $dv = 0$,

erit

$$-\tfrac{1}{2}a^3(a^3z-az^3)^{-3:2}(a^3dz-3az^2dz = 0$$

$$a^3dz = 3az^2dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = z$$

Quando itaque $DQ = \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analys. infin.*)

Quoniam $v = \frac{a^3}{\sqrt{(a^3z-az^3)}} = \frac{a^3}{\sqrt{(a^2-z^2)}\sqrt{az}}$

erit $\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$

$$\sqrt{(a^2-z^2)} : \frac{a^2}{\sqrt{az}} = a : v$$

Est vero $\sqrt{az}$ semiordinata GQ parabolæ DGB, cujus parameter $= a$ & abscissa DQ$=z$ (§. 392 *Anal.*) & $\sqrt{(a^2-z^2)}$ semiordinata QF circuli AFC radio DA $= a$ descripti (§. 377 *Anal.*). Curva igitur quadranda ita construitur. Circa communem axem AC describatur semicirculus AFC radio AD$=a$, & parabola DGB cujus vertex in D centro semicirculi, parametro a radio semicirculi æqua-

Tab. XIV.b. Fig. 138. æquali. Fiat deinde DI = GQ & DO = DA, itemque DL = QF, ductisque OK ipsi AI & KT ipsi LO parallelis; erit DT = QN. Est enim.

$$DI : DA = DO : DK$$

$$\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

$$DL : DO = DK : DT$$

$$\sqrt{(a^2-z^2)} : a = \frac{a^2}{\sqrt{az}} : \frac{a^3}{\sqrt{(a^2-z^2)}\sqrt{az}}$$

Demisso itaque ex T perpendiculari TN ad QN; punctum N est in curva quæsita. Quod si tandem spatio SDQNH fiat æquale rectangulum ADZV, erit ob $AD = a$, $DZ = a^2 \int (dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$.

Habemus ergo $DZ = 2\sqrt{at}$

$$\tfrac{1}{4}DZ^2 = at$$

$$\frac{DZ^2}{4a} = t$$

Unde rectæ t, quibus puncta in Isochrona paracentrica determinantur, facile inveniuntur. Nimirum fiat $Db = \frac{1}{4}DZ$ & ducatur bc ipsi ZA parallela; erit (§. 268 *Geom.*) $DA : DZ = Db : Dc$, consequenter $Dc = t$. Quare si ex centro D radio Dc describatur arcus secans DN in M; erit punctum M in isochrona paracentrica.

Tab. XIV.b. Fig. 137.

Videamus jam porro, quomodo summatio formulæ $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\int adz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$ reducatur ad rectificationem arcus cujusdam. Quoniam $adz : \sqrt{(a^2 z - z^3)}$ est elementum arcus, *per hypoth.* erit

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectificandæ dx & dy per z dari debent, quadratum $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ seu ejus multiplum dividendum est in duo alia, quorum latera, si fieri potest, sunt summabilia. Quamobrem cum numerator $a^2 dz^2$ debeat esse aggregatum duorum quadratorum, evidens est requiri, ut quadrata non modo diversa habeant signa, verum etiam tales denominatores, qui in se invicem ducti producunt $a^2 z - z^3$. Enimvero cum $a^2 z - z^3$ in istiusmodi factores resolvi nequeat, fieri autem id possit, si mutetur, in $a^2 z^2 - z^4$, cum tunc factores sint $az + z^2$ & $az - z^2$ (§. 86 *Anal.*); fractio $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ ducatur in z ut habeatur $a^2 z dz^2 : (a^2 z^2 - z^4)$. Quare si laterum numeratores dicantur interea q & w; erunt latera $qdz : \sqrt{(az + z^2)}$ & $wdz : \sqrt{(az - z^2)}$. Ex differentiandi regulis constat, fore latera summabilia, si fiat $q = \frac{a + 2z}{2}$ & $w = \frac{a - 2z}{2}$, adeoque ipsa latera fiant $\frac{(a + 2z)\, dz}{2\sqrt{(az + z^2)}}$ & $\frac{(a - 2z)\, dz}{2\sqrt{(az - z^2)}}$.

Videamus itaque, an quadratorum summa $= \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$. Quoniam itaque

$$dx = \frac{(a+2z)\,dz}{2\sqrt{(az+z^2)}} \;\&\; dy = \frac{(a - 2z)\,dz}{2\sqrt{(az - z^2)}}$$

erit $dx^2 = \frac{(a^2 + 4az + 4z^2)\, dz^2}{4az + 4z^2}$ & $dy^2 = \frac{(a^2 - 4az + 4z^2) dz^2}{4az - 4z^2}$, seu reductione

ad

ad eandem denominationem facta: $dx^2 = (4a^3z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$ & $dy^2 = (4a^3z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)dz : (16a^2z^2 - 16z^4)$, adeoque $dx^2 + dy^2 = 8a^3zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^3dz^2 : (2a^2z - 2z^3)$, seu multiplum quadrati dividendi, consequenter $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz\sqrt{a^3} : \sqrt{(2a^2z - 2z^3)}$.

Est vero $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}}$

$$\frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}}$$

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}}$$

$$\frac{at^{-1:2}dt}{\sqrt{2a}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} = dv$$

$$\frac{2at^{-1:2}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2at} = v$$

$$2at = v^2$$

$$t = v^2 : a$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipsius t inveniri potest; pro construenda Curva Isochrona paracentrica prius construi debet curva, in qua altera coordinata est $\sqrt{(az + z^2)}$ seu semiordinata hyperbolæ æquilateræ, cujus axis transversus $= a$, abscissa $= z$ (§. 507 *Analys.*), altera $\sqrt{(az - z^2)}$, seu semiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abscissa $= z$.

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$$x = \sqrt{(az + z^2)} \qquad y = \sqrt{(az - z^2)}$$

erit $x^2 = az + z^2 \qquad y^2 = az - z^2$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + az + z^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} = \tfrac{1}{2}a + z$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

$$az = a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$az - z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$y^2 =$$

$$y^2 + x^2 + a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^2x^2 + a^4$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 = 2a^2x^2 - x^4$$

Est itaque curva tertii generis (§. 382 *Analys.*).

Fiat $x = 0$

erit $y^4 + 2a^2y^2 = 0$

$$y = 0$$

Fiat $y = 0$

erit $2a^2x^2 - x^4 = 0$

$$2a^2 = x^2$$

$$\sqrt{2a^2} = x$$

In vertice ergo D est origo utriusque indeterminatæ x & y. Quando ergo $DG = x = \sqrt{2a^2}$, semiordinata y evanescit, adeoque curva secat axem in G. Tab. XIV. b. Fig. 139.

Porro si æquatio differentietur, erit

$$4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

Quare si fiat $dy = 0$, erit

$$4y^2xdx = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

quæ est maxima applicata (§. 63 *Analys. infinit.*). Quoniam vero

 $\sqrt{(a^2}$

Tab. XIV.b. Fig. 139. $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ est semiordinata circuli HI (§. 377 *Anal.*), maxima applicata cadit in I, ubi circulus ex centro D radio DN $= a$ descriptus curvam secat.

Ponatur in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipsius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habemus

$$a^2 - x^2 = 2a\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$
$$2a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$
$$a = \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$
$$a^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\tfrac{3}{4}a^2 = x^2$$
$$x = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = DH$$

Quodsi ponamus abscissarum originem in G & GQ $= v$, erit DQ $= x = b - v$, adeoque æquatio, ob $b = \sqrt{2a^2}$, in hanc degenerat:

$$b^2(b-v)^2 - (b-v)^4 = y^4 + 2y^2(b-v)^2 + b^2y^2$$

Fiat jam $v > b$, e. gr. $= \frac{3}{2}b$

erit $b - v = b - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2}b$

$$(b - v)^2 = \tfrac{1}{4}b^2$$
$$(b - v)^4 = \tfrac{1}{16}b^4$$

consequenter

$$\tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{16}b^4 = y^4 + \tfrac{1}{2}b^2 y^2 + b^2 y^2$$

h. e. $\frac{3}{16}b^4 = y^4 + \frac{3}{2}b^2 y^2$

Cum itaque valor ipsius y non fiat imaginarius, etiamsi v seu GQ sumatur major quam GD, seu axe curvæ GIFDIG; curva ultra D continuatur, adeoque se mutuo secant partes in D, hoc est, curva nodum in D habet. Ex constructione autem patet, partem inferiorem fore priori similem.

Ut determinetur angulus, sub quo curva axem in D secat, investiganda est, ut supra (§. 336), ratio laterum infinite parvorum Dq & qf. Quodsi enim Df sumatur pro situ toto, fq sinus, Dq cosinus anguli quæsiti. Quodsi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genetricium abscissa sumatur dz, semiordinata hyperbolæ erit $\sqrt{(adz + dz^2)}$ (§. 507 *Analys.*), circuli vero $\sqrt{(adz - dz^2)}$ (§. 377 *Analys.*), hoc est, cum dz^2 differentiale secundi gradus respectu primi adz evanescat, utrobique $= \sqrt{adz}$. Quoniam itaque per constructionem Dq est semiordinata hyperbolæ & qf semiordinata circuli; erit ad verticem $qf = q$D, adeoque qDf angulus curvæ cum axe semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus curvæ rectus est.

Potest idem etiam aliis modis ostendi. Nimirum

$$qD = dx = \frac{(a+2z)dz}{2\sqrt{(az+z^2)}}$$
$$qf = dy = \frac{(a-2z)dz}{2\sqrt{(az-z^2)}}$$

Sed in casu instantis evanescentiæ, z fit dz. Quare si pro z substituatur dz, erit

$$qD = \frac{adz + 2dz^2}{2\sqrt{(adz + dz^2)}}$$
$$qf = \frac{adz - 2dz^2}{2\sqrt{(adz - dz^2)}}$$

Est vero dz^2 respectu $adz = 0$. Ergo per ea, quæ modo diximus,

$$qD = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{adz}$$
$$qf = \frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{adz}$$

Ergo qD $= qf$, ut ante.

Idem inveniri debet, si in æquatione differentiali ad curvam pro x substituatur

Tab. XIV.b. Fig. 139. tur dx & pro y ponatur dy. Æquatio enim $a^2xdx - x^3 dx = y^3 dy + x^2ydy + a^2ydy$ facta substitutione in sequentem degenerat :

$$a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + dx^2 dy^2 + a^2dy^2.$$

Quare sit $dx^4 = 0$, $dy^4 = 0$, $dx^2dy^2 = 0$ erit $a^2 dx^2 = a^2 dy^2$

$$dx^2 = dy^2$$
$$dx = dy$$

hoc est, $qD = qf$, ut ante.

Immo potest etiam in æquatione ad curvam $2a^2x^2 - x^4 = y^4 + 2y^2 x^2 + 2a^2 y^2$ pro x substitui dx & in locum ipsius y surrogari dy: quo facto habemus,

$$2a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2 dy^2 dx^2 + 2a^2dy^2$$

Sed $dx^4 = 0$, $dy^4 = 0$, $2dy^2 dx^2 = 0$

Ergo $2a^2dx^2 = 2a^2dy^2$

$dx = dy$, ut ante.

Ut tandem etiam intelligatur natura Isochronæ paracentricæ, cum pro ea sit,

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} = dv$$

seu $t = v^2 : 2a$,

si fiat $dz = 0$

erit $dv = 0$

adeoque $t = 0$

Curva itaque axem in D secat.

Ex ipsa autem constructione apparet, si $DQ = z$ fiat $= a$, seu DN, rectam DM in O cadere, atque adeo curvam axem ibidem secare, ultra eum ex altera parte continuandam. Est vero tum $v = DFIG$, adeoque $DO = (DFIG)^2 : 2a$.

Patet idem ex valoribus x & y. Etenim si sit,

$z = a$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)}$

$= \sqrt{2a^2} = DG$

& $y = \sqrt{(az - z^2)}$

$= \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$

adeoque $DO = t = v^2 : 2a$

$= (DFIG)^2 : 2a$

Habemus hinc

$DO : DFIG = DFIG : 2a$

Quoniam vero curva Isochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, se mutuo in O partes secant.

SCHOLION.

350. *Poterat quoque Problema præsens ad modum præcedentis variis modis universalius resolvi, nimirum in quacunque gravitatis hypothesi, cum in solutione* Galilæanam *supposuerimus, sumentes celeritatem acquisitam in ratione subduplicata altitudinis. Sed non opus est, ut istiusmodi solutionibus immoremur.*

DEFINITIO XXXIX.

351. *Curva Tautochrona* dicitur, in qua mobile per quoscunque arcus eodem tempore descendit.

COROLLARIUM.

352. Quoniam descensus per Cycloidem & quemcumque ejus arcum sunt æquidiuturni (§. 311); Cyclois Curva Tautochrona est (§. 351).

PROBLEMA LII.

353. *Determinare tempus descensus per curvam, in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones supponantur parallelæ, sive convergentes.*

Tab. XIV.b. *Fig.* 140.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AP, per quam defcendit grave, AMB curva defcenfus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquifita, C centrum gravium. Radiis CM & Cm infinite propinquis defcribantur arcus PM & pm, fitque AP $= x$, PM $= y$: erit Pp $=$ MR $= dx$, Rm $= dy$, adeoque Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quoniam motus per M æquabilis, erit Mm $= dt$. PN (§. 34); confequenter

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dt.\ \text{PN}$$

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\text{PN}}.$$

Si punctum C infinite diftet, arcus PM & pm evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodfi, ex hypothefi gravitatis fpeciali, fubftituatur valor ipfius PN, five celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypothefi. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam fubftituatur valor ipfius y per x; prodibit tempus in cafu fpeciali dato.

In hypothefi *Galilæana*, PN $= \sqrt{x}$, five, fi parameter parabolæ quæ curva celeritatum ANR, fuerit a, PN $= \sqrt{ax}$ (§. 87). Ergo tempus per Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$, adeoque $dt^2 = (dy^2 + dx^2) : ax$.

Sit jam curva defcenfus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AQ; erit, in hypothefi directionum parallelarum, AQ $=$ PM $= y$, QM $=$ AP $= x$, adeoque (§. 388 *Analyf.*).

$$x^2 = ay$$

$$2xdx = ady$$

$$4x^2dx^2 : a^2 = dy^2$$

Tab. XIV.b. *Fig.* 140.

$$\text{Ergo } dt^2 = \frac{(4x^2dx^2 + a^2dx^2) : ax}{a^2}$$

$$= \frac{(4x^2 + a^2)\, dx^2}{a^3 x}$$

$$dt = \frac{dx\sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{a^3 x}}$$

Quoniam $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri. Elementum arcus parabolici Mm $= dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a$ (§. 146 *Anal. infin.*) dividendo per celeritatem in M acquifitam $= \sqrt{ax}$.

Eft igitur $t = \int (dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a\sqrt{ax})$ $=$ PO.

Quodfi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum conftrui debet, dividendo fpatium APN per quantitatem conftantem a; erit Elementum illius curvæ PNnp $= dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$.

Quare cum fit Pp $= dx$; erit femiordinata ejus PN $= \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$, feu, fi $a = 1$, PN $= a\sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$. Eft vero $\sqrt{ax}$ femiordinata parabolæ, cujus abfciffa AP $= x$, parameter $= a$ (§. 392 *Analyf.*); $\sqrt{(4x^2 + a^2)}$ abfciffa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis tranfverfus $= 2a$, femiordinata $= 2x$ (§. 147 *Anal. infin.*). Curva igitur, a cujus quadratura pendet conftructio curvæ temporum, ita conftruitur. Circa communem axem AX conftruatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§. 472 *Analyf.*), cujus centrum in C, axis dimidius AC $= a$, qui fimul parabolæ AMT parameter. Ducta femiordinata parabolæ PM,

Tab. XIV.b. *Fig.* 141.

Tab. XIV.b. Fig. 141. PM, fiat $CQ = 2AP = 2x$, erit ex Q erecta ad CQ perpendiculari $QO = \sqrt{(4x^2 + a^2)}$. Ducatur TF parallela ipsi CX per punctum M, & AH parallela ipsi QG, erit $TL = CA = a$ & $TC = PM = \sqrt{ax}$. Fiat $TG = QO = \sqrt{(4x^2 + a^2)}$ & ducatur FG parallela ipsi LC, erit (§. 268 *Geom.*)

$$TC : TL = TG : TF$$
$$\sqrt{ax} : a = \sqrt{(4x^2 + a^2)} :$$
$$TF = \frac{a\sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{ax}}$$

Quod si ergo MP continuetur in N, donec $PN = TF$, erit punctum N in curva per cujus quadraturam curva temporum construi debet.

Si curvæ temporum constructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$dx\,\frac{\sqrt{(a^2 + 4x^2)}}{a\sqrt{ax}} = \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$$

erit $\frac{a^2dx^2 + 4x^2 dx^2}{a^3x} = dz^2 + dy^2$

Fiat jam $dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$

$$dy^2 = \frac{4x^2dx^2}{a^3x}$$
$$= \frac{4xdx^2}{a^3}$$

erit $a^{-1:2} x^{-1:2} dx = dz$

$$2a^{-1:2} x^{1:2} = z$$
$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = z$$
$$dy = 2x^{1:2} a^{-3:2} dx$$
$$y = \tfrac{4}{3} x^{3:2} a^{-3:2}$$
$$= \frac{4x\sqrt{x}}{3a\sqrt{a}}$$

Si sit $a = 1$; erit

$$z = 2\sqrt{ax} \qquad y = \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$$
$$z^2 = 4ax \qquad \tfrac{9}{16}ay^2 = x^3$$

Æquatio prima est ad parabolam *Apollonianam* (§. 388 *Anal.*) cujus parameter $4a$, abscissa x, semiordinata z: altera vero ad parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{9}{16}a$, abscissa ad parabolam externam relata $= x$, semiordinata $= y$, seu abscissa $= y$, semiordinata $= x$ (§. 519 *Analys.*) Construenda igitur est parabola, parametro $4a$, AMR (§. 393 *Anal.*) & alia secundi generis, cujus parameter $\frac{9}{16}a$, ANT (§. 581 *Analys.*): erit $PM = z$ abscissa, $PN = AQ = y$ semiordinata curvæ, a cujus rectificatione pendet constructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, substituatur in æquatione $x^3 = \frac{9}{16}ay^2$ valor ipsius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus, erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam (Tab. XIV.b. Fig. 142.)

$$\frac{z^6}{64a^3} = \tfrac{9}{16}ay^2$$

adeoque $z^6 = 36a^4y^2$

quæ est curva quinti generis (§. 382 *Analys.*) ex familia parabolarum, seu paraboliformium (§. 519 *Analys.*).

Sit DMA quadrans circuli, cujus radius $CA = a$, $CP = x$, erit $Mm = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 153 *Anal. infin.*), adeoque $dt = adx : \sqrt{(a^2 - x^2)}\sqrt{ax}$, quod elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda Curva Isochrona paracentrica reperimus; Tab. XIV.a. Fig. 143.

perimus; quæ ad ejus summationem spectant, ibidem relegenda sunt.

Tab. III. Fig. 39. Sit CMD Cyclois, AOD semicirculus genitor, $DN = x$, $AD = a$, erit $AN = a - x$. Quare cum $Mm = dx\sqrt{a} : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analyſ. infin.*); erit

$$dt = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{x}}$$
$$= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$
$$= \frac{adx\sqrt{a}}{a\sqrt{(ax-x^2)}}$$
$$t = \frac{\sqrt{a.}}{a} \int \frac{adx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

Enimvero $\int (adx : \sqrt{(ax - x^2)})$ = arcui DO (§. 157 *Analyſ. infin.*). $\sqrt{a} = \sqrt{AC}$, & $a = AD$. Ergo tempus descensus per arcum MC $= \sqrt{AD}$. DO : AD.

Quodsi ergo x, sive DN, degeneret in a, sive AD; erit tempus descensus per semicycloidem CMD $= \sqrt{AD}$. DOA: DA.

PROBLEMA LIII.

Tab. XIV.b. Fig. 140. 354. *Determinare tempus descensus in convexitate curvæ in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones sint parallelæ sive convexæ.*

RESOLUTIO.

Sit ANR curva per quam grave descendit, $AP = x$, $PN = y$, erit $Nn = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit celeritas in P acquisita $= v$, erit ut in Probl. præced. (§. 353), si elementum temporis fuerit dt, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : v$.

In hypothesi *Galilæana*, $v = \sqrt{x}$. Ergo $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$. Quare si ex æquatione ad curvam descensus substituatur ut ibidem valor ipsius dy^2; prodibit æquatio ad curvam temporis. Tab. XIV.b. Fig. 140.

Sit ANR parabola; erit (§. 21 *Anal. infin.*)

$$adx = 2ydy$$
$$\frac{adx}{2y} = dy$$
$$dy^2 = a^2 dx^2 : 4y^2 = a^2 dx^2 : 4ax$$

Quare

$$dt = \sqrt{(dx^2 + \frac{a^2 dx^2}{4ax})} : \sqrt{x}$$
$$= \frac{dx \sqrt{(4ax + a^2)}}{\sqrt{4ax} \sqrt{x}}$$
$$= \frac{dx\sqrt{(4ax + a^2)}}{2\sqrt{ax^2}} = \frac{dx\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}}{x\sqrt{a}}$$
$$t = \int dx \sqrt{(ax + \tfrac{1}{4}a^2)} : x\sqrt{a}$$

Quare si hic valor sumitur pro spatio curvilineo per $\sqrt{a}$ diviso; erit semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)} : x$. Est vero $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter $= a$, si abscissæ a foco, cujus distantia a vertice $= \frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analyſ.*) computentur. Quare curvæ quadrandæ vertex est in foco parabolæ & assumta parametro a pro unitate, semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, est quarta proportionalis ad parabolæ abscissam a centro computatam, semiordinatam & parametrum. Sit semiordinata hujus curvæ $= v$, erit

$v =$

$$v = a\sqrt{(4ax + a^2)} : 2x$$
$$vx = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(4ax + a^2)}$$
$$v^2x^2 = a^3x + \tfrac{1}{4}a^4$$

Est igitur curva tertii generis (§. 382 *Analys.*), sed facillimæ, quemadmodum apparet, constructionis.

Quodsi constructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$, abscissa scilicet existente z, semiordinata y; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$dz^2 = \frac{4axdx^2}{4ax^2} \qquad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax^2}$$
$$= dx^2 : x \qquad = adx^2 : 4x^2$$
$$dz = x^{-1:2}dx \qquad dy = \frac{dx\sqrt{a}}{2x}$$
$$z = 2x^{1:2} \qquad y = \int\frac{dx\sqrt{a}}{2x}$$
$$= 2\sqrt{x}$$

Est vero $\sqrt{x}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter $= 1$, (§. 392 *Anal.*) & $\int\frac{dx}{x}$ spatium hyperbolicum asymptoticum, cujus latus potentiæ $= 1$ (§. 120 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis constructio, construetur, si abscissæ fiant semiordinatis parabolæ duplis, semiordinatæ autem spatiis hyperbolicis dimidiis per $\sqrt{a}$ divisis æquales, axe parabolæ existente simul asymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempora descensus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit Cyclois, & diameter circuli genitoris $= 1$, erit Nn Tab. XIV.b. Fig. 140.
$= dx : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analys. infin.*), adeoque $dt = dx : x$. Pendet adeo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120 *Analys. infin.*): Et quoniam $t = \int dx : x$, sed $\int dx : x$ logarithmus ipsius x sumtus in logarithmica, cujus subtangens $= 1$ (§. 243 *Analys. infin.*), tempus descensus per convexitatem Cycloidis etiam per Logarithmos determinari potest.

DEFINITIO XL.

355. *Curva Brachystochrona* est, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam, descendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *Curva celerrimi descensus*.

SCHOLION.

356. *Problema hoc proposuit* Joannes BERNOULLI. *Analysi suppressa Cycloidem esse monuerunt* LEIBNITIUS (*a*) & HOSPITALIUS (*b*). *Solutionem integram exhibuit* Jacobus BERNOULLI (*c*), *Methodo Synthetica ex natura descensus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam Cycloidi convenire postea ostendit.* Joannes *vero* (*d*) *ex fundamentis Dioptricis id solvit, propterea quod advertit eam eandem esse cum curvatura radii per medium uniformiter densum propagati. Equidem solutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus descensus per arculum* Mm *infinite parvum sit minimum; hoc vero sit* $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$ *in hypothesi* Galilæana (§. 354), *non alia re opus esse videbatur,*

(*a*) In *Actis Eruditorum*. A. 1697. p. 203.
(*b*) Ibid. p. 217.
(*c*) Ibid. p. 212.
(*d*) Ibid. p. 207. & seqq.

tur, quam ut ejus differentiale ponatur nihilo æquale (§.63 Analyſ. infin.). *Enimvero tentanti apparebit, ſic nos delabi ad æquationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam* Joannis BERNOULLI, *ſine ſuppoſita identitate* Brachyſtochronæ *cum curvatura radii per medium non uniformiter denſum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. XIV.b. Fig. 144. 357. *Invenire Curvam Brachyſtochronam, ſive celerrimi deſcenſus.*

RESOLUTIO.

Sint ſemiordinatæ PM, pm & Qn infinite propinquæ, & Pp = pQ; erunt arcus Mm & mn infinite parvi, & demiſſis perpendicularibus MR & m O, erectaque perpendiculari nS ipſi pm continuatæ in S occurrente, erit MR = mO = nS, & RS reſpectu arcus Mn conſtans.

Sit jam AP $= x$, PM $= y$; erit Pp = pQ = MR = nS $= dx$, mR $= dy$, & Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit RS $= b$; erit mS = On $= b - dy$, adeoque $mn = \sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)}$.

Quoniam motus per Mm eſt æquabilis, erit toto tempuſculo deſcenſus celeritas conſtans, nempe ea quæ deſcenſu per altitudinem AP acquiſita. Ex eadem ratione celeritas in deſcenſu per arculum mn conſtans eſt, nempe ea, quæ deſcenſu per altitudinem Ap acquiſita. Sit prior $= c$, poſterior $=$ C, erit tempus deſcenſus per Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : c$ & tempus per $mn = \sqrt{(dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2)} : C$ (§. 39); conſequenter tempus deſcenſus per Mm + mn $= dt$

$$= \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}}{C}$$

Quoniam tempuſculum minimum eſt, & dx conſtans, dy vero variabilis, erit (§. 63 *Anal. infinit.*). Tab. XIV.b. Fig. 144.

$$ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{(dx^2+dy^2)}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}}$$

hoc eſt

$$\frac{dy}{c\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}}$$

ſive

$$\frac{mR}{c.\ Mm} = \frac{mS}{C.\ mn}$$

$$C.\ mn.\ mR = c.\ Mm.\ mS$$

adeoque

$$Mm : mn = C.\ mR : c.\ mS$$

Jam in hypotheſi *Galilæana*, C $= \sqrt{Ap}$, & $c = \sqrt{AP}$ (§. 87). Quare Mm : mn = mR. $\sqrt{Ap}$: mS. $\sqrt{AP}$.

Quæ eſt proprietas Curvæ Brachyſtochronæ a *Jacobo* BERNOULLI alia via eruta.

Quod ſi fiat Mm = mn, erit C. mR = c. mS, adeoque

$$c : C = mR : mS$$
$$\& \ c : mR = C : mS$$

hoc eſt, elementa ſemiordinatarum mR & mS, ſive nO, ſunt ut celeritates acquiſitæ, ſeu ad has celeritates in ratione conſtante: id quod eſt fundamentum ſolutionis *Joannis* BERNOULLI ex dioptricis principiis ab ipſo derivatum.

Quod ſi jam arcus Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſumatur conſtans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquiſita $= v$, & ratio conſtans ipſius dy ad eandem = Mm : a, erit

dy:

$$dy : v = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : a$$
$$a dy = v \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$
$$a^2 dy^2 = v^2 dx^2 + v^2 dy^2$$
$$a^2 dy^2 - v^2 dy^2 = v^2 dx^2$$
$$dy^2 = \frac{v^2 dx^2}{a^2 - v^2}$$
$$dy = \frac{v dx}{\sqrt{(a^2 - v^2)}}$$

Formula hæc generalis eſt & in omni hypotheſi gravitatis, etiam utcunque variabilis, obtinet. Quodſi jam ſubſtituatur valor ipſius v ex data gravitatis hypotheſi, prodibit formula ſpecialis.

Sit itaque in hypotheſi gravitatis conſtantis

$v^2 = ax$, adeoque $v = \sqrt{ax}$

erit $$dy = \frac{dx \sqrt{ax}}{\sqrt{(a^2 - ax)}} = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}} = \frac{x dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$$

Eſt vero $x dx : \sqrt{(ax - x^2)}$ differentia inter $a dx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ & $(a dx - 2x dx) : 2\sqrt{(ax - x^2)}$. Ergo

$$dy = \frac{a dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \frac{(a dx - 2x dx)}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$y = \int \frac{a dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \int \frac{a dx - 2x dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$$
$$= \int \frac{a dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \sqrt{(ax - x^2)}$$

Tab. XV. Fig. 145. Eſt vero $\sqrt{(ax - x^2)}$ ſemiordinata circuli DH diametro CB $= a$ deſcripti (§. 377 *Analyſ.*) & $\int (a dx : 2\sqrt{(ax - x^2)})$ arcus CH (§. 157 *Anal. infin.*). Quam-obrem $y =$ arcui CH — DH = PM. Tab. XV. Fig. 145. Eſt vero in Cycloide MH = arcui BH (§. 575 *Analyſ.*) & AC = PM + MH + HD = arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analyſ.*). Ergo in eadem arc. CH = PM + HD, conſequenter PM eſt æqualis differentiæ inter arcum CH & ejus ſinum HD.

Curva igitur celerrimi deſcenſus ſive Brachyſtochrona eſt Cyclois, adeoque eadem cum Tautochrona (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in Cycloide PM = arc. CH − HD (§. 357); ſi utrumque æquationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium $= \frac{1}{2}$ OC, prodibit

$\frac{1}{2}$ OC. PM = $\frac{1}{2}$ OC. arc. CH − $\frac{1}{2}$ OC. HD
$\frac{1}{2}$ OC. arc. CH = Sect. COH (§. 435 *Geom.*)
$\frac{1}{2}$ OC. HD = △ COH (§. 392 *Geom.*)

$\frac{1}{2}$ OC. PM = Sect. COH − △ COH
= ſegmento HIC (§. 436 *Geom.*)

Eſt adeo Cyclois externa ſegmentorum circularium repræſentatrix.

SCHOLION I.

359. *Elegantem hanc Cycloidis proprietatem, etſi ad Mechanicam non ſpectet, hic tamen annotari conſultum fuit, ubi ex demonſtratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus* HC $= a dx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 157 Anal. infin.), *qui in* $\frac{1}{2}$CO $= \frac{1}{4}$ a *ductus producit elementum ſectoris* $= a^2 dx : 8\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 435 Geom.). *Quodſi porro* DH *altitudinem* △ COH $= \sqrt{(ax - x^2)}$ *in baſin ejus dimidiam* $\frac{1}{2}$CO $= \frac{1}{4}$a *ducas, prodibit area* △ COH $= \frac{1}{4} a \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 392 Geom.), *cujus adeo elementum* $= (a^2 dx - 2ax dx) : 8\sqrt{(ax - x^2)}$.

 Quare

Tab. XV. Fig. 145. *Quare si hoc elementum trianguli ab elemento sectoris auferas, relinquetur elementum segmenti* HIC $= axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ (§.436 Geom.). *Est vero elementum ipsius* PM $= xdx : \sqrt{(ax - x^2)}$ *(§. 357). Quodsi ergo idem in* $\frac{1}{4}a$ *seu* $\frac{1}{2}$ CO *ducas, prodibit* $axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ *elementum sectoris modo repertum, consequenter sector* $= \frac{1}{4} a \int (xdx : \sqrt{(ax - x^2)})$ $= \frac{1}{2}$ CO. PM.

SCHOLION II.

360. *Quodsi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime descendere debet, Cyclois describenda est per duo puncta data. Quamobrem ut Problema ad praxin transferri possit, ostendendum adhuc erit, quomodo Cyclois per data duo puncta describatur.*

PROBLEMA LV.

Tab. XV. Fig. 146. 361. *Describere Cycloidem per data duo puncta* A *&* C *transeuntem.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Describatur Cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B secet.
3. Fiat deinde AB : AC = ED : FG, erit FG diameter circuli genitoris Cycloidis per puncta A & C transeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG describi potest (§.573 *Anal.*).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonstrandum, esse AB : AC = ED : FG, quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Et quoniam HA, DE & GF perpendiculares ad AF *per constr.* erunt quoque eædem inter se parallelæ (§. *cit. Geom.*). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 *Geom.*), consequenter (§. 268 *Geom.*) AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ, ob EP = AS & AT = FQ (*§.* 168 *Arithm.*). Sed SB = arc. EN — PN & TC = arc. FR — QR (§. 357). Ergo EP : FQ = arc. EN − PN : arc. FR − QR (§. 167 *Arithm.*), consequenter DE. EP : FG. FQ = segm. EN : segm. FR (§. 185 *Arithm.*), quia scilicet $\frac{1}{2}$ DE (arc. EN — PN) = segm. EN & $\frac{1}{2}$ FG (arc. FR — QR) = segm. FR (§. 436 *Geom.*). Est vero DE : EN = EN : EP & FG : FR = FR : FQ (§. 330 *Geom.*), adeoque DE. EP = EN² & FG. FQ = FR² (§. 377 *Geom.*), consequenter EN² : FR² = segm. EN : segm. FR (§. 167 *Arithm.*). Sunt itaque segmenta EN & FR similia (§. 406 *Geom.*), & hinc etiam arcus cognomines similes sunt, consequenter EP : FQ = ED : FG (§. 12 *Trigon.*). Quare cum sit AB : AC = EP : FQ *per demonstrata*; erit etiam AB : AC = ED : FG (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Potest idem multo brevius ex principiis nostris similitudinis ostendi, alibi propositis (*a*); scilicet cum omnes Cycloides sint inter se similes, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC sunt chordæ arcuum cycloidicorum eandem basin

(*a*) In *Actis Erudit.* A. 1715. p. 213. & seqq.

Tab. XV. Fig. 146. basin AF sub eodem angulo secantes, adeoque eodem modo determinatæ, & diametri circulorum genitorum sunt rectæ ex medio basium normaliter erectæ, consequenter itidem eodem modo determinatæ. Patet ergo esse diametros circulorum genitorum ED & FG ipsis AB & AC proportionales, *Q. e. d.*

SCHOLION I.

362. *Patet hinc præstantia principiorum nostrorum similitudinis, ob quam merentur quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipsis aditum aperuimus. Sanè si quis Analysin similitudinis invenire vellet, ex istis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero Analysin, quæ ad similitudinem spectant, multo facilius reperirentur, quam per Analysin magnitudinum qua nunc sola utimur in Geometria.*

SCHOLION II.

363. *Supposuimus in demonstratione, segmenta circulorum similia esse in ratione duplicata chordarum, nempe* $EN^2 : FR^2 =$ segm. EN : segm. FR, *vi principiorum Geometriæ, ex quibus id facile colligitur. Quodsi quis non videat, quomodo idem inde inferatur, demonstrationem hic subjicere licet per modum Lemmatis, & quidem multo universalius.*

LEMMA I.

364. *Sectores similes & segmenta similia circuli habent rationem duplicatam radiorum, subtensarum & ipsorum arcuum: immo segmenta similia curvarum similium habent rationem duplicatam subtensarum & ipsorum arcuum, aliarumque linearum quarumcumque eodem modo determinatarum.*

DEMONSTRATIO.

Sector FOR æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus FR, altitudo radius FO: & sector ENQ æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus EN, altitudo radius EQ (§. 415 *Geom.*). Est vero sector FOR similis sectori ENQ *per hypoth.* quare cum sectores per rationem arcuum ad radios discerni possint, erunt arcus FR & EN radiis suis FO & EQ proportionales (§. 24 *Arithm.*), consequenter triangula, quibus sectores æquales sunt, inter se similia sunt (§. 183 *Geom.*). Sunt igitur sectores in ratione duplicata radiorum & arcuum (§. 398 *Geom.*). *Quod erat unum.* Tab. XV. Fig. 146.

Quoniam arcus FR & EN similes sunt, cum alias segmenta per eorum ad peripheriam rationem discerni possent, contra hypothesin (§. 24 *Arithm.*), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines sunt æquales (§. 141 *Geom.*), consequenter cum utrobique crura sibi invicem sint æqualia (§. 40 *Geom.*), ipsa triangula similia sunt (§. 183 *Geom.*), adeoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 *Geom.*). Est igitur sector FRO : sect. ENQ $= \triangle FRO : \triangle ENQ$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter sect. FRO $- \triangle FRO$: sect. ENQ $- \triangle ENQ =$ sect. FRO : sect. ENQ (§. 189 *Arithm.*). Ergo cum sect. FRO $- \triangle FRO =$ segmento FR, & sect. ENQ $- \triangle ENQ =$ segment. EN, quod per se patet, segment. FR : segm. EN $=$ sector FRO : sect. ENQ (§. 168 *Arithm.*). Sunt vero secto-

Tab. XV. Fig. 146. sectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonstr.* Ergo & segmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum sunt (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Arcus FR & EN sunt similes *per hypoth.* Ergo eorum sinus (§. 12 *Trigon.*), consequenter & sinum duplæ (§. 2 *Trigon.*) chordæ sunt arcubus proportionales (§. 178 *Arithm.*). Sunt vero sectores atque segmenta in ratione duplicata arcuum, *per demonstrata.* Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167, 260 *Arithm.*).

Idem vero multo universalius de quibuscunque curvarum similium segmentis similibus demonstratur.

Tab. XV. Fig. 147. Si curvæ fuerint similes, rectæ constantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter se rationem habent, cum alias per eam distingui possent, (§. 24 *Arithm.*). Quare si porro segmenta similia esse debent, necesse est ut abscissæ AP & Ap ad rectas illas constantes a & b utrobique in eadem sint ratione (§. *cit.*), consequenter $AP : Ap = a : b$. Quare si $AP = x$; erit $Ap = bx : a$. Et quoniam semiordinatæ PM & pm, chordæ AM & am, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit $AM : am = \text{arc. } AM : \text{arc. } am = PM : pm = AP : ap = a : b$ (§. 120 *Geom.*).

Quare si $PM = y$; erit $pm = by : a$. Est vero Elementum curvæ $AMP = ydx$, alterius $amp = b^2 ydx : a^2$ (§. 98 *Anal. infin.*), adeoque curvilineum $AMP : amp = \int ydx : \frac{b^2}{a^2}\int ydx = a^2 : b^2 = AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP^2 : ap^2$. Porro quia $AP : PM = ap : pm$ per demonstr. & anguli ad P & p recti *per construct.* $\triangle APM \backsim \triangle apm$ (§. 183 *Geom.*), consequenter $\triangle APM : \triangle apm = AM^2 : am^2$ (§. 398 *Geom.*). Cum itaque sit $APM : apm = \triangle APM : \triangle apm$ (§. 167 *Arithm.*), erit segment. AM : segm. $am = APM : apm$ (§. 189 *Arithm.*) $= AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP : ap^2 = \text{arc. } AM^2 : \text{arc. } am^2$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti si ex P & p demittantur in AM & am perpendicula PL & pl, rectarum PL & pl, per demonstrata. *Quod erat tertium.* Tab. XV. Fig. 147.

SCHOLION.

365. *Qui ad demonstrationem partis ultimæ Lemmatis præsentis attendit, is fœcunditatem & utilitatem principiorum nostrorum similitudinis abunde perspiciet: quæ in* Philosophia prima *tanquam sede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus (a).*

DEFINITIO XLI.

366. *Curva Synchrona est*, ad cujus singula puncta D, m, M eodem tempore minimo grave pervenit. Tab. XV. Fig. 148.

SCHOLION.

367. *Curvam hanc primus invenit* Joannes BERNOULLI (*b*). *Ex hactenus autem traditis mira facilitate eam deducere licet.*

PROBLEMA LVI.

368. *Construere curvam Synchronam* DmM, *data altitudine perpendiculari* CD, *per quam grave dato tempore descen-*

(*a*) *Ontolog.* §. 215. & seqq.
(*b*) Vid. *Acta Eruditorum* An. 1697.

Tab. XV. *Fig.* 148. *descendit quo ad singula puncta Synchrona pervenit.*

RESOLUTIO.

1. Describantur Cycloides quotcunque CM, C*m* &c. commune initium in C habentes (*§.* 573 *Analys.*)
2. Erigatur in communi initio C ad basin CA perpendicularis CD, quæ sit altitudini datæ æqualis per quam grave dato tempore descendit, seu, quod perinde est, per quam datur tempus, quo grave ad singula puncta D, *m*, M Synchronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur basi AC parallela NM secans Cycloidem in M: erit punctum in M Synchrona.

Eodem modo in Cycloidibus ceteris C*m* determinantur puncta in Synchrona, ope circulorum genitorum ipsis respondentium.

DEMONSTRATIO.

$$AB : arc.\ AN = arc.\ AN : CD \quad per\ constr.$$

$$AN = \sqrt{AB}.\ \sqrt{CD}$$

$$AN.\ \sqrt{AB} = AB.\ \sqrt{CD}$$

$$\frac{AN.\ \sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}$$

Est vero AN. $\sqrt{AB}$: AB tempus descensus per arcum Cycloidis CM (§. 353) & $\sqrt{CD}$ tempus descensus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D descendit. Quoniam itaque eodem modo ostenditur, quod ad quodvis punctum *m* eodem tempore perveniat, quo per CD descendit; curva D*m*M est Synchrona (§. 366). Tab. XV. *Fig.* 148.

DEFINITIO XLII.

369. *Curva Æquilibrationis dicitur*, in qua existens pondus vel sacoma semper æquilibrium faciat cum ponte sublicio circa axem convertibili.

SCHOLION.

370. *Problema hoc solverunt* (a) Marchio HOSPITALIUS *&* Jacobus BERNOULLI *diversa ratione.* Joannes BERNOULLI (b) *identitatem curvæ æquilibrationis cum Cycloide descripta ex circumvolutione rotæ super rota æquali demonstravit, & Problema generalius per communem Geometriam solvit.*

PROBLEMA LVII.

371. *Invenire Curvam Æquilibrationis.* Tab. XV.

RESOLUTIO. *Fig.* 149.

Sit pons sublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem A versatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera M sacoma sustinet. Cum potentiæ laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipolleant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (*§.* 241. 280); si CA exponit pondus pontis absolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad descensum sollicitetur juxta directionem CK & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; si CM consideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet poten-

(a) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 56. & 65.
(b) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 60.

Tab. XV. Fig. 149. potentiæ ut BC, integrum pondus M erit ut CK (§§. *cit.*). Quare si sit quædam recta b ut pondus absolutum M, erit $CK : CM = b : BC$.

Sit jam $CP = x$, $PM = y$, $BC + CM = a$; erit $CM = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ & hinc $BC = a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Est vero subnormalis $PK = ydy : dx$ (§. 35 *Anal. infinit.*) & hinc $CK = CP + PK = x + ydy : dx = (xdx + ydy) : dx$. Quare cum sit $CK : CM = b : BC$ *per demonstr.* erit

$$\frac{xdx + ydy}{dx} : \sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$xdx + ydy : dx \sqrt{(x^2 + y^2)} = b : a - \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

$$bdx \sqrt{(x^2 + y^2)} = axdx + aydy - xdx \sqrt{(x^2 + y^2)} - ydy \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - xdx - ydy$$

$$bx = a\sqrt{(x^2 + y^2)} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$bx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = a\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

quæ est æquatio ad curvam æquilibrationis, cui, si libuerit, etiam quantitas quædam constans addi, vel ab eadem demi potest (§. 95 *Analys. infin.*).

Ut curva hæc construatur, radio $CD = a$ describatur semicirculus FDE & ducatur DG ad FE normalis. Fiat $CG = z$, erit $GD = \sqrt{(a^2 - z^2)}$ (§. 377 *Anal.*) & (§. 268 *Geom.*).

$$CG : CD = CP : CM$$

$$z : a = x :$$

Est itaque $\frac{z . CM}{a} = x$

Porro $CD : DG = CM : PM$

$$a : \sqrt{(a^2 - z^2)} = CM : y$$

$$\frac{CM . \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} = y$$

Ergo $\tfrac{1}{2}x^2 = z^2 . CM^2 : 2a^2$

$\tfrac{1}{2}y^2 = (a^2 - z^2) . CM^2 : 2a^2$ Tab. XV. Fig. 149.

Quodsi hi valores in æquatione ad curvam substituantur, prodibit

$$a . CM = \frac{bz . CM}{a} + \frac{z^2 . CM^2}{2a^2} + \frac{a^2 . CM^2 - z^2 . CM^2}{2a^2}$$

$$= \frac{bz . CM}{a} + \tfrac{1}{2} CM^2$$

$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facile determinatur, cum non alia re opus sit, quam ut ad radium circuli CD seu longitudinem funis BC + CM, duplum rectæ illius, quæ pondus absolutum sacomatis exponit, & rectam CG pro lubitu assumendam quæratur tertia proportionalis, ac ex diametro circuli FE auferatur.

Si sit $a = b$, erit $CM = 2a - 2z = 2GE$: qui est casus omnium simplicissimus.

Quando CM degenerat in CN, hoc est, quando fit a, curva semicirculum in N secat, tumque est

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$o = a - 2bz : a$$

$$\frac{a}{2b} = z$$

Patet adeo, CG esse tertiam proportionalem ad $2b$ & a, si curva peripheriam circuli secat.

Quo-

Tab. XV. *Fig.* 149. Quoniam subtangens $= ydx : dy$ (§. 20 *Anal. infin.*) & vi superiorum

$$dx = \frac{aydy - ydy\sqrt{(x^2+y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} - ax}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} - ax}$$

Quare si $CM = \sqrt{(x^2+y^2)} = a$

erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - ay^2}{(b+x)a - ax} = o$

Ergo ubi curva peripheriam circuli secat, subtangens evanescit, adeoque semiordinata eam tangit, consequenter N est punctum infimum, sicque in nostro casu Mechanico arcus CN sufficit.

Tab. XV. *Fig.* 150. Quodsi in situ pontis horizontali AI longitudo funis $IC = CE = CN = a$ & præterea $b = a$, vel $b > a$; tota curvæ portio CMN sufficit; si vero $CI < CN$, & in situ horizontali pondus jam fuerit in M, satisfacit portio, MN, quoniam tum CM est differentia inter CN & CI.

Si sit $CI = c$, reliqua sint ut ante, erit

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a} = a - c$$

$$a + c = \frac{2bz}{a}$$

$$\frac{a^2 + ac}{2b} = z$$

Punctum adeo M determinatur, si fiat $CG = (a^2 + ac) : 2b$, quæ est quarta proportionalis ad $2b$, a & $a + c$, hoc est, ad duplam lineam, quæ pondus M exprimit, radium circuli CE seu funis integri longitudinem ob $IC + CM = CE$ & compositam ex radio & portione funis IC.

Sit $CM = o$ Tab. XV. *Fig.* 151. n. 1.

erit $2a - 2bz : a = o$

$$a^2 - bz = o$$

$$a^2 : b = z$$

Habemus itaque $b : a = a : z$. Quare si $b = a$; erit $a = z$, adeoque punctum D cadit in E, consequenter diameter FE curvam in centro C tangit.

Si $b > a$, etiam $a > z$ (§. 149 *Arithm.*), n. 2. recta igitur CD definiens punctum curvæ C adhuc in peripheriam EN cadit; consequenter curva ultra centrum continuari potest, adeoque in centro C axem FE secat.

Quando itaque CD coincidit in E, erit $z = a$, adeoque cum sit

$$x = z \cdot \frac{CM}{a}$$

$$= z\sqrt{(x^2+y^2)} : a$$

$$= \sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$x^2 = x^2 + y^2$$

$$y = o$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem secat in K. Quare cum ex constructione appareat, ab altera parte describi posse partem similem, curva in centro C nodum habet.

Si in æquatione ad curvam

$$a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + bxy^2 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{4}y^4$$

fiat $y = o$

erit $a^2x^2 = b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{4}x^4$

$$a^2 = b^2 + bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$a = b + \tfrac{1}{2}x$$

$$2a = 2b + x$$

Quando itaque $b > a$; erit

$$-x = 2b - 2a$$

Unde intelligitur, punctum K a centro distare intervallo $2b - 2a$.

Tab. XIV. Fig. 151. n. 3. Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b$$

Ex quo apparet, curvam secare axem infra centrum C in L, ita ut CL sit $2a - 2b$.

Quodsi in æquatione ad curvam valor ipsius x sumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit distantia puncti F a centro C, ubi axem secat. Nimirum cum ob $y = 0$; sit

$$a^2 = b^2 + bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

erit ob valorem ipsius x negativum

$$a^2 = b^2 - bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$a = \tfrac{1}{2}x - b$$

$$2a + 2b = x$$
$$= CF$$

Curva igitur in omni casu in se redit.

Quodsi maxima curvæ latitudo determinanda, cum sit

$$\frac{aydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - ydy = bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

erit ob $dy = 0$ (§. 63 *Anal. infin.*)

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$$

$$(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} = ax$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{b+x} = CM$$

Ut igitur CM in casu maximi inveniri possit, valor ejus, quem supra reperimus $= 2a - 2bz : a$, exprimatur etiam hic per z, ita ut pro x substituatur valor ipsius per z expressus. Est vero juxta superiora $CM = ax : z$. Quare cum hic sit $CM = ax : (b+x)$; erit

$$z = b + x$$
$$z - b = x$$

Tab. XIV. Fig. 151. n. 3.

$$CM = \frac{ax}{x} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \tfrac{1}{2}a^2$$
$$= \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

$$\left.\begin{matrix} z - \dfrac{a^2}{4b} \\ \dfrac{a^2}{4b} - z \end{matrix}\right\} = \frac{a}{4b}\sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$$z = \frac{a^2 \mp a\sqrt{(a^2 + 8b^2)}}{4b}$$

Quodsi $a = b$, erit $z = \dfrac{a^2 \mp a\sqrt{(a^2+8a^2)}}{4a}$
$$= \tfrac{1}{4}a \mp \tfrac{3}{4}a$$

Quando in hoc casu $z = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}a = a$, cum sit $a = CE$, curva axem in centro tangit juxta superiora. Ergo in casu maximi satisfacit radix falsa, nempe $z = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}a$: quod indicio est, valorem ipsius z sumi debere ex altera parte, nempe versus F in recta CF. Tab. XIV. Fig. 151. n. 1.

Quando $b > a$, curva KCF duplicem habet maximam semiordinatam, alteram nempe infra centrum, alteram supra idem, adeoque radix utraque servit, affirmativa intra centrum, negativa supra idem. n. 2.

In

Tab. XIV. *Fig.* 151. n. 3. In casu denique tertio, ubi $a < b$, radix positiva est major radio. Sed cum z = CG radio CE major fieri nequeat, *vi construct.*; radix negativa hic itidem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum versus F.

S C H O L I O N.

372. *Illud hic notatu dignum est, quod pro diversa relatione quantitatum constantium* a *&* b, *quæ æquationem ingrediuntur, curvæ ductus admodum variet, ita ut oculorum judicio pro curvis non haberentur, quæ per eandem æquationem definiuntur.*

T H E O R E M A LI.

Tab. XV. *Fig.* 152. 373. *Si circulus X super alio æquali T rotetur, ita ut punctum rotationis vel sit in ipsa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis; curva hoc puncto descripta erit Curva æquilibrationis.*

D E M O N S T R A T I O.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione describitur, esse curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit & recta SM, in qua est punctum describens M producatur, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, mensuræ angulorum R & S (§. 57 *Geom.*), æquales sunt per genesin curvæ CMN; erit RH = HS (§. 184 *Geom.*). Fiat RC = SM & ex centro C radio CD = RV = SO describatur circulus & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in constructione curvæ æquilibrationis fecimus (§. 371). Fiat porro ut ibidem RV = OS = CD = a, SM = RC = b, CG = z. Quoniam RH = HS *per demonstr.* & RC = SM *per constr.* erit etiam CH = HM (*§. 91 Arithm.*), adeoque HC : HM = HR : HS, consequenter angulus GCD = HRT (§. 183 *Geom.*). Quare cum porro ob RT = TS & HR = HS angulus ad T rectus sit (§. 179, 147 *Geom.*), & ad G itidem rectus *per construct.* erit (*§. 267 Geom.*). Tab. XV. *Fig.* 152.

$$CG : CD = RT : RH$$
$$z : a = a :$$

Est itaque RH $= a^2 : z$, adeoque

$$CH = RH - RC = \frac{a^2}{z} - b.$$

Porro ob ang. HCD = ang. HRS *per demonstrata*; erit CM ipsi RS parallela (§. 255 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$HR : RS = HC : CM$$
$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b : CM$$
$$\text{sive } a^2 : 2a = a^2 - bz : CM$$
$$\text{Ergo } CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2}$$
$$2a - \frac{2bz}{a}$$

Est itaque punctum M in Curva æquilibrationis, consequenter Curva rotatione circuli X super circulo Y puncto M descripta Curva æquilibrationis (§. 371).

Tab. XV. Fig. 152. Idem eodem modo oſtenditur in iis caſibus, ubi punctum deſcribens O fuerit in peripheria, vel punctum deſcribens K fuerit intra peripheriam circuli.

Problema LVIII.

Tab. XV. Fig. 153. 374. *Data curva* AB, *invenire curvam aliam* LM, *ſuper qua, in quocunque puncto, pondus* M *datum ſit in æquilibrio cum pondere alio* B *dato.*

Resolutio & Demonstratio.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos ſecans. Quoniam CH eſt linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea horizontalis (§. 210). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata conſtituuntur, quæ dicantur B & M; erit I Centrum gravitatis ponderum conſtans commune (§. 124). Quare B : M = EI : IK (§. 144). Eſt vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (§. 156 *Geom.*), ME : KB = EI : IK (§. 267 *Geom.*). Quare B : M = ME : KB (§. 167 *Arithm.*). Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe PM & BH; erit EM = IP & KB = IH (§. 226 *Geom.*), adeoque B : M = IP : IH (§. 167 *Arithm.*). Quare ſi per hanc analogiam reperiatur recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C interſecetur; erit in M punctum Curvæ æquilibrationis quæſitum. Tab. XV. Fig. 153.

Quodſi æquatio ad curvam AB detur; facile reperiri poteſt æquatio ad Curvam æquilibrationis per communes Algebræ regulas.

CAPUT IX.

De motu Pendulorum.

Definitio XLIII.

376. Pendulum eſt grave quodlibet, ita ſuſpenſum, ut circa punctum aliquod, vi gravitatis, aſcenſus & deſcenſus reciprocos continuare poſſit. Aſcenſus ille & deſcenſus reciprocus *Oſcillatio* penduli vocatur.

Definitio XLIV.

Tab. IV. Fig. 44. 377. *Pendulum ſimplex* eſt quod conſtat unico pondere inſtar puncti conſiderato, & linea inflexili gravitatis experte circa centrum C convertibili AC appenſo.

Definitio XLV.

378. *Pendulum compoſitum* eſt quod pluribus ponderibus conſtat, eandem diſtantiam, tum inter ſe, tum a centro circa quod oſcillationes fiunt, conſtanter ſervantibus.

DEFINITIO XLVI.

379. *Axis oscillationis* est recta lineæ horizontali apparenti parallela transiens per centrum, circa quod pendulum oscillatur.

THEOREMA LII.

Tab. IV. Fig. 44. 380. *Pendulum in* B *adductum per arcum circuli* BA *descendit, & ad punctum æque altum* D *per arcum æqualem ascendit; inde denuo in* A *descendit ac ad* B *ascendit; sicque reciprocos ascensus & descensus continuat.*

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipsi parallela. Si globus A, quem instar puncti consideramus, cum solius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex Centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra basin, quæ est in puncto C. Globus igitur in hoc situ quiescere nequit, sed descendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH descendere possit, per arcum circuli BA descendit (§. 131 *Geom.*). Ubi Centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus instruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 308); adeoque ipsum ad altitudinem æqualem elevare potest (§. 322). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipsi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) ascendit. Vi igitur, quam cadendo acquisiverat, omni absorpta, per eundem arcum DA relabitur, vi gravitatis ascensurus ex A in B; & ita porro. *Q. e. d.*

SCHOLION.

381. *Experientia Theoremati non contradicit; etsi sine fine continuatæ oscillationes ei parum respondeant. Aëris enim resistentia & frictio circa centrum C partem aliquam ejus vis absumunt, quæ cadendo acquisita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præcise altitudinem elevetur globus, ex qua delapsus. Quoniam itaque ascensus continua capit decrementa; oscillatio tandem sistitur, & pendulum in situ* CA, *in quo Centrum gravitatis infimum occupat locum, quiescit.* Tab. IV. Fig. 44.

THEOREMA LIII.

382. *Si pendulum simplex inter duas semicycloides* CB *&* CD *suspendatur, quarum circuli generatores habent diametrum* CF *dimidiæ longitudini fili* CA *æqualem, ita ut filum oscillans iis circumplicetur; oscillationes omnes, utcunque inæquales, erunt isochronæ, seu æquidiuturnæ, in medio non resistente.* Tab. IV. Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE semicycloidi BC circumplicetur, a Centro gravitatis globi E, qui instar puncti consideratur (§. 377), ex evolutione Cyclois BEAD describitur (§. 330 *Analys. infinit.*). Sed omnes descensus & ascensus in Cycloide sunt æquidiuturni (§. 311). Ergo oscillationes penduli sunt æquidiuturnæ (§. 376). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

383. Quodsi longitudine penduli CA describatur circulus ex centro C; cum portio Cycloidis prope verticem A eodem fere motu describatur, arcus exiguus circuli cum Cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oscillationes pendulorum sunt ad sensum isochronæ, utcunque in se inæquales.

COROLLARIUM II.

384. Quo longiora itaque sunt pendula in arcubus circuli oscillantia; eo majores oscillationes isochronæ sunt.

SCHOLION I.

385. *Experientia non abludit. Quodsi enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oscillando excurrat; in oscillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.*

SCHOLION II.

386. *Penduli inter duas semicycloides oscillantis tam theoria, quam praxis debetur illustri* HUGENIO (a).

PROBLEMA LIX.

387. *Determinare durationem oscillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 46. Sit diameter circuli genitoris seu altitudo totius Cycloïdis $AB = a$; HB altitudo, ex qua descendit pendulum per arcum illius $QB = 2r$, $HP = x$, erit $PB = 2r - x$. Sit porro tempus per $QB = t$, & super HB describatur semicirculus HNB, ducanturque PM atque pm infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit $PN = \sqrt{(2rx - xx)}$, $Pp = NO = Rm = dx$, & celeritas in P, adeoque & in M (§. 308), acquisita $= \sqrt{x}$ (§. 83), consequenter, cum infinitesima Mm motu uniformi percurratur, tempus per $Mm = dt = Mm : \sqrt{x}$ (§. 39). Constat vero (§. 131 *Analyſ. infinit.*) esse $Mm : mR = BS : BP$ & $AB : BS = BS : BP$ (§. 330 *Geom.*). Est itaque BS ad BP in ratione subduplicata AB ad BP, (§. 216 *Arithm.*), hoc est, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{PB}$; consequenter $Mm : mR = \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ (§. 167 *Arithm.*). Tab. IV. Fig. 46. Unde $Mm = mR . \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$, & $dt = dx \sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2rdx\sqrt{a} : 2r\sqrt{(2rx - x^2)}$. Est vero $rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = Nn$ (§. 157 *Analyſ. infinit.*) Ergo $dt = 2\sqrt{a} . Nn : 2r$ & $\int dt = \int Nn . 2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ sive t tempus denotat, quo grave per arcum Cycloidis QB descendit, $\int Nn$ in semiperipheriam circuli HNB degenerat. Quare ut $2r$, seu diameter circuli, ad semiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum QB; consequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus descensus perpendicularis per AB (§. 39, 92, 83); patet tandem (§. 168 *Arithm.*) sequens

Theorema: Tempus integræ oscillationis per arcum quemcunque Cycloidis QMB est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AB, ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo consequitur, quod jam superius aliunde demonstratum (§. 311), tempus descensus per quoslibet arcus Cycloidis esse æquidiuturnum; oscillationes item in omnibus arcubus Cycloidis esse æquidiuturnas.

THEOREMA LIV.

389. *Gravitatis actio minor est in iis Terræ regionibus, ubi oscillationes ejusdem penduli sunt tardiores; major vero, ubi eadem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oscillationum in Cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut

(a) Vide Horologium Oscillatorium sive Demonstrationes de motu Pendulorum ad horologia aptato Geometricas.

ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), adeoque in ratione constante (§. 413 *Geom.*). Quare si oscillatio ejusdem penduli fit tardior, descensus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: si ille redditur celerior; hic quoque celerior fit necesse est. In primo igitur casu minus spatium cadendo conficit grave, quam in altero; adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero; consequenter gravitas minor est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum adeo Experientia docuerit, oscillationes ejusdem penduli esse tardiores prope Æquatorem, quam in remotioribus versus Polum regionibus; gravitas corporum minor est versus Æquatorem, quam versus Polos.

SCHOLION.

391. *Observavit hoc primus* RICHERIUS *An.* 1672, *itinere in Insulam* Cayennæ, *quæ ab Æquatore* 5 *fere gradibus distat, facto; ubi pendulum Parisiense singulis minutis secundis oscillans, cujus longitudo erat pedum* 3, *linearum* $8\frac{5}{9}$, *minuendum erat linea una cum quadrante, ut adhuc oscillationes singulis minutis secundis absolveret* (a). *An.* 1677, HALLEIUS *ad Insulam* S. Helenæ *navigans reperit Horologium suum ibi tardius moveri, quam* Londini, *sed differentiam non notavit. Similes observationes habuere An.* 1682, VARIN & DES HAYES; *An.* 1697, COUPLET *filius*; & *An.* 1704, FEUILLEE (*b*).

THEOREMA LV.

Tab. III. Fig. 47. 392. *Si duo pendula* CA & EF *in arcus similes* DAB & GFH *excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum* CA & EF.

(*a*) *Acta Eruditorum*, An. 1695. p. 30.
(*b*) Vid. NEWTONUM in *Principiis*, Lib. III. Prop. 19. p. m. 419.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Tab. III. Fig. 47. Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arithm.*); consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF *per hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & 170 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA LVI.

394. *Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus a numerus oscillationum penduli unius $= b$, alterius $= mb$. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidiuturnæ; erit tempus quo pendulum primum oscillationem unam conficit $= a : b$, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, $= a : mb$ (§. 302 *Arithm.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut $a : b$ ad $a : mb$, hoc est, ut amb ad ab (§. 178 *Arithm.*), seu ut mb ad b (§. 181 *Arithm.*). Sed ut mb ad b ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscil-

lantio-

lationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos, excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumptorum (§. 393).

THEOREMA LVII.

396. *Longitudines pendulorum intra Cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam, ita tempus descensus per altitudinem Cycloidis, seu dimidiam penduli longitudinem, ad tempus unius oscillationis (§. 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86.) Ergo etiam altitudines, hoc est pendulorum longitudines dimidiæ, consequenter & integræ (§. 178 *Arithm.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per Cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 394).

COROLLARIUM II.

398. Tempora oscillationum in Cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA LX.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum; invenire longitudinem alterius penduli quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati, & longitudinem penduli dati, numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsita (§. 397).

E. gr. Juxta HUGENIUM (a) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum *Parisinorum* 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60, & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsiti $= 3600 . 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{645}{1000}$ lin.

PROBLEMA LXI.

400. *Dato numero oscillationum quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore absolvuntur; invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESO-

(a) In *Horolog. Oscillat.* part. 4. Prop. 25. f. 152.

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas, & quadratum numeri oscillationum quæsiti (§.397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæsitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= \sqrt{} (88100. 3600 : 7929) = \sqrt{} 40000 = 200$.

THEOREMA LVIII.

Tab. III. Fig. 36. 401. *Celeritas penduli in puncto infimo* B *est ad celeritatem cadendo per duplam longitudinem* AB *acquisitam, ut chorda arcus quem describit* EB *ad diametrum circuli* AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquisita æquatur celeritati per PB acquisitæ (§.308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BP ad BA (§.87). Sed BA : BE = BE : BP (§.330 *Geom.*), adeoque BA ad BE est ratio subduplicata BA ad BP (§.216, 159 *Arithm.*). Ergo celeritas per arcum BE est ad celeritatem per BA acquisitam, ut chorda BE ad BA (§.167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

402. Cum adeo sit celeritas per arcum EB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda EB ad AB, & celeritas per arcum DB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda DB ad AB (§.401); celeritates per arcus EB & DB acquisitæ sunt ut chordæ cognomines (§.195 *Arithm.*). Tab. III. Fig. 36.

SCHOLION.

403. *Alia adhuc Theoremata non inelegantia de Pendulis habet* NEWTONUS (a): *quæ analytice facillime demonstrantur ex superioribus. Eum igitur in finem sequens addimus Problema.*

PROBLEMA LXII.

404. *Determinare tempus oscillationis dimidiæ per arcum exiguum, in hypothesi gravitatis uniformis, sed massæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.

Sit in C centrum, circa quod pendulum oscillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oscillatur, seu oscillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo, & BNA semicirculus ex centro C descriptus; dicatur Tab. XVI. Fig. 154.

$CA = a$, $AP = x$, $AQ = b$,
erit $AB = 2a$, $QP = b - x$,
& (§. 330 *Geom.*)

$AB : AN = AN : AQ$
$2a : AN = AN : b$
$AB : AM = AM : AP$
$2a : AM = AM : x$
adeoque
$AM = \sqrt{2ax}$, $AN = \sqrt{2ab}$.

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter subtensæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$, & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, consequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale

(a) Princip. Lib. I. Sect. X. Prop. 50. & seq. & Lib. 2. Sect. VI. Prop. 24. & seq.

Tab. XVI. Fig. 154. tiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1:2}dx\sqrt{2a}$ $= -dx\sqrt{a}:\sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $=g$, massa $=m$. Quoniam gravitas uniformis, seu constans *per hypoth.* erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP=b-x$ acquisita $=\sqrt{2g(b-x)}:\sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempusculum dt, directe ut spatium seu arculus mM, & reciproce ut celeritas in m acquisita (§. 39); consequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per } NM}$$

$$= \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

$$t = \int\frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

Est vero $-bdx : 2\sqrt{(bx-x^2)}$ Elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ descripti, cujus sagitta $QP = b-x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analys. infin.*). Ergo $-dx:\sqrt{(bx-x^2)}$ = Elemento arcus AR per $\frac{1}{2}$ AQ diviso. Fiat itaque

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit $$\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{2dz}{b}$$

adeoque $$dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

$$= \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\text{arc. QR.}\sqrt{AB}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat $QP=QA$, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA, eritque t tempus dimidiæ oscillationis; hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore

$$t = \frac{QRA.\sqrt{AB}.\sqrt{m}}{AQ.\sqrt{g}}$$

Patet, QRA : AQ designare rationem semiperipheriæ ad diametrum, & $\sqrt{AB}$ esse ut tempus descensus perpendicularis per AB seu altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m, seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galilæana* (§. 114), erunt

Theorema: Oscillationes pendulorum in arcubus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem seu circuli diametrum, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per diametrum, ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA LIX.

405. *Tempora sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum, atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oscillationum T & t, massæ M & m, gravitates G & g; erit

$$T = \frac{QRA.\sqrt{2M.L}}{AQ.\ \sqrt{G}}$$

& $t = \dfrac{QRA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\ \sqrt{g}}$ (§. 404), adeoque

T : t

Tab. XVI. Fig. 154. $T:t = \frac{QRA.\sqrt{2M.L}}{AQ.\sqrt{G}} : \frac{QRA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\sqrt{g}}$

$= \frac{\sqrt{M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m.l}}{\sqrt{g}}$ (§.181 *Arithm.*)

$= \sqrt{M}.\sqrt{L}.\sqrt{g} : \sqrt{m}.\sqrt{l}.\sqrt{G}$ (§.178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis quorum longitudines æquales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in Theoremate præcedente; erit

$$T:t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

adeoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arithm.*)

Et hinc $T^2G : t^2g = ML : ml$ (§. 184 *Arithm.*).

Quare cum sit $L = l$ *per hypoth.* erit $T^2G : t^2g = M : m$ (§.183 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$; hoc est, si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM II.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§. 183 *Arithm.*), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM III.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§.151 *Arithm.*), adeoque $G : g = t^2 : T^2$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM IV.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$; vi demonstr. præs. si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§.183 *Arithm.*), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM V.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§. 185. 178 *Arithm.*), hoc est massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION I.

412. *His Principiis usus est* NEWTONUS *(a) in comparandis corporibus inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis, se semper invenisse fatetur quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM VI.

413. Quodsi fuerit $M = m$, erit $T^2 Gl = t^2gL$ (§.151 *Arithm.*); consequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§.299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g}.\sqrt{L} : \sqrt{G}.\sqrt{l}$ (§. 260 *Arithm.*); hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa longitudinum pendulorum & reciproca gravitatum subduplicata.

COROLLARIUM VII.

414. Quodsi fuerit $M = m$ & $T = t$, erit $gL = Gl$ (§. *præc.*); consequenter $G : g = L : l$, hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM VIII.

415. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $T^2 G = t^2g$ (§. 413); consequenter $T^2 : t^2 = g$

(a) Vid. *Princip.* Lib. 2. Prop. 24. Cor. 7. p. m. 295.

$= g : G$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arithm.*); hoc eſt, ſi maſſæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora ſunt in ratione ſubduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM IX.

416. Quodſi fuerit $M = m$ & $G = g$, erit $T^2 l = t^2 L$ (§. 413) conſequenter $T^2 : t^2 = L : l$, adeoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc eſt, ſi gravitates acceleratrices & maſſæ funependulorum fuerint æquales, tempora ſunt in ratione ſubduplicata longitudinum.

SCHOLION II.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, quæ ſollicitatur, in uno puncto concentrata concipiatur,* (§. 377), *neque maſſa per ſe, niſi quatenus a cauſa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat; ſi pondera maſſis proportionalia ſunt, adeoque æquales quantitates materiæ ſeu maſſæ æquales a gravibus eodem modo animentur, nulla habetur maſſarum ratio. Perinde igitur eſt in hoc caſu, ac ſi in omnibus pendulis maſſæ eſſent æquales. Unde, in hac naturæ conſentanea hypotheſi, valent quæ in caſu maſſarum æqualium demonſtravimus.*

THEOREMA LXI.

418. *Numeri oſcillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex reciprocis ſubduplicatis maſſarum & longitudinum, atque directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oſcillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus abſolutarum reciproce ut tempora, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oſcillationum ſunt in ratione compoſita ex rationibus ſubduplicatis directis maſſarum & longitudinum pendulorum & ſubduplicata reciproca maſſas animantium gravitatum, ſeu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oſcillationum a duobus pendulis æqualibus temporibus abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex reciprocis ſubduplicatis maſſarum & longitudinum & directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium, ſeu $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

419. Quodſi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{g}$, hoc eſt, ſi maſſæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oſcillationum eodem tempore in arcubus exiguis abſolutarum ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa ſubduplicata gravitatum maſſas animantium.

COROLLARIUM II.

420. Quodſi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$; hoc eſt, multitudines vibrationum, eodem tempore à duobus pendulis æqualibus peractarum, ſe habent in ſubduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION I.

421. *Si cui libuerit, is ex analogia* $N : n = \sqrt{G}.\sqrt{l}.\sqrt{m} : \sqrt{g}.\sqrt{L}.\sqrt{M}$ *plura Theoremata deducet, quemadmodum ſupra in ſimili caſu factum.*

SCHOLION II.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonſtrata ſunt, plerumque tantum ſuccedunt, ſi filum ex quo pondus ſuſpenditur gravitate careat, & totius ponderis gravitas in punctum individuum ſit coacta: quæ nempe ſuperius ſuppoſuimus. Quamobrem in praxi filo utendum eſt tenui, & globo exiguo, ſed ex materia*

materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum: perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enimvero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire Centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus Caput sequens.

CAPUT X.

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO XLVII.

423. *Centrum oscillationis* est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO XLVIII.

425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA LXII.

Tab. IV. Fig. 48. 426. *Si plura pondera D, F, H, B, quorum gravitas in punctis D, F, H, B, concipitur collecta, in virga inflexili AB eandem inter se & a puncto suspensionis A distantiam constanter conservent, & circa A oscillationes suas perficiat pendulum hoc modo compositum; prodibit distantia Centri oscillationis O a puncto suspensionis A, si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur.* Tab. IV. Fig. 48.

DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B, distantiis a puncto suspensionis A*d*, A*f*, A*g*, A*b* proportionales. Patet adeo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse Centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC, summa ponderum in Centro oscillationis O applicata arcum OP describet (§. 423.). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B, quo in summam

Tab. IV. Fig. 48. mam eorundem O, nisi retinaculum AB obstaret; singula per spatiola ipsi OP æqualia transferrentur, quia motus in instanti est uniformis, adeoque celeritates spatiolis proportionales (§. 33). Quare si KN per P ipsi DB parallela ducatur; DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant exponent celeritates à ponderibus D, F, H & B in instanti acquirendas, si libere descenderent. Gravitas vero cum solo nisu agat (§. 4), vis mortua est (§. 9); consequenter vires motuum acceleratrices sunt in ratione composita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in E vis ut D. EK, & in F vis ut F. GL; contra vero in H accrescit vis ut H. MI, & in B vis ut B. NC; seu quod perinde est, ob decrementum virium in D & F vi in B aliquid accrescit, sed incrementum in H accremento in B rursus aliquid detrahit. Cum autem sit vis in D ad vim in B, uti AB ad AD; vis in F ad vim in B, uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B, uti AB ad AH (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D. EK. AD) : AB, & (F. GL. AF) : AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H. MI. AH) : AB. Habemus adeo

$$B.NC = (D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH) : AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF.$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos, E, G, I, C (§. 38 *Analys. infinit.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*); consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB; erit Tab. IV. Fig. 48.

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum sit

$$H.AH^2 = H.HA.HO + H.HA.AO$$
$$B.AB^2 = B.BA.BO + B.BA.AO$$
$$D.OA.DA = D.AD.AD + D.OD.AD$$
$$F.OA.FA = F.FA.FA + F.OF.FA.$$

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D.DA^2 + F.FA^2 + H.AO.HA + B.AO.BA$, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA) AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}$$

Q. e. d.

SCHOLION I.

427. *Quodsi non evidens videatur, esse* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$, *&* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$; *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$, *&* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit* $HA = HO + OA$ (§. 86. Arithm.), *erit* $HA^2 = HO^2 + 2\,HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arithm.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86. Arithm.); erit $HA.HO = (AO + OH)\,HO = HO.OA + HO^2$, *&* $HA.AO = (AO + OH)\,AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93

Tab. IV. Fig. 48. (*§.93* Arithm.); *consequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (*§.87* Arithm.). *Similiter cum sit* $AB^2 = AO^2 + 2\,AO.OB + OB^2$, & $AB.BO = (AO + OB)\,OB = AO.OB + OB^2$, & $AB.AO = (AO + OB)\,AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (*§.86* Arithm.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)\,DA = AD.AD + AD.OD$ (*§.93* Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

SCHOLION II.

428. Joannes BERNOULLI (*a*) *ex simplicissimis principiis mechanicis Theoriam de Centro oscillationis ab* HUGENIO (*b*) *inventam*, & *à* Jacobo BERNOULLI *Fratre* (*c*) *ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Operæ igitur pretium nos facturos existimamus, si Viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA LXIII.

429. *Determinare Centrum oscillationis in pendulo composito.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 155. Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quotcunque C, D &c. in distantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est Centrum oscillationis Z, seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur à gravitate naturali G; erit pondus in C = G. C, & momentum ejus G. C. AC, quod *vim agitativam penduli* appellat BERNOULLIUS. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G. D. AD & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153). Tab. XVI. Fig. 155.

Assumatur jam pro arbitrio punctum P, & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, adeoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates, seu vires acceleratrices massarum, sint ut celeritates quas producunt in instanti; celeritates autem, in tempusculo infinite parvo quo per angulum infinite parvum ex AL in A (L) movetur pendulum, sint ut C (C) ad P (P) (§.33), consequenter ut AC ad AP (§. 138, 412 *Geom.*); erit ut AC ad AP, ita gravitas in C adfictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius C subrogandum; consequenter gravitas in $P = \frac{AP.\,G}{AC}$. Quodsi massa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$, & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum sit æquale momento ponderis in C, erit $\frac{G.P.AP^2}{AC} = G.C.AC$

$$\text{Unde } P = \frac{C.\,AC^2}{AP^2}.$$

Eodem prorsus modo reperitur pondus in P substituendum ponderi in D: nimirum massa ejus $= \frac{AD^2.\,D}{AP^2}$; gravitas qua animanda, $= \frac{AP.\,G}{AD}$.

Est

(*a*) In *Actis Erudit.* A. 1714. p. 257. & seqq.
(*b*) In *Horolog oscillat.* Part. 4. f. 91. & seqq.
(*c*) In *Actis Erudit.* A. 1691. p. 317.

Tab. XVI. *Fig.* 155. Est itaque pondus, quod in P substitui debet pro pondere, quod est in C, $\frac{AP.G}{AC} \times \frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$ & pondus, quod pro D in P substituendum $= \frac{AP.G}{AD} \times \frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur; invenienda est porro gravitas communis quæ animat uniformiter massarum seu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$: erit

$$\frac{AC^2.\ Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.\ Dx}{AP^2} \ \&c.$$

$$= \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G}{AP} \ \&c.$$

$$AC^2.\ Cx + AD^2.\ Dx + \&c.$$
$$= (AC.\ C + AD.\ D + \&c.)\ AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D + \&c.)\ AP.G}{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}$$

hoc est, gravitas communis reperitur dividendo ponderum summam per summam massarum.

Cum adeo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia $\left(\frac{AC.\ C + AD.\ D}{AC^2.C + AD^2.D}\ \&c.\right) AP.\ G$ fit composito AL isochronum, pendula vero simplicia isochrona habeant gravitates longitudinibus proportionales (§.414); longitudo penduli simplicis AZ fictitio AL isochroni & a gravitate naturali G animandi reperitur, si fiat:

$$\left(\frac{AC.C + AD\,D + \&c.}{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}\right) AP.G : G = AP : AZ$$

Erit enim (§.178, 181, 183 *Arithm.*) (AC. C + AD. D &c.) : (AC². C + AD². D &c.) = 1 : AZ Tab. XVI. *Fig.* 155.

consequenter

$$AZ = \frac{AC^2.C + AD^2.D + \&c.}{AC.\ C + AD.\ D + \&c.}$$

quæ est regula *Hugeniana* (*a*) in Propositione præcedente demonstrata; sed in eo casu, ubi pondera, quæ pendulum componunt sunt in eadem recta, aut saltem in eodem plano, in quo est axis oscillationis.

Tab. XVI. *Fig.* 156. Ponamus jam pondera C, D &c. non esse in eadem recta, seu in plano in quo est axis oscillationis, sed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem A oscillante disposita, ita tamen ut situm non mutent. Sit AM linea verticalis plani & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, adeoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus *c*C, & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam qua impellitur radius AC, in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, adeoque

$$AC : RC = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Est ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et, si gravitas

(*a*) Prop. 5. part. 4. *de Horolog. oscillat.* f. 98.

Tab. XVI. Fig. 156. vitas absoluta in $P = M$, respectiva ibidem $\frac{M.PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C, idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

adeoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arithm.*).

$$AP^2.G.RC = AC^2.M.QP$$

$$\frac{AP^2.G.RC}{AC^2.QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2.G.DS}{AD^2.QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi $= T$. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC.C.G = \frac{T.AP^2.G.RC.QP}{AC^2.QP}$$

$$C = \frac{T.AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C.AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$ Tab. XVI. Fig. 156.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T.M + V.N + \&c.}{T + V}$;

vi antecedentium cum sit

$$T.M = \frac{C.AC^2.AP^2.G.RC}{AP^2.AC^2.QP} = \frac{C.G.RC}{QP}$$

$$\& V.N = \frac{D.AD^2.AP^2.G.DS}{AP^2.AD^2.QP} = \frac{D.G.DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2.C + AD^2.D}{AP^2}$$

erit $\frac{T.M + V.N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2.C.G.RC + AP^2.D.G.DS}{QP.AC^2.C + QP.AD^2.D}$$

$$= \frac{C.RC + D.DS}{C.AC^2 + D.AD^2} \times \frac{AP^2.G}{QP}$$

Habemus adeo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

$$\frac{C.RC + D.SD}{C.AC^2 + D.AD^2} \times \frac{AP^2.G}{PQ} : G = AP : AZ$$

$(C.RC + D.DS)\ AP : (C.AC^2 + D.AD^2)\ QP = 1 : AZ$ (§. 185 *Arithm.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{C.AC^2 + D.AD^2}{C.RC + D.SD} \times \frac{QP}{AP};$$

quæ est longitudo penduli fictitii in instanti compositi isochroni, ob RC, SD, QP variabiles.

Tab. XVI. Fig. 156. Sit jam in F Centrum gravitatis, erit ob parallelas FE & PQ (§.268 *Geom.*).

$$PQ : AP = FE : AF$$

adeoq. $AF = \frac{AP.FE}{PQ}$ = quantit. conft.

Erit etiam, ob Centrum gravitatis in F (§. 153)

$$(C+D)EF = RC.C+SD.D;$$

adeoque fi AP tranfit per Centrum gravitatis F, hoc eft, fi fit *Linea centri* phrafi *Hugeniana*; erit

$$AZ = \frac{C.AC^2 + D.DA^2 \&c.}{(C+D \&c.) AF}$$

Atque hæc eft regula *Hugeniana* pro inveniendo centro ofcillationis in pendulo quocunque compofito, quam ipfius verbis enunciat fequens

Theorema. Si pondera fingula penduli compofiti ducantur in quadrata diftantiarum fuarum ab axe ofcillationis, & fumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum fummam in diftantiam Centri gravitatis communis omnium ab eodem axe ofcillationis; orietur longitudo penduli fimplicis compofito ifochroni, five diftantia inter axem & centrum ofcillationis ipfius penduli compofiti.

COROLLARIUM I.

Tab. IV. Fig. 48. 430. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe D = F = H = B &c. = P & numerus ponderum n; erit

$$AO = \frac{P.DA^2 + P.FA^2 + P.HA^2 + P.BA^2 \&c}{nP.\ AR}$$

hoc eft $AO = \frac{DA^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \&c.}{nAR}$

COROLLARIUM II.

431. Quoniam D. AD eft momentum ponderis D (§.153); fi momenta confiderentur ut pondera ad rectam AB applicata, centrum ofcillationis coincidet cum Centro gravitatis communi horum ponderum (§.429), adeoque momentis in ponderum locum furrogatis eodem modo determinatur centrum ofcillationis, quo fupra Centrum gravitatis commune inveftigavimus (§. 157.) Tab. IV. Fig. 48.

COROLLARIUM III.

432. Si figura plana circa axem RI ita ofcilletur, ut is femper maneat in plano ofcillante feu (quod perinde eft) ordinatis figuræ MN conftanter fit parallelus; fingulæ pondufculi cujufcunque MNnm partes ab axe ofcillationis RI æqualiter diftant (§.81 *Geom.*), nec aliter ofcillatur e.gr. particula G ac fi in puncto L fufpenderetur. Eft adeo momentum integri pondufculi MNnm (fi fuerit $AP = LG = x$, $MN = 2y$, $Pp = dx$,) $= 2yxdx$, confequenter diftantia centri ofcillationis ab axe $= 2\int yx^2\,dx : 2\int yxdx$ (§.157) $= \int yx^2\,dx : \int yxdx$. Quodfi adeo ex æquatione fpeciali ad figuram aliquam datam valor ipfius y fubftituatur, & elementa debita ratione integrentur; prodibit diftantia centri ofcillationis ab axe in terminis ordinariis. Tab. Fig.

PROBLEMA LXII.

433. *Determinare centrum ofcillationis in linea recta* AB. Tab. Fig.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $AD = x$; erit particula infinite parva $DP = dx$, momentum hujus pondufculi xdx; confequenter diftantia centri ofcillationis in parte AD a puncto fufpenfionis $A = \int x^2\,dx : \int xdx = \frac{1}{3}x^3 : \frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x$. Quodfi pro x fubftituatur a, prodibit diftantia centri ofcillationis in recta integra $AB = \frac{2}{3}a$.

SCHOLION.

434. *Hac ratione definitur centrum oscillationis fili ferrei circa alterum extremum oscillantis.*

PROBLEMA LXIII.

Tab. I. Fig. 9. 435. *Determinare centrum oscillationis rectanguli* RIHS *in puncto medio* A *lateris* RI *suspensi & circa axem* RI *oscillantis.*

RESOLUTIO.

Si fuerit RI $= SH = a$, AP $= x$; erit P$p = dx$ & elementum areæ, consequenter unum ponduſculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 432.) $\int ax^2dx : \int axdx = \frac{1}{3}ax^3 : \frac{1}{2}ax^2 = \frac{2}{3}x$ indefinite exprimit distantiam centri oscillationis ab axe oscillationis in segmento RCDI. Quodsi igitur pro x substituatur integri rectanguli altitudo RS $= b$; prodibit distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{2}{3}b$.

PROBLEMA LXIV.

436. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* SAH *circa axem* RI *basi* SH *parallelum oscillantis.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2}b$, PV $= y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PV = AE : EH$$

$$x : y = a : \tfrac{1}{2}b$$

$$ay = \tfrac{1}{2}bx$$

$$y = bx : 2a$$

Hinc $\int yx^2\,dx = \frac{\int bx^3\,dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$

$$\int yxdx = \frac{\int bx^2\,dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

$$\& \frac{\int yx^2\,dx}{\int yxdx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \tfrac{6}{8}x = \tfrac{3}{4}x.$$

Quodsi pro x substituatur altitudo integra AE $= a$, prodibit distantia centri oscillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A $= \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}$ AE. Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA LXV.

437. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* SAH *circa basin* SH *oscillantis.*

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in Problemate præcedente, erit PE $= a - x$. Unde

$$\int yx^2\,dx = \frac{\int bxdx}{2a}(a-x)^2 = \int(\tfrac{1}{2}abxdx - bx^2\,dx + \frac{bx^3\,dx}{2a}) = \tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yxdx = \frac{\int bxdx}{2a}(a-x) = \int(\tfrac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}) = \tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$$

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = (\tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}) : (\tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a})$$

$$= (\frac{24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a}) : (\frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a})$$

$$= \frac{12a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8bx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}.$$

Habemus adeo distantiam centri oscillationis ab axe in segmento SZVH.

Quodsi pro x substituatur a, prodibit distantia centri oscillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2) : (6a - 4a) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ AE.

PROBLEMA LXVI.

Tab. I. Fig. 9. 438. *Determinare centrum oscillationis in triangulo æquicruro* SAH, *quod filo inflexile & gravitatis experte* Ah *suspensum circa axem* ri *basi* SH *parallelum oscillatur.*

RESOLUTIO.

Sit $Ah = c$, reliqua sint ut supra (§. 436): erit $Ph = c + x$. Unde

$$\int yx^2\,dx = \int \frac{(c+x)^2 bx\,dx}{2a} = \int\Big(\frac{bc^2x\,dx}{2a} + \frac{bcx^2dx}{a} + \frac{bx^3dx}{2a}\Big) = \frac{bc^2x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a}$$

$$= \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$$

$$\int yx\,dx = \int \frac{(c+x).bx\,dx}{2a} = \int\Big(\frac{bcx\,dx + bx^2dx}{2a}\Big).$$

$$= \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a} = \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}.$$

$$\frac{\int yx^2\,dx}{\int yx\,dx} = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a} : \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a} = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{6bcx^2 + 4bx^3}$$

$$= \frac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x},$$ qui est valor distantiæ centri oscillationis ab axe *ri* in segmento trianguli AZV.

Quodsi pro x substituatur trianguli altitudo $AE = a$, prodibit distantia centri oscillationis ab axe oscillationis *ri* in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

SCHOLION.

439. *Ex unico hoc exemplo intelligitur, quid in casu simili aliarum figurarum factu opus sit.* Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA LXVII.

440. *Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem* RI *basi* SH *parallelum oscillantibus.*

Quoniam (§. 163)

$$\int yx\,dx = \int x^{(r+n):n}dx = \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n}$$

erit $\int yx^2dx = \int x^{(r+2n):n}dx = \frac{n}{r+3n}x^{(r+3n):n}$

$$\& \frac{\int x^2y\,dx}{\int xy\,dx} = \frac{(r+2n)x^{(r+3n):n}}{(r+3n)x^{(r+2n):n}} = \frac{r+2n}{r+3n}x.$$

E. gr. In parabola *Apolloniana*, $r = 1$, $n = 2$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{5}{7}$ AE.

In paraboloide cubicali, $r = 1$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{7}{10}$ AE.

In paraboloide biquadratico, $r = 1$, $n = 4$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{9}{13}$ AE.

In curva ad quam $ax^2 = y^2$, $r = 2$, $n = 3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{8}{11}$ AE.

In curva ad quam $a^2x^3 = y^5$, $r = 3$, $n = 5$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{13}{18}$ AE.

PROBLEMA LXVIII.

441. *Invenire centrum oscillationis in parabola* SAH *circa basin* SH *agitata.*

RESOLUTIO.

Sit $AE = b$, $AP = x$, $MP = y$; erit $ydx = x^{1:2}dx$, $EP = b - x$ & distantia centri oscil-

Tab. I. Fig. 9. oscillationis $= \int x^{1:2}dx(b-x)^2 : \int x^{1:2}dx(b-x)$. Quoniam itaque $\int x^{1:2}dx\,(b-x)^2$

$$= \int b^2 x^{1:2}\,dx - \int 2bx^{3:2}\,dx + \int x^{5:2}dx$$
$$= \tfrac{2}{3}b^2x^{3:2} - \tfrac{4}{5}bx^{5:2} + \tfrac{2}{7}x^{7:2}$$
$$= \frac{70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2}}{105}\ \&$$
$$\int x^{1:2}dx\,(b-x) = \int bx^{1:2}\,dx - \int x^{3:2}dx$$
$$= \tfrac{2}{3}bx^{3:2} - \tfrac{2}{5}x^{5:2} = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15},$$

erit distantia centri oscillationis

$$= \frac{15\,(70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2})}{105\,(10bx^{3:2} - 6x^{5:2})}$$
$$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2)}{35b - 21x}$$

Quodsi fiat $x = b$, erit distantia centri oscillationis totius parabolæ SAH à basi SH.

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$
$$= \frac{8b^2}{14b} = \tfrac{4}{7}b = \tfrac{4}{7}\,\mathrm{AE}.$$

Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA LXIX.

442. *Invenire centrum oscillationis in infinitis parabolis* SAH *circa basim* SH *agitatis.*

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis $y^m = x$ (§. 519 *Analys.*)

$$y = x^{1:m}$$
$$ydx = x^{1:m}dx$$
$$x^2ydx = x^{1:m}dx\,(b-x)^2$$
$$= x^{1:m}dx\,(bb - 2bx + xx)$$
$$= b^2x^{1:m}\,dx - 2bx^{1+1:m}dx + x^{2+1:m}dx$$

$$\int x^2ydx = \frac{m}{m+1}b^2x^{1+1:m}dx - \frac{2m}{2m+1}bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1}x^{3+1:m}$$
$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int xydx = \int bx^{1:m}dx - \int x^{1+1:m}\,dx = \frac{m}{m+1}bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1}x^{2+1:m}$$
$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^2(2m+1)^2x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$
$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)xx}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quod si fiat $x = b$, cum sit

$(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$
$(2m+2)(3m+1) = 6m^2 + 8m + 2$
$(m+1)(2m+1) = 2m^2 + 3m + 1$
$(m+1)(3m+1) = 3m^2 + 4m + 1$

reperietur distantia centri oscillationis in infinitis parabolis a basi

$$\mathrm{SH} = \frac{2m^2b^2}{(3m^2+m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1}\,\mathrm{AE}.$$

Sit jam $m = 2$, prodibit eadem distantia $= \tfrac{4}{7}$ AE, ut ante (§. 441).

LEMMA II.

Tab. XVI. Fig. 157. 443. *Si in triangulo quocunque MAN ducitur utcunque recta AP; erit* $AM^2 \times PN + AN^2 . PM = AP^2 . MN + PM . PN . MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o = P$ (§.156 *Geom.*). & ang. MAD=MND (§.315 *Geom.*), erit AM:AP=ND:NP. (§.267 *Geom.*). adeoque AM. NP = AP. ND (§.297 *Arithm.*).

Similiter $u = y$ (§. 156 *Geom.*). & ang. ANM = ADM (§. 315 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*) AN : AP = MD : MP; adeoque AN. MP=AP. MD (§. 297 *Arithm.*):

Est vero MN. AD = AM. ND + AN. MD (§.324 *Analys.*).

Quare cum sit AD = AP + PD (§.86 *Arithm.*); erit etiam MN. AP + MN. PD = AM. ND + AN. MD, consequenter MN. AP^2 + MN. PD. AP = AM. ND. AP + AN. MD. AP (§. 93 *Arithm.*). Quare cum sit, *per demonstrata*

ND. AP = AM. NP
MD. AP = AN. MP

atque AP. PD = MP. PN (§. 381 *Geom.*); erit MN. AP^2 + MN. MP. PN = AM^2. NP + AN^2. MP. *Q. e. d.*

SCHOLION.

444. *Utimur hoc Lemmate in determinando centro oscillationis in figuris, quæ* in latus *agitantur, hoc est, circa axem ad planum figuræ normalem. Ejus enim determinatio difficilior est in hoc casu, quam in præcedente, ubi agitatio fit in planum: quemadmodum videre est apud* HUGENIUM (*a*). *Calculum differentialem ad hoc negotium applicavit* Jacobus BERNOULLI (*b*). *Nos primum regulam generalem demonstrabimus, eamque deinde ad Problemata specialia applicabimus, quemadmodum in casu præcedente factum.*

(*a*) In *Horolog. oscillat.* part. 4. f. 91. & seqq.

(*b*) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* A. 1703. p. m. 96. 317.

PROBLEMA LXX.

Tab. XVI. Fig. 158. 445. *Determinare centrum oscillationis in figuris in latus agitatis.*

RESOLUTIO.

Ponamus Figuram AMN agitari in latus, hoc est, ita ut planum figuræ sit ad axem oscillationis normale. Consideremus primum duo puncta M & N tanquam pondera æqualia, aut sumantur pro punctis potius rectarum MP & PN portiones infinite parvæ; erit eorum centrum gravitatis commune, ob MP = PN, in P (§.145), atque adeo pondus in P=M+N (§.125), consequenter distantia centri oscillationis penduli hujus compositi $= \frac{M. AM^2 + N. AN^2}{(M+N) AP}$ (§. 429). Est vero M=N & MP=PN *per hypoth.* Ergo distantia centri oscillationis $= \frac{PN. AM^2 + PM. AN^2}{(M+N) AP}$. Est vero PN. AM^2 + PM. AN^2 = MN. AP^2 + MN. MP. PN (§. 443), consequenter M. AM^2 + N. AN^2 = MN. AP^2 + MN. MP. PN, hoc est, ob M=N, & PM = PN, adeoque MN = PM + PN, $\frac{M. AM^2 + N. AN^2}{P. AP.} = \frac{P. AP^2 + P. MP. MP}{P. AP}$. Jam cum recta MN in innumera istiusmodi ponduscula

Tab. XVI. *Fig.* 158. duſcula reſolvi poſſit, qualia ſunt M & N $= dp$; ſi PM ſumatur variabilis & dicatur y, AP vero x, ſumma ponduſculorum duorum M & N $= dp$; erit pro duobus ponduſculis diſtantia centri oſcillationis $\frac{x^2dp+y^2dp}{xdp}$; conſequenter pro omnibus ponduſculis ſecundum rectam MN conſtitutis diſtantia centri oſcillationis $= \frac{2\int x^2\,dp + 2\int y^2\,dp}{2\int xdp} = \frac{\int x^2\,dp + \int y^2\,dp}{\int xdp}$. Enimvero cum ponduſcula dp ſint parallelogrammula, quorum latitudo eſt differentiale dy, altitudo differentiale abſciſſæ, adeoque $dp = dxdy$ & dx reſpectu dy conſtans eſt; erit $\int dp = dx\int dy$. Similiter quia y variabilis eſt reſpectu x, quod ejus intuito pro conſtante habetur; erit $\int x^2\,dy = x^2y$ & $\int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3$ & $\int xdy = xy$, conſequenter ſi jam y ſumatur pro integra ſemiordinata PM; erit diſtantia centri oſcillationis in integra figura plana oſcillante MAN $= \frac{\int x^2\,ydx + \int \frac{1}{3}y^3\,dx}{\int xydx}$. Non alia igitur re opus eſt, quam ut pro y ex æquatione ad curvam ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius y & y^2.

Corollarium I.

446. $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ exprimit diſtantiam centri oſcillationis in figura in planum agitata (§. 432). Quare ſi diſtantia centri oſcillationis in figura in latus agitata deſideretur; ad illam nonniſi adjicienda $\int\frac{\frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$, ubi data vel jam inventa præſupponitur.

Corollarium II.

447. Liquet etiam hinc, diſtantiam centri oſcillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, ſiquidem ita viſum fuerit, una reperiri poſſe.

Problema LXXI.

448. *Determinare centrum oſcillationis rectanguli* RIHS *ex puncto medio* A *lateris* RI *ſuſpenſi & in latus agitati.* Tab. I. *Fig.* 9.

Resolutio.

Si fuerit RI $=$ SH $= a$, AP $= x$, erit diſtantia centri oſcillationis ab axe ſive a puncto A pro agitatione in planum $= \frac{2}{3}x$, ſeu pro integro rectangulo $= \frac{2}{3}b$, &, ob $y = a$, $\int xydx = \int axdx = \frac{1}{2}ax^2$ (§. 435) & $\int \frac{1}{3}y^3\,dx = \frac{1}{3}\int a^3\,dx = \frac{1}{3}a^3\,x$. Quare $\frac{\int\frac{1}{3}y^3\,dx}{\int xydx}$, ſeu particula adjicienda ut prodeat diſtantia centri oſcillationis rectanguli in latus agitati (§. 446), $= \frac{2a^3x}{3ax^2} = \frac{2a^2}{3x}$, ſeu, ſi porro fiat $x = b$, $= \frac{2a^2}{3b}$. Eſt igitur diſtantia quæſita $= \frac{2}{3}b + \frac{2a^2}{3b}$.

Problema LXXII.

449. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri* SAH *ex vertice ſuſpenſi & in latus agitati.*

Resolutio.

Sit altitudo AE $= a$, AP $= x$, EH $= \frac{1}{2}b$, PV $= y$; erit diſtantia centri oſcillationis in planum agitati trianguli $= \frac{3}{4}x$, aut totius trianguli $= \frac{3}{4}a$, $\int yxdx = \frac{bx^3}{6a}$ & $y = \frac{bx}{2a}$ (§. 436). Quare

Tab.I. Fig. 9. Quare $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{b^3 x^3 dx}{24a^3} = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$, consequenter particula adjicienda $\int \frac{\frac{1}{3}y^3 dx}{\int xydx}$

$$= \frac{b^3 x^4}{96a^3} : \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3 x^4}{96a^3 bx^3} = \frac{b^2 x}{16a^2}.$$

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri ex vertice suspensi & in latus agitati $= \frac{3}{4}x + b^2 x : 16a^2$. Quodsi fiat $x = a$; erit distantia centri oscillationis trianguli æquicruri $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA LXXIII.

450. *Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri* SAH *in medio basis* SH *suspensi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit $PE = a - x$, $\int yxdx = \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$, & distantia centri oscillationis trianguli in planum agitati $= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$, aut integri trianguli $= \frac{1}{2}a$. Sed $\int \frac{1}{3}y^3 dx = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$ (§. 449). Ergo pars addenda $= \frac{24ab^3 x^4}{96a^3(6abx^2 - 4bx^3)} = \frac{3b^2 x^2}{72a^3 - 48a^2 x}$; consequenter, si fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{3a^2 b^2}{72a^3 - 48a^3} = \frac{3b^2}{24a} = \frac{b^2}{8a}$. Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri in medio basis suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$.

PROBLEMA LXXIV.

451. *Determinare centrum oscillationis parabolæ ex vertice suspensæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{5}{7}x$, &, si parameter $= 1$, $y^2 = x$ adeoque $y^3 = x^{3:2}$ & $\int yxdx = \frac{2}{5}x^{5:2}$ (§. 440). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3}y^3 dx = \int \frac{1}{3}x^{3:2} dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit pars adjicienda $= \frac{2}{15}x^{5:2} : \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Est nempe parameter unitas, adeoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ si dicatur b, erit pars adjicienda $= \frac{1}{3}b$. Habemus adeo distantiam centri oscillationis a vertice parabolæ in latus agitatæ $= \frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$.

PROBLEMA LXXV.

452. *Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice suspensis.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis, distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{r+2n}{r+3n}x$, $\int xydx = \frac{n}{r+2n}x^{(r+2n):n}$ &, quia $y = x^{r:n}$, $y^3 = x^{3r:n}$ (§. 439). Quoniam itaque $\int \frac{1}{3}y^3 dx = \frac{n}{3(3r+n)} x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)} x^{(3r+n):n}$; erit pars adjicienda $= \frac{n}{9r+3n} x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n} = \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(2r-n):n}$. Est itaque distan-

tantia centri oscillationis in infinitis parabolis aliisque curvis in latus agitatis $\frac{r+2n}{r+3n}x + \frac{r+2n}{9r+3n}x^{(2r-n):n}$.

Quoniam in parabola *Apolloniana* $r=1$, $n=2$; erit $\frac{r+2n}{r+3n}=\frac{1+4}{1+6}=\frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n}=\frac{1+4}{9+6}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n}=\frac{2-2}{2}=0$; adeoque $x^{(2r-n):n}=x^0=1$. Est adeo, in parabola *Apolloniana*, distantia centri oscillationis a vertice $\frac{5}{7}x+\frac{1}{3}b$, si nempe parameter $=b$, prorsus ut in Problemate præcedente (451).

PROBLEMA LXXVI.

Tab.I. Fig. 9. 453. *Determinare centrum oscillationis parabolæ ex dimidia basi suspensæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

In parabola SAH circa basin SH in planum agitata distantia centri oscillationis a basi est $\frac{4}{7}b$, seu $\frac{4}{7}$ AE &, si parameter $=1$, $y^3=x^{3:2}$ & $\int xydx = 10bx^{3:2}-6x^{5:2}$ (§. 441). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3}y^3\,dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3}y^3\,dx : \int xydx$, seu pars addenda $\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2}-6x^{5:2}}=\frac{x}{5b-3x}$ $=$ (si parameter 1 fiat $=a$) $\frac{ax}{5b-3x}$; consequenter si fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $=\frac{ba}{5b-3b}=\frac{1}{2}a$. Est igitur distantia centri oscillationis parabolæ ex dimidia basi suspensæ & in latus agitatæ $=\frac{4}{7}b+\frac{1}{2}a$.

PROBLEMA LXXVII.

454. *Invenire centrum oscillationis in figuris solidis rotatione genitis.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut, in formula superiori $\frac{\int x^2dp+\int y^2dp}{\int xdp}$, figuris solidis convenienter explicetur valor pondusculi dp. Designat autem dp elementum solidi, quod habetur ducendo in se invicem differentialia abscissæ PQ & semiordinatæ QK atque semiordinatam QK. Sit $PQ=y$, $AP=x$, $QK=v$, erit elementum $vdydx$; consequenter cum $\int vdy$ exprimat segmentum PQKL, quod concipitur instar pondusculi in QP collectum, si PM sit $=y$, $\int vdy$ exprimit integrum semicirculum in lineam rectam MN collectum instar ponderis. Sit adeo ratio radii ad semiperipheriam $=r:p$; erit semiperipheria radio $PM=y$ descripta $=\frac{py}{r}$, consequenter area semicirculi $=\frac{py^2}{r}$, adeoque ponduscuIum dp in valore $\int x^2dp$ substituendum $=\frac{py^2dx}{r}$; unde $\int x^2dp=\frac{\int px^2y^2dx}{r}=\frac{p}{r}\int x^2y^2dx$. Quodsi idem valor substituatur in $\int xdp$; reperietur idem $\frac{p}{r}\int xy^2dx$. Substituatur valor ipsius dp etiam in formula $\int y^2dp$; erit ponduscuIum puncto Q respondens y^2vdydx, consequenter ponduscula respondentia lineæ QP $=dx\int vy^2dy$. Dica-

Tab. XVI. Fig. 158.

Tab. XVI. Fig. 158. Dicatur radius circuli $PN = t$: erit $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, adeoque $\int vy^2 dy = \int y^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)}$. Est vero $\int y^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)} = \frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$ (§. 455. *infr*). Ergo omnia pondufcula refpondentia lineæ QP funt $\frac{1}{4} t^2 dx \int v dy - \frac{1}{4} y v^3 dx$. Jam $\int v dy$ exprimit fegmentum circuli PQKL, adeoque degenerat in femicirculum radio PM defcriptum, quando PQ efficitur ipfi PM æqualis, adeoque $t = y$. In eo igitur cafu cum area femicirculi fit $\frac{py^2}{r}$, eft $\frac{1}{4} t^2 dx \int v dy = \frac{py^4 dx}{4r}$. Et quoniam in M femiordinata QN evanefcit, erit $v = 0$, adeoque etiam $\frac{1}{4} y v^3 = 0$. Prodit adeo tandem

$$\frac{\int x^2 dp + \int y^2 dp}{\int x dp} = \frac{pr \int x^2 y^2 dx + \frac{1}{4} pr \int y^4 dx}{pr \int x y^2 dx}$$

$$= \frac{\int x^2 y^2 dx + \int \frac{1}{4} y^4 dx}{\int x y^2 dx}$$, ut adeo in cafu fpeciali non alia re opus fit, quam ut pro y fubftituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione folidum generatur, quemadmodum Problemata fequentia docent.

SCHOLION I.

455. *Diximus, fi t fit conftans quantitas & $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, effe $\int vy^2 dy = \frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$. Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum; quo facto reftituitur differentiale ad integrandum propofitum (§. 92. Analyf. infin.). Quodfi ergo $\frac{1}{4} t^2 \int v dy - \frac{1}{4} y v^3$ differentietur, cum t conftans fit, prodit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} v^3 dy - \frac{3}{4} y v^2 dv$. Jam quia $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$ per hypoth. $v dv = - y dy$ & $v^2 = t^2 - y^2$. Quare his valoribus in $\frac{3}{4} y v^2 dv$ & $\frac{1}{4} v^3 dy$ fubftitutis, differentiale emergit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} t^2 v dy + \frac{1}{4} v y^2 dy + \frac{3}{4} v y^2 dy = \frac{4}{4} v y^2 dy = v y^2 dy$, quod erat elementum ad integrandum propofitum.*

SCHOLION II.

456. *Quoniam folida rotatione figurarum circa axem fixum genita eodem modo agitantur, in quamcunque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia, qualem in figuris planis inter agitationem in planum & in latus confideravimus, adeoque in omni cafu eadem formula fatisfacit.*

PROBLEMA LXXVIII.

457. *Determinare centrum ofcillationis in cylindro ex centro bafis fufpenfo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo cylindri $AB = a$, $CB = b$, $AP = x$. Quoniam omnes circuli bafi paralleli æquales funt, erit in cylindro $PM = CB$, hoc eft, $y = b$. Unde habemus (§. 454): Tab. XVI. Fig. 159.

$$x^2 y^2 dx = b^2 x^2 dx$$
$$\frac{1}{4} y^4 dx = \frac{1}{4} b^4 dx$$
$$x y^2 dx = b^2 x dx,$$

adeoque
$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{3} b^2 x^3$$
$$\int \frac{1}{4} y^4 dx = \frac{1}{4} b^4 x$$
$$\int x y^2 dx = \frac{1}{2} b^2 x^2$$

Quare diftantia centri ofcillationis à puncto fufpenfionis $= \frac{\frac{1}{3} b^2 x^3 + \frac{1}{4} b^4 x}{\frac{1}{2} b^2 x^2} = \frac{2}{3} x + \frac{b^2}{2x}$. Quodfi fiat $x = a$; prodit diftantia centri ofcillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3} a + \frac{b^2}{2a}$.

SCHO-

SCHOLION.

458. *Equidem* DECHALES (*a*) *centri oscillationis distantiam in Cylindro ex centro basis suspensi tantummodo facit* $\frac{2}{3}a$; *sed ipse non diffitetur suo tempore Theoriam centri oscillationis nondum fuisse excultam: immo vix fando quid audiverat de regula* Hugeniana, *quæ in* Horologio Oscillatorio *demonstratur* (*b*).

PROBLEMA LXXIX.

459. *Determinare centrum oscillationis in cono ex vertice suspenso.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 15. Si altitudo coni $AC = a$, radius basis $BC = b$, $AP = x$, $PM = y$; erit $y = bx : a$ (§. 268 *Geom.*). Quare (§. 454)

$$x^2 y^2 dx = b^2 x^4 dx : a^2$$
$$\tfrac{1}{4} y^4 dx = \tfrac{1}{4} b^4 x^4 dx : a^4$$
$$xy^2\, dx = b^2 x^3 dx : a^2$$

adeoque

$$\int x^2 y^2 dx = b^2 x^5 : 5a^2$$
$$\int \tfrac{1}{4} y^4 dx = b^4 x^5 : 20a^4$$
$$\int xy^2\, dx = b^2 x^4 : 4a^2$$

Distantia igitur centri oscillationis a puncto suspensionis $= \left(\frac{b^2x^5}{5a^2} + \frac{b^4x^5}{20a^4}\right) : \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{4}{5}x + \frac{b^2 x}{5a^2}$. Quodsi jam porro fiat $x = a$: prodit distantia centri oscillationis pro cono integro $= \frac{4}{5}a + \frac{b^2}{5a}$.

PROBLEMA LXXX.

460. *Determinare centrum oscillationis Sphæræ.*

(*a*) In *Mundo Mathem.* Tom. 2. Stat. Lib. 3. Prop. 65. f. m. 322.

(*b*) Vide Prop. præc. 64.

RESOLUTIO.

Si diameter Sphæræ $= 2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377 *Analys.*), adeoque $y^4 = 4r^2 x^2 - 4rx^3 + x^4$. Habemus adeo (§. 454)

$$x^2 y^2 dx = 2rx^3 dx - x^4 dx$$
$$\tfrac{1}{4} y^4 dx = r^2 x^2 dx - rx^3 dx + \tfrac{1}{4} x^4 dx$$
$$xy^2\, dx = 2rx^2 dx - x^3 dx$$

$$\int x^2 y^2 dx = \tfrac{1}{2} rx^4 - \tfrac{1}{5} x^5$$
$$\int \tfrac{1}{4} y^4 dx = \tfrac{1}{3} r^2 x^3 - \tfrac{1}{4} rx^4 + \tfrac{1}{20} x^5$$
$$\int xy^2\, dx = \tfrac{2}{3} rx^3 - \tfrac{1}{4} x^4$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $= \frac{\frac{1}{4}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{3}{20}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}$ $=$ (multiplicando per 12 & dividendo per x^3) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{9}{5}x^2}{8r - 3x}$ $= \frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodsi fiat $x = 2r$, prodit distantia centri oscillationis pro Sphæra integra $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14}{10}r = \frac{7}{5}r$.

Si pro r ponatur diameter d, quia $d = 2r$, adeoque $\frac{1}{2}d = r$, erit eadem distantia $= \frac{7}{10}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat $x = r$; prodit distantia centri oscillationis in hemisphærio $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{35}$, ubi nempe ex vertice fuerit suspensum.

PROBLEMA LXXXI.

462. *Determinare centrum oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Si parameter parabolæ genetricis a; erit $y^2 = ax$ (§. 388. *Analyſ.*), adeoque $y^4 = a^2x^2$. Habemus adeo (§. 454.)

$$x^2y^2\,dx = ax^3\,dx$$
$$\tfrac{1}{4}\,y^4\,dx = \tfrac{1}{4}a^2x^2\,dx$$
$$xy^2\,dx = ax^2\,dx$$

adeoque $\int x^2y^2\,dx = \frac{1}{4}ax^4$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{12}a^2x^3$$
$$\int xy^2\,dx = \tfrac{1}{3}ax^3$$

Quamobrem diſtantia centri oſcillationis à vertice

$$= \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}a.$$

Si diameter baſis fuerit b, & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391. *Analyſ.*). Quodſi ergo x degenerat in c; prodit diſtantia centri oſcillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{3}{4}c + bb : 4c$.

PROBLEMA LXXXII.

463. *Determinare centrum oſcillationis in omnibus Conoidibus parabolicis in infinitum circa verticem agitatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1, pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{1:m}$ (§. 519. *Analyſ.*), adeoque $y^2 = x^{2:m}$ & $y^4 = x^{4:m}$.

Habemus itaque (§. 454)

$$x^2y^2\,dx = x^{2+2:m}\,dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{4}x^{4:m}\,dx$$
$$xy^2\,dx = x^{1+2:m}\,dx$$

$$\int x^2y^2\,dx = \frac{m}{3m+2}x^{3+2:m}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4\,dx = \frac{m}{4m+16}x^{1+4:m}$$

$$\int xy^2\,dx = \frac{m}{2m+2}x^{2+2:m}$$

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitatis.

$$\frac{2m+2}{3m+2}x + \frac{2m+2}{4m+16}x^{-1+2:m}$$
$$= \frac{2m+2}{3m+2}x + \frac{m+1}{2m+8}x^{-1+2:m}$$

Ponatur $m = 2$, prodit $\frac{6}{8}x + \frac{3}{12}x^{-0}$, hoc eſt, ob $x^0 = 1$ (§. 55 *Analyſ.*), $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam poſuimus $= 1$, fiat a; erit diſtantia centri oſcillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$, prorſus ut ante (§. 462).

PROBLEMA LXXXIII.

464. *Determinare centrum oſcillationis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Quoniam planum deſcribens eſt hyperbola, ſi axis transverſus dicitur a, para-

parameter b, erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (§. 459 *Analyſ.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 + \frac{2b^2x^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454)

$$x^2y^2\,dx = bx^3\,dx + \frac{bx^4\,dx}{a}$$

$$\tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{4}b^2x^2\,dx + \frac{b^2x^3\,dx}{2a} + \frac{b^2x^4dx}{4a^2}$$

$$xy^2\,dx = bx^2\,dx + \frac{bx^3\,dx}{a}$$

adeoque

$$\int x^2y^2\,dx = \tfrac{1}{4}bx^4 + \frac{bx^5}{5a} = \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{12}b^2x^3 + \frac{b^2\,x^4}{8a} + \frac{b^2\,x^5}{20a^2}$$

$$= \frac{160a^2b^2x^3 + 240ab^2x^4 + 96b^2x^5}{12a\,.\,160a}$$

$$= \frac{10a^2b\,x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a\,.\,10a}$$

$$\int xy^2\,dx = \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{4a} = \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2y^2\,dx}{\int xy^2\,dx} = \frac{3.\ 5abx^4 + 3.\ 4bx^5}{5.\ 4abx^3 + 5.\ 3bx^4}$$

$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$

$$\frac{\int \frac{1}{4}y^4\,dx}{\int xy^2\,dx} = \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{10a.\ 4abx^3 + 10a.\ 3bx^4}$$

$$= \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Eſt adeo diſtantia centri oſcillationis a vertice in Conoide hyperbolico

$$\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}.$$

Quodſi fiat $x = a$, prodibit diſtantia Centri oſcillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi tranſverſo æqualis,

$$\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2b + 15a^2b + 6a^2b}{40a^2 + 30a^2}$$
$$= \tfrac{27}{35}a + \tfrac{31}{70}b.$$

PROBLEMA LXXXIV.

465. *Determinare centrum oſcillationis in Sphæroïde elliptico ex vertice, ſeu altero axis majoris extremo, ſuſpenſo.*

RESOLUTIO.

Si axis transverſus fuerit a, parameter b; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (§. 420 *Analyſ.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 - \frac{2bx^3}{a} + \frac{b^2x}{a^2}$. Reperitur adeo, uti in Problemate præcedente (§. 564),

$$\int x^2y^2\,dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4\,dx = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a.\ 10a}$$

$$\int xy^2\,dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12\,a}$$

adeoque $\frac{\int x^2y^2\,dx}{\int xy^2\,dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{4}y^2\,dx}{\int xy^2\,dx} = \frac{10a^2b - 15\,abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

 Eſt

Est igitur distantia centri oscillationis à vertice
$$\frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}.$$
Quodsi fiat $x = a$, prodit distantia centri oscillationis a vertice pro integro Sphæroide circa axem majorem agitato
$$\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{16a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2}$$
$= \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$. Si fiat axis minor $= c$, erit $b = c^2 : a$ (§. 423 *Analys.*), adeoque distantia centri oscillationis in Sphæroide $= \frac{3a}{5} + \frac{c^2}{10a}$.

PROBLEMA LXXXV.

466. *Determinare centrum oscillationis in Cono ex centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Sit semidiameter basis $BC = b$, $CP = x$, $AC = a$, erit $AP = a - x$, consequenter ob $AC : BC = AP : PM$ (§. 268 *Geom.*), $PM = y = (ab - bx) : a$ $= b - bx : a$, $y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$, & y^4 $= b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$. Tab. II. Fig. 15.

Habemus adeo (§. 454):
$$x^2y^2\,dx = b^2x^2\,dx - \frac{2b^2x^3\,dx}{a} + \frac{b^2x^4\,dx}{a^2}$$
$$\tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{4}b^4\,dx - \frac{b^4x\,dx}{a} + \frac{6b^4x^2\,dx}{4a^2} - \frac{b^4x^3\,dx}{a^3} + \frac{b^4x^4\,dx}{4a^4}$$
$$xy^2\,dx = b^2x\,dx - \frac{2b^2x^2\,dx}{a} + \frac{b^2x^3\,dx}{a^2}$$

$$\int x^2y^2\,dx = \tfrac{1}{3}b^2x^3 - \frac{b^2x^4}{2a} + \frac{b^2x^5}{5a^2} = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{30a^2}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4\,dx = \tfrac{1}{4}b^4x - \frac{b^4x^2}{2a} + \frac{b^4x^3}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{4a^3} + \frac{b^4x^5}{20a^4}$$
$$= \frac{5a^4b^4x - 10a^3b^4x^2 + 10a^2b^4x^3 - 5ab^4x^4 + b^4x^5}{20a^4}$$
$$\int xy^2\,dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2 - \frac{2b^2x^3}{3a} + \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{6a^2b^2x^2 - 8ab^2x^3 + 3b^2x^4}{12a^2}.$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis
$$\frac{20a^2x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^3b^2x + 30a^2b^2x^2 - 15ab^2x^3 + 3b^2x^4}{30a^4x - 40a^3x^2 + 15a^2x^3}$$
Quodsi fiat $x = a$, erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Cono integro
$$= \frac{20a^3 - 30a^3 + 12a^3}{30a^2 - 40a^2 + 15a^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^4b^2 + 30a^4b^2 - 15a^4b^2 + 3a^4b^2}{30a^5 - 40a^5 + 15a^5} = \tfrac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}.$$

Si al-

Si altitudo Coni fuerit semidiametro basis æqualis, erit $a=b$, adeoque $b^2: a=a$. Unde distantia centri oscillationis in Cono rectangulo a puncto suspensionis $\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}a=a$.

PROBLEMA LXXXVI.

467. *Determinare centrum oscillationis in Hemisphærio ex centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Quoniam abscissæ hic computantur a centro, si radius circuli sit r, erit $y^2=r^2-x^2$) §. 377 *Anal.*) & $y^4=r^4-2r^2x^2+x^4$. Habemus itaque (§. 454):

$$x^2y^2dx=r^2x^2dx-x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx=\tfrac{1}{4}r^4dx-\tfrac{1}{2}r^2x^2dx+\tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx=r^2xdx-x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx=\tfrac{1}{3}r^2x^3-\tfrac{1}{5}x^5=\frac{5r^2x^3-3x^5}{15}$$

$$\int\tfrac{1}{4}y^4dx=\tfrac{1}{4}r^4x-\tfrac{1}{6}r^2x^3+\tfrac{1}{20}x^5=\frac{15r^4x-10r^2x^3+3x^5}{60}$$

$$\int xy^2dx=\tfrac{1}{2}r^2x^2-\tfrac{1}{4}x^4=\frac{2r^2x^2-x^4}{4}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20r^2x-12x^3}{30r^2-15x^2}+\frac{15r^4-10r^2x^2+3x^4}{30r^2x-15x^3},$$

aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x, $\frac{10r^2x^2-9x^3+15r^4}{30r^2x-15x^3}$.

Quodsi fiat $x=r$, prodibit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Hemisphærio integro

$$=\frac{10r^4-9r^4+15r^4}{30r^3-15r^3}=\tfrac{16}{15}r.$$

SCHOLION.

468. *Non absimili modo inveniri potest centrum oscillationis Conoidis & Sphæroidis dimidii ex centro basis suspensi. Potest etiam punctum suspensionis* h *extra figuram assumi, ut distantia penduscli* P *ab axe oscillationis sit* Ph, *atque ab abscissa figuræ* AP *differat quantitate* Ah, *veluti si figura oscillans ex filo suspendatur: quo in casu* HUGENIUS *reperit in Sphæra ex filo tenui suspensa distantiam centri oscillationis esse longitudinem fili & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compositam ex semidiametro sphæra ac longitudine fili & semidiametrum ipsam* (a), *hoc est, si filum* $=l$, *radius* $=r$, $l+r+\frac{2r^2}{5(l+r)}$. Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA LXXXVII.

469. *Determinare quantitatem pedis horarii.*

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas semicycloides suspenso, & singulas oscillationes singulis minutis secundis aut eorum semissibus absolvente (§. 382) instructum, & secunda temporis scrupula indice peculari monstrans ad motum stellarum ea ratione componatur quæ inferius in *Astronomia* exponitur.

2. Globus plumbeus ex filo tenui suspensus (§. 377) leniter impellatur, ut nonnisi exiguos arcus describat, quo singulæ oscillationes sint isochronæ (§. 383), & tamdiu augeatur vel minuatur fili longitudo, donec oscillationes singulis minutis secundis absolvantur.

3. Quo-

(a) In *Horolog. Oscillat.* Part. IV. Prop. 22. fol. 142.

3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compositam ex semi-diametro & longitudine fili atque semidiametrum ipsam definiunt distantiam centri oscillationis ab axe (§. 468); earundem pars tertia quantitatem pedis horarii constituit. (§. 425).

SCHOLION I.

470. HUGENIUS (a) *hoc modo invenit, pedem horarium esse ad Parisiensem ut* 881 *ad* 864, *hoc est, longitudo penduli simplicis oscillationes singulas singulis minutis secundis absolventis esse trium pedum Parisiensium cum octo lineis & dimidia. Monet autem pedem Parisiensem ad Rhenanum esse ut* 144 *ad* 139, *hoc est, quinque suis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.*

SCHOLION II.

471. *Quodsi gravitas omnibus in locis eadem esset; pedes horarius mensura foret universalis & perpetua, quemadmodum* HUGENIUS *contendit: sed cum eandem variari nunc constet pro diversa Æquatore distantia (§. 390); nonnisi iis in locis eadem penduli simplicis minuta secunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis discrepant. Quo itaque mensura vere universalis haberetur, opus præterea esset, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diversis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorsus indignum censeri debet; hactenus nec per experimenta constare, nec demonstratum esse, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot seculorum decursum, gravitas non mutetur.*

(a) *Horolog. Oscillat.* Part. IV. Prop. 25. fol. 152. & 153.

THEOREMA LXIII.

472. *Spatium descensus perpendicularis gravium intra minutum secundum temporis est ad semissem longitudinis penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis respondent, in ratione duplicata peripheriæ ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ter sumtus, seu longitudo penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis horariis respondent (§. 425) $= a$, tempus descensus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quæsita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d : p$; erit $t = d : p$ (§. 387). Est vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2}a : x$ (§. 87), adeoque $t^2 x = \frac{1}{2}a$, hoc est, si valor ipsius t modo inventus substituatur, $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2}a$, seu $d^2 x = \frac{1}{2}ap^2$. Ergo $x : \frac{1}{2}a = p^2 : d^2$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d : p = 113 : 355$ (§. 427 *Geom.*) & $a = 3' 8\frac{1}{2}''$, seu 737 linearum dimidiarum pedis Parisiensis (§. 470); erit $x = ap^2 : 2d^2 = 737. 126025 : 25538 = 1818''' = 15' 1'' 8'''$ seu $15' 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

474. *Hæc cum experimentis accuratissimis prorsus convenire observavit* HUGENIUS (b).

CAPUT

(b) In *Horolog. Oscillat.* Part. IV. Prop. 25. fol. 155.

CAPUT XI.

De Motu Projectorum.

DEFINITIO XLIX.

475. *Grave perpendiculariter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO L.

476. *Grave horizontaliter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO LI.

477. *Grave oblique projici dicitur*, si impellitur secundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO LII.

Tab. IV. Fig. 50. 478. *Angulus elevationis* RAB est, quem efficit linea directionis corporis projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA LXIV.

479. *Si corpus grave perpendiculariter projicitur, perpendiculariter ascendit.*

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis (§. 475). Quare cum gravitas secundum eandem directionem vi impressæ resistat (§. 215); directionem mutare nequit, sed motum tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter ascendit (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA LXV.

480. *Si corpus grave horizontaliter projicitur, motu suo parabolam describit in medio non resistente.* Tab. IV. Fig. 49.

DEMONSTRATIO.

Corpus enim projectum vi impressa uniformiter urgetur secundum rectam AR (§. 71); sed vi gravitatis secundum rectam AC, quæ ad rectam AR, lineæ horizontali (*ex hypothesi*) parallelam perpendicularis (§. 215). Jam si vi impressa corpus pervenisset in Q, vi gravitatis descendit interea per QM, adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus secundum directionem AR semper est uniformis, *per demonstr.* spatia AQ & Aq sunt ut tempora (§. 32). Sed spatia QM & qm, sunt ut temporum quadrata (§. 86.). Est ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc est, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (§. 257 *Geom.*). Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm est parabola (§. 402 *Analys. fin.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

481. *Equidem cum gravia versus centrum Telluris tendant* (§. 213), *rectæ* QM *&* qm *in eodem concurrere debent, adeoque parallelæ non sunt* (§. 82 Geom.). *Enim-*

Tab. IV. Fig. 49. *vero si tota altitudo AC, per quam decidit grave secundum directionem AR projectum, sit exigua admodum pars distantiæ à centro Telluris (§. 216.); pro parallelis, citra errorem experimento ullo definiendum, haberi possunt.*

THEOREMA LXVI.

Tab. IV. Fig. 50. 482. *Si corpus grave oblique, sive sursum, sive deorsum, projicitur in medio non resistente; motu suo parabolam describit.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis sursum projecti AR. Cum corpus projectum, si gravitatis actio cessaret, eandem uniformiter describeret (§. 71); positis AQ, Qq, qh & hR æqualibus, erunt AQ & Aq ut tempora (§. 32.). Quodsi AB sit linea horizontalis, & QM, qm &c. ita ducantur, ut continuatæ in T, t &c. sint ad AB perpendiculares; erunt QM, qm &c. altitudines, per quas vi gravitatis descendit interea corpus projectum, dum ex A in Q, q &c. pervenisset (§. 215). Quare si AS ducatur ad AB perpendicularis; erit rectis QM, qm &c. parallela (§. 256 *Geom.*). Ductis porro PM, pm &c. ipsi AR parallelis; erit PM=AQ, pm=Aq &c. AP=QM, Ap=qm &c. (§. 257 *Geom.*), adeoque AP : Ap=$PM^2 : pm^2$, (§. 86). Est igitur AMB parabola, cujus diameter AS (§. 416. *Analys. finit.*). *Quod erat unum.*

Tab. IV. Fig. 51. II. Sit similiter linea directionis corporis deorsum projecti AR in partes æquales AQ, Qq &c. divisa & RS linea horizontalis. Ducta AS ad RS perpendiculari & QM, qm &c. eidem AS; PM vero, pm &c. ipsi AR parallelis: eodem, quo ante, modo demonstratur, esse AP : Ap =$PM^2 : pm^2$. Quare AMm denuo est parabola, cujus diameter AS (§. *cit. Analys. finit.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

483. Est ergo parameter diametri parabolæ AS tertia proportionalis ad AP & PM: sive QM & AQ (§. *cit. Analys. finit.*), hoc est, ad spatium, per quod grave dato tempore descendit, & ad celeritatem spatio, quod vi impressa eodem tempore describit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM II.

484. Cum spatium uno minuto secundo à gravi quocunque perpendiculariter cadendo confectum notum sit, nempe $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium (§. 473); parameter diametri parabolæ describendæ invenitur, si spatii, quod uno minuto secundo projectile vi impressa percurrit, quadratum per $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium dividatur (§. 302. *Arithm.*)

COROLLARIUM III.

485. Si ergo velocitas projectorum eadem, spatia eodem tempore vi impressa descripta æqualia sunt (§. 33); consequenter eadem parabolarum, quas motu composito percurrunt, parameter invenitur (§. 177 *Arithm.*)

COROLLARIUM IV.

486. Si a parametro diametri subtrahatur ipsius altitudinis AP quadruplum, parameter axis relinquitur (§. 416 *Analys. finit.*), cujus quarta pars est distantia verticis axis a foco parabolæ (§. 396 *Analys. finit.*). Parabola igitur describi potest, data celeritate projectorum (§. 400 & 401 *Analys. finit.*) & (§. 484 *Mech.*)

COROL-

COROLLARIUM V.

487. Linea directionis projectilis AR parabolam in A tangit (§. 414, 415 *Analys. finit.*)

DEFINITIO LIII.

488. *Semita* est Parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum describit.

DEFINITIO LIV.

Tab. IV. Fig. 50. 489. *Amplitudo* (scilicet semitæ) est recta horizontalis AB semitam AMB subtendens.

THEOREMA LXVII.

490. *Projectile temporibus æqualibus per æqualia spatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB semita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Qq &c. divisa. Demittantur perpendiculares QT, qt, &c. erunt AT, Tt &c. spatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes semitæ AM, Mm, &c. percurrit. Quoniam projectile vi sola impressa uniformiter describeret rectas AQ, Qq &c. (§. 71); AQ, Qq &c. sunt ut tempora (§. 32). Est vero AQ : Qq = AT : Tt (§. 268 *Geom.*). Ergo AT & Tt sunt ut tempora; consequenter temporibus æqualibus etiam AT & Tt æquantur. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXXVIII.

491. *Dato angulo elevationis* RAB, *una cum amplitudine* AB; *invenire parametrum diametri* AS *semitæ* AMS.

RESOLUTIO.

Sit sinus anguli elevationis $= a$, cosinus $= b$, sinus totus $= t$, amplitudo AB $= c$, parameter $= x$. Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis RAB (§. 3, 11, *Trigon.*) adeoque Tab. IV. Fig. 50.

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = c : \frac{ac}{b}$$

Est itaque BR = AS (§. 257 *Geom.*) $= ac : b$.

Porro $b : t = AB : AR$

$$b : t = c : \frac{tc}{b}$$

Est itaque AR = SB (§. *cit.*) $= tc : b$.

Quare ob x. AS = SB² (§. 416 *Analys. finit.*)

$$acx : b = c^2 t^2 : b^2$$

$$ax = ct^2 : b$$

$$x = ct^2 : ab$$

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c : x$. Est vero $\frac{t^2}{b}$ secans anguli elevationis RAB (§. 26 *Trigon.*). Habemus itaque sequens

Theorema. Amplitudo semitæ AB est ad parametrum diametri AS, ut sinus anguli elevationis RAB ad ejus secantem.

COROLLARIUM I.

492. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§. 491), adeoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 93 *Arithm.*) erit etiam $2abx : 2t^2 = c$; consequenter $t : \frac{2ab}{t} = \frac{1}{2}x : c$. Est vero $2ab : t$ sinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325 *Analys. finit.*).

Ergo semiparameter est ad amplitudinem AB ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM II.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem est (§. 485.). Quare cum sit semiparameter semitæ in uno casu ad amplitudinem, ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis; & semiparameter semitæ in altero casu ad amplitudinem, ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis (§. 492); amplitudines sunt ut sinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum existente eadem (§. 196 *Arithm.*), & ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc casu constans est (§. 173 *Arithm.*).

THEOREMA LXVIII.

494. *Si eadem maneat projectilis celeritas; amplitudo AB maxima est sub angulo elevationis 45°: æquales vero sunt amplitudines sub angulis elevationis a semirecto æqualiter differentibus.*

DEMONSTRATIO.

Cum ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem constans sit, celeritate projectilis existente eadem (§. 493); crescente sinu anguli dupli elevationis crescit amplitudo. Quare cum sinus anguli elevationis 45° dupli sit radius, quo major sinus non datur; maxima sit necesse est amplitudo sub sinu anguli elevationis 45°. *Quod erat unum.*

Jam cum idem sit sinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5 *Trig.*), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, si simpli a semirecto differant æqualiter; amplitudines eo in casu æquales sint necesse est (§. 493). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut sinus totus ad sinum anguli elevationis dupli, ita semiparameter ad amplitudinem (§. 492), & sinus totus sinui anguli elevationis dupli æqualis, si is 45°; sub angulo elevationis 45° amplitudo semiparametro æquatur.

PROBLEMA LXXXIX.

496. *Data amplitudine maxima; determinare amplitudinem sub angulo elevationis alterius cujuscunque, celeritate manente eadem.*

RESOLUTIO.

Quoniam sinus totus est sinus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (§. 494); fiat ut sinus totus ad sinum anguli dupli elevationis cujuscunque alterius, ita amplitudo maxima ad quæsitam (§. 493).

E. g. Sit jactus maximus, seu semirectus alicujus tormenti 6000 passuum; & quæratur longitudo jactus graduum 30. Reperietur 5196 passuum.

Log. sin. tot.	10.0000000
Log. sin. 60	9.9375306
Log. 6000	3.7781512
Log. quæs.	13.7156818, cui

in tabulis respondent 5196.

PROBLEMA XC.

497. *Data celeritate projectilis, invenire amplitudinem maximam.*

RESO-

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per spatium, quod vi impressa, dato tempore, e. gr. uno secundo minuto, percurrere valet: non alia re opus est, quam ut parameter semitæ inveniatur (§. 484). Hujus enim semissis est amplitudo quæsita (§. 495).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum secundum 1000 pedes Parisienses, seu 12000″, conficere valeat. Quodsi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter semitæ maximæ 795580″ seu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum constituta sunt, projectile attingere potest.

PROBLEMA XCI.

498. *Data amplitudine maxima, invenire celeritatem projectilis, seu spatium horizontale intra minutum secundum conficiendum.*

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ sit parameter semitæ (§. 495); inter duplum amplitudinis maximæ & spatium quod intra minutum secundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe, 181 digitorum, qualium 12 est pes Parisiensis, quæratur numerus medius continue proportionalis (§. 302 *Arithm.*) Is enim erit spatium à projectili intra unum minutum secundum conficiendum (§. 495).

Si amplitudo maxima 500 pedum Parisiensium, erit parameter maxima 1000 pedum, seu 12000 digitorum; & hinc spatium quæsitum $= \sqrt{(12000.181)} = 120$ pedum Parisiensium cum 9 unciis seu digitis.

PROBLEMA XCII.

499. *Determinare altitudinem maximam* tm, *ad quam grave oblique projectum ascendit.* Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $BR = b$, $AT = x$; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$) §. 417 *Geom.*) Porro (§. 268 *Geom.*)

$$AB : BR = AT : TQ$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (§. 416 *Analys. finit.*)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$

$$a^2 + b^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

Quare $TM = bx : a - bx^2 : a^2$. Cum vero *tm* sit maximum aliquod, per hypoth. erit (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$

$$ab - 2bx = 0$$

$$ab = 2bx$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in *t*, & ex puncto *t* erigatur perpendicularis *tm*; erit *tm* altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum ascendit.

THEOREMA LXIX.

500. *Si altitudo maxima* tm, *ad quam grave juxta directionem* AR *projectum ascendit, continuetur usque ad lineam directionis* AR; *erit recta* qm *inter semitam* AmB *& lineam directionis* AR *intercepta eidem æqualis: & si, in extremitate semitæ erigatur perpendicularis* BR, *erit* $tm = \tfrac{1}{4}BR$.

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 50. Quoniam AB : At = AR : Aq (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2}$AB (§. 499); erit etiam $Aq = \frac{1}{2}$AR. Est vero $AR^2 : Aq^2$ = BR : qm (§. 416 *Analys. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4}AR^2$, *per demonstrat.* erit quoque $qm = \frac{1}{4}$BR. *Quod erat unum.*

Sed, ob AB : At = BR : tq (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2}$AB (§. 499) $tq = \frac{1}{2}$BR, hinc $\frac{1}{2}tq = \frac{1}{4}$BR. Est vero $qm = \frac{1}{4}$BR *per demonstr.* Ergo $qm = \frac{1}{2}tq$ (§. 87 *Arithm.*) = tm. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XCIII.

501. *Data amplitudine* AB *&* angulo elevationis BAR; *determinare altitudinem jactus maximam* tm.

RESOLUTIO.

Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis BAR (§. 3, 11 *Trigon.*) Quare si fiat ut cosinus anguli elevationis ad sinum ejusdem, ita amplitudo AB ad quartum; reperietur BR, cujus quarta pars est altitudo jactus maxima tm (§. 500).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate, projectilis amplitudo maxima (§. 497), & inde porro amplitudo sub angulo elevationis quocunque invenitur (§. 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri potest (§. 501).

THEOREMA LXX.

503. *Altitudo jactus* tm *est ad octavam parametri partem, ut sinus versus anguli dupli elevationis ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli elevationis BAR = a, cosinus = b, sinus totus = t, parameter = x; erit amplitudo AB = $abx : t^2$ (§. 492) & (§. 501.) Tab. IV. Fig. 50.

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2 x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4}$BR (§. 500) $= a^2 x : 4t^2 = 2a^2 x : 8t^2$. Est vero $(b^2 - a^2) : t$ cosinus anguli dupli elevationis (§. 325 *Analys. finit.*), & hinc sinus versus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 - a^2) : t$ (§. 2 *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$ consequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem sinus versus $= 2a^2 : t$. Est adeo ut t sinus totus ad $2a^2 : t$ sinum versum anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

504. Quoniam ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in uno casu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus, & ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in altero quocunque casu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503.); velocitate autem existente eadem parameter quoque in diversis angulis elevationis eadem est (§. 484); erunt altitudines jactum sub diversis angulis elevationum ut sinus versi eorumdem angulorum duplorum (§. 196 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

505. Si sinus anguli elevationis in uno casu a, in altero c, velocitate existente eadem, altitudines jactuum sunt ut $a^2 x : 4t^2$ ad $c^2 x : 4t^2$ (§. 503), hoc est ut a^2 ad c^2 (§. 181 *Arithm.*); adeoque in ratione duplicata sinuum angulorum elevationum.

PRO-

PROBLEMA XCIV.

Tab. IV. Fig. 50. 506. *Data celeritate projectilis, altitudine feriendi* In, *& ejus distantia horizontali* AI; *invenire jactus angulum elevationis.*

RESOLUTIO.

Cum, data celeritate projectilis, parameter diametri AS detur (§. 483); sit ea $=a$. Sit præterea $In=b$, $AI=c$, sinus totus $=t$, tangens anguli quæsiti $=x$. Quodsi AI sumatur pro sinu toto, erit h I tangens anguli h AI (§. 7 *Trigon.*) Est itaque

$$t : x = AI : Ih$$

$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $hn = Ar = cx : t - b$, & $rn^2 = acx : t - ab$ (§. 416 *Anal. fin.*). Est vero etiam $rn^2 = Ah^2 = AI^2 + Ih^2$ (§. 417 *Geom.*) $= c^2 + c^2 x^2 : t^2$. Quare

$$c^2 + c^2 x^2 : t^2 = acx : t - ab$$

$$c^2 x^2 : t^2 - acx : t = -ab - c^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$c^2 x^2 : t^2 - acx : t + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2$$

$$cx : t - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$cx : t = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$$

$$x = (\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)})\, t : c$$

Est igitur ut c ad $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a - ab - c^2)}$ ita sinus totus t ad tangentem anguli elevationis quæsitum RAB.

COROLLARIUM I.

507. Si $ab + c^2 = \tfrac{1}{4}a^2$, seu $\tfrac{1}{4}a = b + c^2 : a$ erit $x = at : 2c$, adeoque in hoc casu est $2c : a = t : x$, hoc est, ut dupla distantia objecti feriendi AI ad parametrum, ita sinus totus ad tangentem anguli elevationis. Tab. IV. Fig. 50.

COROLLARIUM II.

508. Si $ab + c^2 > \tfrac{1}{4}a^2$; $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ab - c^2)}$ radix imaginaria evadit (§. 71 *Anal. finit.*); adeoque valor ipsius x est impossibilis (§. *cit.*). Quare in hoc casu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA LXXI.

509. *Tempora jactuum sub diversis elevationis angulis, velocitate existente eadem, sunt ut sinus angulorum elevationis.*

DEMONSTRATIO.

Sit sinus totus $=t$, sinus anguli elevationis BAR $=a$, cosinus $=b$, parameter semitæ $=x$; erit secans anguli elevationis $=t^2 : b$, adeoque $\frac{t^2}{b} : a = x :$ AB (§. 491); consequenter AB $= abx : t^2$. Quare cum sit (§. 33 *Trigon.*)

$$b : t = AB : AR$$

$$b : t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t}$$

adeoque AR $= ax : t$; erit ut sinus totus t ad sinum anguli elevationis in casu uno, ita parameter ad AR; & ut sinus totus ad sinum anguli elevationis in casu alio, ita parameter ad AR in casu alio. Quoniam vero celeritas in utroque casu eadem, *per hypoth.* parameter quoque eadem est (§. 485). Ergo ut sinus angulorum elevationis, ita sunt rectæ AR in diversis elevationum angulis (§. 196 *Arithm.*). Enimvero rectæ AR sunt spatia, quæ projectilia

eadem

Tab. IV. Fig. 50. eadem celeritate uniformiter describunt, cessante gravitatis actione (§. 71). Tempora igitur jactuum sunt ut ista spatia (§. 32); consequenter ut sinus angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA XCV.

510. *Data celeritate projectilis, una cum angulo elevationis* RAB; *invenire amplitudinem* AB, *altitudinem jactus* tm *& semitam* AmB *describere.*

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB erigatur perpendicularis AD, quæ sit altitudo, unde projectile cadendo celeritatem datam acquirere valet (§. 92).
2. Super AD describatur semicirculus AQD, lineam directionis AR secaturus in Q.
3. Per Q ducatur ipsi AB parallela Cm fiatque CQ=Qm.
4. Ex puncto m demittatur ad AB perpendicularis mt.
5. Denique per verticem m describatur parabola AmB parametro 4CD. (§. 393 *Analys. fin.*)

Dico hanc esse semitam quæsitam, 4CQ ejus amplitudinem & tm jactus altitudinem.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & m sint recti *per constr.* & verticales ad Q æquales (§. 156 *Geom.*), sit etiam CQ=Qm *per constr.* erit qm=AC (§. 251 *Geom.*). Est vero tm=AC (§. 257 *Geom.*). Ergo qm=mt (§. 87 *Arithm.*); consequenter tm est altitudo jactus (§. 500.), & projectile parabolam AmB describit, cujus adeo amplitudo AB=2 At (§. 499)=2 Cm=4CQ, ob CQ=Qm, *per constr. Quod erat primum, secundum & tertium.* Tab. IV. Fig. 50.

Denique quia At=Cm (§. 257 *Geom.*) = 2CQ; At² = 4CQ² = 4DC. AC (§. 327, 377 *Geom.*) = 4DC. tm, *per demonstr.* Ergo 4DC est parameter parabolæ in vertice m (§. 388 *Analys. finit.*). *Quod erat ultimum.*

COROLLARIUM I.

511. Data igitur projectilis celeritate, dantur amplitudines & altitudines omnium jactuum, qui fieri possunt, eadem opera. Ducta enim EA, erit, sub angulo elevationis EAB, altitudo AI, amplitudo 4IE; sub angulo elevationis FAB, altitudo AH, amplitudo 4HF (§. 510).

COROLLARIUM II.

512. Cum AB sit ad AD perpendicularis, *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 304 *Geom.*); & hinc angulus ADQ angulo elevationis RAB æqualis (§. 323 *Geom.*); consequenter AIQ est duplus anguli elevationis (§. 313 *Geom.*). Est itaque CQ quarta pars amplitudinis (§. 510) sinus rectus; AC altitudo jactus (§. cit.) sinus versus anguli dupli elevationis (§. 2 *Trigon.*).

SCHOLION.

513. *Hinc facili opera deducuntur, quæ supra per analysin invenire docuimus, ut ejus in hisce usum ostenderemus.*

PROBLEMA XCVI.

514. *Data altitudine jactus* tm, *aut amplitudine* AB, *una cum angulo elevationis*

Tab. IV. Fig. 50. *vationis* RAB; *invenire projectilis celeritatem qua ab initio fertur, hoc est, altitudinem* AD, *unde cadendo istiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum $AC = tm$ sit sinus versus, $CQ = \frac{1}{4}AB$ (§. 512) sinus rectus anguli AIQ (§. 2 *Trig.*), quem esse anguli elevationis RAB duplum ex demonstratione Problematis 95 (§. 510) constat: quæratur ad sinum versum anguli dupli elevationis, sinum totum & altitudinem jactus: vel ad sinum rectum anguli dupli elevationis, sinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ sive IA, cujus duplum AD est altitudo quæsita (§. *cit.*)

SCHOLION.

515. *Potuisset quoque Curva projectionis analytice investigari & quidem in omni gravitatis hypothesi possibili: quod ut appareat, sequens subjungere lubet Problema.*

PROBLEMA XCVII.

516. *Invenire Curvam projectionis, directionibus gravium suppositis parallelis, in medio non resistente.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 49. I. Ponamus corpus grave horizontaliter projici secundum directionem AR, AMm esse Curvam projectionis, AQ abscissam, QM semiordinatam, aut, si mavis AP abscissam, PM semiordinatam. Sit $AP = QM = x$, $AQ = PM = y$. Intelligatur semiordinata pm alteri PM infinite propinqua: erit arculus curvæ infinite parvus $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ adeoque $Mm^2 = dx^2 + dy^2$ (§. 144 *Analys. infin.*) Quoniam projectile in medio non resistente movetur *per hypoth.* motus, quo vi impressa movetur, æquabilis (§. 71). Porro cum grave, dum motu composito per Mm fertur (§. 241), per spatiolum infinite parvum MO (recta MO parallela & $= Pp$) descendens isto tempusculo etiam æqualiter moveatur; erit tam MO, quam Om in ratione composita celeritatis & temporis (§. 34). Quodsi ergo ponamus AQ sive PM exponere tempus (§. 31); erit tempusculum, quo projectile per arculum Mm defertur, $= dy$. Fiat celeritas projectili impressa, quæ constans est, 1; erit Om ut dy. Sit porro celeritas a gravi cadendo in M acquisita $= v$; erit MO ut vdy. Habemus itaque Mm^2 ut $dy^2 + v^2dy^2$, consequenter

$$dy^2 + v^2dy^2 = dy^2 + dx^2$$

adeoque
$$v^2dy^2 = dx^2$$
$$vdy = dx$$
$$dy = dx : v$$
$$y = \int v^{-1} dx$$

Data igitur celeritate v a gravi in M acquisita per x; reperietur æquatio ad Curvam projectionis.

Jam, in hypothesi GALILÆI, $v = \sqrt{x}$ $= x^{1:2}$ (§. 87).

Ergo $dy = x^{-1:2}dx$
hoc est $y = 2x^{1:2} = 2\sqrt{x}$
$$y^2 = 4x$$

Tab. IV. Fig. 49. Est ergo in hypothesi *Galilæana* Curva projectionis parabola, cujus parameter 4 (§. 388 *Anal. fin.*) : quemadmodum superius demonstratum (§. 480). Quoniam $x : y = y : 4$, hoc est, AP : PM = PM : 4, sive QM : AQ = AQ : 4; parameter curvæ projectionis est tertia proportionalis ad spatium, quod in tempore quocunque grave cadendo conficit, & spatium, quod vi impressa describit: quemadmodum supra reperimus (§. 480).

Sit in hypothesi *Baliana* (§. 102) v ut x: erit

$$dy = x^{-1}\, dx = \frac{dx}{x}$$

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

$$= lx \text{ (§. 243 } \textit{Analys. infin.})$$

Sunt igitur abscissæ AQ, Aq &c. ut logarithmi semiordinatarum QM, qm &c. consequenter curva projectionis est Logarithmica, cujus subtangens = 1 (§. 553 *Analys. finit.*)

Tab. IV. Fig. 50. II. Quod si directio AR fuerit ad horizontem AB obliqua, seu si grave oblique projiciatur (§. 477), eodem modo solutio procedit. Ducatur pm ipsi AR parallela & intelligatur alia eidem infinite propinqua. Fiat $Aq = pm = y$, $qm = Ap = x$; erit arculus infinite parvus curvæ projectionis semiordinatis istis interceptus $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; adeoque quadratum ejusdem $= dx^2 + dy^2$ ut ante. Sit celeritas constans qua mobile fertur = 1, celeritas vero per $qm = Ap$ acquisita $= v$; tempusculo per arculum infinite parvum consumto in spatiolis dy & dx, erit $dy : dx = 1 : v$ (§. 38), adeoque in hypothesi GALILÆI $dy : dx = 1 : x^{1:2}$ prodit; igitur ut ante

$$\frac{dx}{x^{1:2}} = x^{-1:2}\, dx = dy$$

$$2x^{1:2} = 2\sqrt{x} = y$$

$$4x = y^2$$

Unde patet in hoc quoque casu curvam projectionis esse parabolam; quemadmodum supra ostendimus (§. 482).

SCHOLION.

517. *Supposuimus directiones parallelas; propterea quod lineæ in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi possunt citra errorem assignabilem in iis distantiis, in quibus experimenta capere licet. Quod si tamen desideraveris Problema solvi in hypothesi linearum directionis convergentium; solutionem dudum dedit Vir summus* NEWTONUS *(a): dederunt deinde Geometra celeberrimus* HERMANNUS *(b), aliique ab eodem laudati (c). Nos sequentem subjungimus, ne quid in hoc argumento desiderari possit.*

PROBLEMA XCVIII.

518. *Invenire Curvam projectionis, in hypothesi gravitatis cujuscunque, directionibus in centro Telluris convergentibus.*

RESOLUTIO.

Sit Curva projectionis AMR, & linea directionis ex centro Telluris C ducta CN. Tab. XV. Fig. 16.

(a) In *Princip. Philos. Natur. Mathem.* Prop. 41. Lib. 1.

(b) In *Phoronomia* Lib. 1. Prop. 23. §. 162.

(c) Loc. cit. §. 164.

Tab. XVI. Fig. 160. CN. Intelligatur Cn radius ipſi CN infinite propinquus, radio $CA = CN = Cn$ deſcripto arcu AB. Ducantur porro radiis CM & Cm arcus concentrici PM & pm. Sit denique AH altitudo, per quam grave cadendo acquirit eam celeritatem, qua vi impreſſa movetur, ac deinde per curvam AMR deſcendat vi impreſſa & velocitate vi gravitatis quomodocunque accelerata. Dicatur jam $AH = a$, $AP = x$, $AC = b$, arcus $AN = y$; erit $Pp = RM = dx$, $Nn = dy$, $PC = MC = mC$ (§. 4 *Analyſ. infin.*) $= b - x$. Porro, propter ſectores ſimiles CNn & CRm, erit (§. 142, 412 *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$
$$b : b-x = dy$$

adeoque $Rm = (b-x)\, dy : b$

$$mR^2 = (b-x)^2 dy^2 : b^2$$
$$MR^2 = dx^2$$
$$Mm^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile urgetur per MR vi gravitatis, ſeu quæ cadendo per altitudinem AP acquiritur, $= z$; altera vero, qua per arculum mM motu compoſito fertur, ſeu quæ cadendo per HP acquiritur $= v$. Quoniam in ſpatiolis infinite parvis Mm & RM motus æquabilis, $MR : Mm = z : v$ (§. 33), conſequenter

$$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2 \text{ (§. 260 \textit{Arithm.})}$$

hoc eſt, $dx^2 : \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$

$$b^2 dx^2 : b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2 = z^2 : v^2$$
$$v^2 b^2 dx^2 = b^2 z^2 dx^2 + (b-x)^2 z^2 dy^2$$
$$v^2 b^2 dx^2 - b^2 z^2 dx^2 = (b-x)^2 z^2 dy^2$$

Tab. XVI. Fig. 160.

$$bdx \sqrt{(v^2 - z^2)} = zdy\,(b-x)$$
$$dy = \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b-x)}$$
$$y = \int \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b-x)}$$

Quodſi jam valor ipſius v atque z exprimatur per x ex hypotheſi gravitatis; prodibit æquatio ad curvam projectionis ſpecialem.

In hypotheſi *Galilæana*, $v = \sqrt{HP} = \sqrt{(a+x)}$, & $z = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$ (§. 87). Subſtitutis itaque hiſce valoribus in æquatione differentiali generali; prodit ſpecialis

$$dy = \frac{bdx \sqrt{(a+x-x)}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{bdx \sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}}$$

Pendet adeo conſtructio hujus Curvæ a quadratura alterius curvæ, cujus abſciſſa x, ſemiordinata vero $ab\sqrt{a} : (b-x)\sqrt{x} = a^2 b : (b-x)\sqrt{ax}$. Nimirum ſi areæ hujus Curvæ dividuntur per a, ſeu rectam AH, unde projectile acquirit celeritatem qua a vi impreſſa movetur; prodeunt arcus reſpondentes AN eo modo, quem jam expoſuimus, cum de Curva Iſochrona in hypotheſi directionum in centro Telluris convergentium ageremus (§. 336). Conſtruitur autem curva, a cujus quadratura pendet conſtructio Curvæ projectionis, ope parabolæ circa axem AC, parametro AH deſcriptæ, ut ſemiordinata abſciſſæ AP reſpondens ſit $\sqrt{ax} = PS$. Eſt enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam proportionalem, & ut CP ad CA ita

Tab. XVI. Fig. 160. tertia hæc proportionalis ad semiordinatam Curvæ quadrandæ;

Fiat $b = \infty$: quo in casu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x, respectu b, $= 0$, adeoque $b - x = b$, consequenter

$$dy = \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{bdx\sqrt{a}}{b\sqrt{x}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1:2}x^{-1:2}dx$$

$$y = 2a^{1:2}x^{1:2} = 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = 4ax$$

Est igitur Curva projectionis in hoc casu Parabola (*§.* 388 *Analys. fin.*), quemadmodum ante reperimus (§. 516), & parameter $4a$ est quadrupla altitudinis AH unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem qua projicitur; prouti supra demonstratum fuit (§. 516). Tab. XVI. Fig. 160.

SCHOLION.

519. *Curva projectionis* Trajectoria *appellari solet, qua denominatione quoque utitur* NEWTONUS.

CAPUT XII.

De Motu Corporum ex Percussione.

DEFINITIO LV.

520. *Corpus perfecte durum* est, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO LVI.

521. *Corpus molle* est, quod ab ictu figuram pristinam amittit; ut argilla, sebum, cera.

DEFINITIO LVII.

522. *Corpus elasticum* est, quod ab ictu figuram quidem mutat, sed vi propria in eandem rursus restituitur. Talis est ensis, qui ad ictum incurvatur, sed statim resilit in figuram pristinam.

DEFINITIO LVIII.

523. *Corpus unum in alterum directe impingere* dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

524. Sphæra igitur A directe in alteram B impingit, si linea directionis centra utriusque jungit (§. 38 *Analys. infinit.*). Tab. IV. Fig. 5[illegible]

DEFINITIO LIX.

525. *Corpus unum in alterum indirecte* vel *oblique impingere* dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum obliquam.

DEFI-

DEFINITIO LX.

526. *Centrum percussionis* est punctum in quo ictus est maximus.

AXIOMA VIII.

527. *Actioni aequalis, sed contraria est reactio.*

SCHOLION.

528. Hoc *Legum motus principium ab Experientia petitur & a celeberrimo* NEWTONO (*a*) *his exemplis illustratur.* „Si quis, „inquit, lapidem digito premit, premitur „& hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur „etiam & equus aequaliter in lapidem: „nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem ac lapidem versus equum, „tantumque impediet progressum unius, „quantum promovet progressum alterius. „Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob aequalitatem pressionis mutuae) „subibit.

THEOREMA LXXII.

529. *Effectus pleni sunt Viribus causarum suarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit (§. 25); Vis determinata indifferens non est, adeoque ipsi determinata effectus quantitas ex necessitate respondet. Quare si vis V ut V, seclusa omni vi alia, sive adjuvante, sive impediente, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E ut E producet, consequenter vis mV ut mV (ubi m notat multiplum aut submultiplum ipsius V) producet effectum mE ut mE. Est igitur $V : mV = E : mE$ (§. 149 *Arithm.*) hoc est, Effectus pleni sunt Viribus suarum causarum proportionales. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

530. Vires igitur motum producentes, si fuerint aequales, eandem motus quantitatem producunt (§. 530), addendum mobili secundum eandem directionem progredienti (§. 76), subtrahendum vero, si secundum contrariam progredi nitatur (§. 77).

THEOREMA LXXIII.

531. *Si corpus unum* A *in alterum* B, *vel quiescens, vel tardius motum secundum eandem directionem, vel etiam secundum contrariam ipsi obvium factum, impingat; summa motuum in corporibus secundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias, eadem erit ante & post ictum.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem; sitque quantitas motus ipsius $A = a$, ipsius $B = b$: erit summa motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipsius B juxta ejusdem directionem in conflictu; incrementum quoddam motus efficit (§. 22). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 528); ob contrarias virium aequalium directiones, tantum motus subtrahitur ex A, quantum additur ipsi B (§. 531). Unde si quan-

(*a*) *Princip. Mathem. Philos. Natural.* pag. 13. Conf. *Cosmologia* nostra *generalis*, §. 316, 346.

quantitas motus ipsius B fuerit post ictum $= b+c$; erit quantitas motus ipsius A post ictum $= a-c$. Summa igitur motuum $b+c+a-c = b+a$, eadem post ictum, quæ ante ictum.

Si B quiescit, erit motus quantitas ante ictum $= 0$, adeoque motuum summa $= a$. Sed si post ictum quantitas motus ipsius B $= c$, *per demonstrata* quantitas motus ipsius A $= a - c$. Unde denuo summa motuum eadem ante & post ictum, hoc est $= a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipsius B, qua efficitur motus $a+c$, destruitur quantitas motus a & efficitur motus, secundum directionem contrariam impulsi corporis A, $= c$, *per demonstrata*. Differentia igitur motuum post ictum in corporibus B & A secundum contrarias directiones motis $= b+c+a-c$, eadem est quæ summa ante ictum $a+b$.

Si $c = a$, reactione ipsius B destruitur motus in A; adeoque corpus A quiescit, & B versus eandem plagam solum progreditur. Unde denuo summa motuum post ictum $a+b+0$ æquatur summæ ante ictum $a+b$.

Si corpora A & B sibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a-b$. Sit post conflictum quantitas motus ipsius B $= c$: destruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c. Reactione igitur ipsius B in A destruitur motus $b+c$, adeoque post conflictum remanet motus $a-b-c$. Quodsi $a > b+c$, progrediuntur A & B post conflictum juxta eandem directionem, estque summa motuum $a-b-c+c$, eadem quæ differentia $a-b$ ante ictum.

Quodsi $c+b > a$, destruitur reactione ipsius B $= c+b$ motus a & efficitur secundum contrariam directionem motus $c+b-a$, adeoque B & A resiliunt secundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum post ictum $c-c-b+a$ eadem est, quæ fuerat ante ictum $a-b$.

Denique si $b+c = a$, reactione ipsius B destruitur motus totus in A, qui adeo post ictum $= 0$. Unde summa motuum $c = a-b$, eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA LXXIII.

532. *Si duo corpora* A *&* B, *pondere æqualia & non elastica, æqualibus celeritatibus lata, sibi mutuo occurrunt; post ictum ambo quiescunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B massæ atque celeritates æquales sint, *per hypoth.* motuum quantitates æquales sunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla est. Quodsi post ictum secundum eandem directionem progrederentur; summa motuum deberet esse nulla (§. 532): secundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum secundum contrarias se mutuo urgeant eadem vi, nec ulla sit ratio, cur a se invicem resiliant, *per hypoth.* secundum directiones contrarias moveri nequeunt. Post ictum ergo ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THE-

THEOREMA LXXIV.

533. *Si corpus elateris expers* A *in aliud itidem non elasticum* B *directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; post ictum ambo eadem celeritate moventur, secundum eandem directionem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B, sive quiescens, sive segnius motum; urgebit ipsum secundum directionem suam, adeoque, cum nulla adsit ratio, cur a se invicem resiliant, *per hypoth.* si A vincat, B necessario movebitur secundum directionem ipsius. *Quod erat unum.*

Quodsi jam A & B secundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam insequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiscitur, quam habet ipsum A, motui ejus non amplius resistit, adeoque fugit; consequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA LXXV.

534. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elasticum* B *quiescens directe incurrat; celeritas post ictum est ad celeritatem ante ictum, ut pondus ipsius* A *ad ponderum* A *&* B *summam.*

DEMONSTRATIO.

Sit massa ipsius A = M, alterius B = *m*, celeritas prioris = C: erit quantitas motus ipsius A = MC (§. 22), ipsius B vero nulla; adeoque motuum summa post ictum = MC (§. 532); consequenter celeritas = MC:(M+*m*) (§. 22). Est adeo ut M+*m* ponderum summa ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

535. Quodsi corpora A & B fuerint ejusdem ponderis, erit M = *m*, adeoque celeritas post ictum = MC: 2M = $\frac{1}{2}$C. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA LXXVI.

536. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elasticum* B *tardius motum secundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas post ictum aequalis motuum summae per ponderum summam divisae.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massae M & *m*, celeritates C & *c*; erit motus quantitas ante conflictum MC & *mc* (§. 22), adeoque summa eorundem MC+*mc*: quae cum eadem sit post conflictum (§. 532), erit celeritas communis corporum A & B post eundem (MC+*mc*): (M+*m*) (§. 22). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

537. Si pondera corporum A & B fuerint aequalia, erit M = *m*, adeoque celeritas post ictum M(C + *c*): 2M = (C + *c*): 2, seu semisumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA LXXVII.

538. *Si duo corpora non elastica, pondere aequalia, diversis celeritatibus lata, sibi mutuo directe occurrant; post conflictum feruntur celeritatum semidifferentia, qua movebantur ante ictum.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit massa communis = M, celeritates sint ut C & c; erit differentia motuum M (C − c); cui cum æqualis sit post conflictum summa eorundem (§. 532), erit celeritas communis = M (C — c) : 2M = (C — c) : 2, hoc est, æqualis velocitatum ante impactum semidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

538. *Si duo corpora non elastica* A *&* B *iis celeritatibus sibi mutuo directe occurrant, quæ sunt reciproce ut pondera eorundem; ambo post ictum quiescunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m, celeritates C & c; quoniam M : m = c : C, *per hypoth.* erit mc = MC; adeoque motuum differentia ante conflictum nulla (§. 22). Ergo summa motuum post ictum cum nihilo æqualis sit (§. 532); nullus quoque post ictum erit motus, hoc est, ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXIX.

539. *Si duo corpora non elastica* A *&* B *eadem celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad summam eorundem.*

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas = C, massæ corporum A & B ut M & m; erit differentia motuum ante impactum (M − m) C (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem = (M — m) C : (M + m) (§. 22), hoc est, ut ponderum summa ad differentiam eorundem, ita celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

540. *Si duo corpora non elastica* A *&* B *quacunque celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post ictum æqualis semidifferentiæ motuum per summam ponderum divisæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & m; celeritates C & c; erit differentia motuum ante ictum MC — mc (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem (MC — mc) : (M + m) (§. 22). *Q. e. d.*

PROBLEMA XCIX.

541. *Determinare partem motus in conflictu amissam a fortiori.*

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante conflictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus ante conflictum (§. 22).
2. Similiter celeritas, qua idem fertur post conflictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus post conflictum (§. *cit.*)
3. Quod si motuum quantitatem posteriorem a priori auferas, relinquetur pars amissa.

Ex. gr.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis sibi mutuo occurrant celeritatibus C & c, erit celeritas post conflictum $= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo motus quantitas post conflictum est $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Motus ergo amissus est $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Quare motus integer ad partem amissam ut MC ad $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$, hoc est, ut $2C$ ad $C - c$, seu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

542. *Hac ergo methodo inveniri possunt Theoremata de quantitate motus in conflictu amisso & inde magnitudinem ictus æstimare licet.*

DEFINITIO LXI.

543. *Impetum* cum LEIBNITIO (*a*) appello quantitatem motus, seu id quod efficitur ducendo massam in celeritatem (§. 22), quodque adeo vi mortuæ æquipollet (§. 278).

AXIOMA IX.

544. *Si corpus aliquod non elasticum in obicem qui cedere nequit impingit; motus omnis cessat.*

COROLLARIUM.

545. Si ergo corpus quoddam non elasticum in obicem cedere nescium impingit; impetum omnem amittit (§. 543.)

SCHOLION.

546. *Propositio per experientiam satis manifesta, ut adeo eam instar Axiomatis sumere licuerit; nec opus sit ex notione elateris deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA LXXXI.

547. *Centrum percussionis idem est cum centro oscillationis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percussionis est punctum, in quo colligitur impetus omnis, seu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 527). Invenitur adeo si impetus partium considerentur instar ponderum ad lineam inflexilem ac gravitatis expertem applicatorum, hoc est, dividendo summam factorum ex impetibus partium in distantias a puncto suspensionis per summam impetuum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oscillationis (§. 431). Ergo centrum oscillationis idem est cum centro percussionis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Quæ igitur supra de centro oscillationis dicta sunt, eadem quoque de centro percussionis valent, si grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA LXXXII.

549. *Centrum percussionis idem est cum centro gravitatis, si corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur, seu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim sunt facti ex ponderibus in celeritates (§. 543). Quare si æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde est ac si eorum æque-multiplicia sumas. Sed æquiponderantium æque-multiplicia quoque æquiponderant (nam si A æquiponderet ipsi B etiam 2A ipsis 2B & in genere mA ipsis mB æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis

(*a*) In *Actis Erudit.* A. 1695. p. 174.

vitatis impetus æquivalentes disponuntur, consequenter centrum gravitatis cum centro percussionis in hoc casu coincidit.

DEFINITIO LXII.

Tab. IV. Fig. 52. 550. *Angulus Incidentiæ* DCA est quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C.

DEFINITIO LXIII.

551. Quodsi post ictum corpus reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi CE efficit ad punctum contactus, unde resilit.

THEOREMA LXXXIII.

552. *Ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ* DCA.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipsum obicem, si superficies plana, aut in rectam quæ eundem in contactu C tangit, si superficies curva; & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (§. 241. 245.) Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, sed tantum alteri DG; perinde est ac si corpus D tantum percuteret obicem vi secundum DG agente. Æstimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amisso (§. 541); impetus vero ex quantitate motus (§. 543); adeoque cum corpus idem sit, ex celeritate (§. 49), consequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 247). Est adeo impetus corporis D per DC ad impetum per DG, ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, destruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonstrat.* si vero perpendiculariter seu directe impingeret, destrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc est, per DC (§. 241). Est ergo ictus perpendicularis ad obliquum, ut DC ad DG. Sed si DC sumatur pro sinu toto, erit DG sinus anguli incidentiæ DCG (§. 2 *Trig.*). Ictus itaque perpendicularis, ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIV.

553. *Elater est æqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elasticum adhuc ulterius comprimi aut tendi potest, nec tamen comprimitur aut tenditur, *per hypoth.* Ergo tanta vi resistit, quanta comprimitur vel tenditur (§. 75). Resistit autem vi elateris (§. 522), adeoque elater æqualis est vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elasticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA LXXXV.

555. *Si corpus* H *in obicem* AB *qui cedere nescit directe impingat, sitque vel utrum-*

Tab. IV. Fig. 52. *utrumque vel alterutrum elasticum; eadem celeritate reflectitur per eandem rectam* CH, *qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, tota vis corporis B in resistentiam obicis frangendam insumeretur, motusque cessaret (§. 544). Ergo vis omnis impenditur in compressionem corporis elastici, atque adeo hoc acquirit vim elasticam isti aequalem (§. 553). Cum igitur elater, absumta vi comprimente, corpus reducat in statum pristinum, eadem vi illud repellit qua impegerat; consequenter hoc eadem celeritate resilit. Et quoniam corpus elasticum se restituit secundum directionem secundum quam compressum fuerat; (nulla enim adest ratio, quae directionem immutet); corpus resilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXVI.

556. *Si corpus elasticum* D *oblique impingit in obicem* AB *qui cedere nescit; ita post ictum resilit, ut angulus reflexionis sit aequalis angulo incidentiae.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione Theorematis 83 (§. 552) vim per DC aequipollere viribus per DG & DH, & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo post ictum remaneat vis per DH sive CF, & per vim elasticam recuperetur vis per DG sive CH (§. 555); corpus post ictum iisdem viribus urgetur per CF & CH quibus urgebatur ante conflictum; adeoque motu composito describet rectam CE dato tempore ipsi DC aequalem (§. 241), eruntque eodem tempore HE & DH aequales, utpote ab eadem vi descriptae. Sunt igitur $\triangle\triangle$ DCH & ECH aequalia, angulique cognomines aequales (*§. 204 Geom.*); consequenter cum HCA = HCF (§. *65 Geom.*) DCA = ECF (§. *91 Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 52.

PROBLEMA C.

557. *Determinare angulum* ECF; *sub quo resilire debet corpus in* C *oblique impingens, ut ex* D *in* E *via brevissima perveniat; supposita nempe reflexione in* C.

RESOLUTIO.

Demissis ex D & E perpendicularibus DG & EF; fiat DG $=a$, EF $=b$, FG $=c$, CG $=x$, erit CF $=c-x$, $DC^2=aa+xx$, $CE^2=bb+cc-2cx+xx$. Quoniam DC + CE est minimum aliquod, *per hypoth.* fiat (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$\sqrt{(aa+xx)}+\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=y$$

$$\text{erit } \frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}}+\frac{xdx-cdx}{\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}}=dy=0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}+(x-c)\sqrt{(a^2+x^2)}=0$$

$$x\sqrt{(b^2+c^2-2cx+x^2)}=(c-x)\sqrt{(a^2+x^2)}$$

hoc est, CG. CE = CF. CD

Est itaque CG : CD = CF : CE (§. 299 *Arithm.*) Jam si punctum E supponatur in

Tab. IV. Fig. 52. in recta ipsi AB parallela: erit EF = DG (§. 226 *Geom.*); adeoque si DC sumatur pro sinu toto, erit GC sinus anguli GDC, & si CE sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli CEF (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum similium sinus (§. 12 *Trigon.*); adeoque anguli GDC & CEF (§. 141 *Geom.*), consequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§. 246 *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D post impactum in C ita resilit, ut angulus reflexionis ECF sit æqualis angulo incidentiæ DCG (§. 557); ex D in E, supposita reflexione in C, via brevissima pervenit.

PROBLEMA CI.

559. *Determinare punctum* C, *in quod impingere debet corpus* D, *ut resiliens incurrat in corpus* L.

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendiculum $= a$. Dato puncto L, datur LI $= b$, consequenter GI $= c$. Fiat GC $= x$, erit CI $= c - x$. Et quia angulus LCI = DCG (§. 557), G vero & I recti, *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*).

DG : LI = GC : CI

$a : b = x : c - x$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§. 190 *Arithm.*) hoc est, DG + LI : DG = GI : GC.

THEOREMA LXXXVII.

560. *Si corpus elasticum* A *in aliud quiescens* B *eidem æquale directe incurrat; post ictum quiescet* A, *&* B *movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur* A.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non essent elastica, utrumque post ictum moveretur secundum eandem directionem celeritate dimidia (§. 536). Sed cum vis elastica secundum eam directionem agat, secundum quam facta est compressio, sitque vi comprimenti æqualis (§. 553); dimidia celeritate repellit A, adeoque motum ejus sistit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit, adeoque motum ejus accelerat (§. 76). Fertur itaque post ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A; & A quiescit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

561. Cum adeo A omnem suam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, C rursus in D, & D tandem in E transferre debet. Quare si fuerint plura corpora elastica pondere æqualia & se mutuo tangentia; atque A impingat in B, quiescentibus omnibus intermediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A. Tab. IV. Fig. 54.

THEOREMA LXXXVIII.

562. *Si duo corpora elastica* A *&* B, *pondere æqualia, celeritate æquali sibi mutuo directe occurrant; utrumque resiliet ea celeritate & secundum eam directionem qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, ambo quiescerent (§. 533). Omnis ergo vis in compressione consumitur. Huic adeo cum æqualis sit vis elastica, qua resiliunt secundum directio-

directionem, qua advenerant (§. 553); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem pristinæ æqualem producit. Resiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIX.

563. *Si duo corpora elastica* A *&* B, *pondere æqualia, celeritate inæquali sibi mutuo directe occurrant; post ictum celeritatibus permutatis feruntur.*

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus $C + c$ & C. Quodsi eadem celeritate C concurrerent, A & B post ictum moveretur celeritate C (§. 562). Si B quiesceret, & A celeritate c in ipsum incurreret, post ictum quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo excessus celeritatis c, quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B; adeoque ipso peracto, A movetur celeritate C, B vero celeritate $C + c$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

564. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se invicem accedebant.

THEOREMA XC.

565. *Si corpus elasticum* A *in aliud æquale* B *segnius motum incurrat; post ictum ambo, permutatis celeritatibus, feruntur secundum eandem, nempe pristinam, directionem.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate $C + c$ in B celeritate C motum. Quoniam ob celeritates C & C æquales, nullus fit impulsus, perinde est ac si A sola celeritate c in B quiescens impingeret. Tum vero quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo post ictum A movebitur sola celeritate C, B vero celeritate $C + c$, & utrumque quidem secundum pristinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

566. Post ictum eadem celeritate à se invicem discedunt, qua ante ictum ad se mutuo accedebant.

THEOREMA XCI.

567. *Si corpus* A *in alterum* B *incurrit; ictus idem est, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum differentia velocitatum incurrente.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m, celeritates C & c, erit celeritas communis post impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 537), adeoque impetus ipsius $A = (M^2 C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543); consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2 C + Mmc) : (M + m) = (M^2 C + MmC - M^2 C - Mmc) : (M + m) = Mm (C - c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C - c$; erit celeritas post ictum $= (MC - Mc) : (M + m)$ (§. 535); adeoque impetus $(M^2 C - M^2 c) : (M + m)$ (§. 543), consequenter per ictum amissus $MC - Mc - (M^2 C - M^2 c) : (M + m) = (M^2 C - M^2 c + MmC - Mmc - M^2 C + M^2 c) : (M + m)$

 $= Mm$

$= Mm(C-c):(M+m)$. In utroque igitur casu idem impetus amittitur, consequenter ictus idem est (§.541).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§.553); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA XCII.

569. *Si duo corpora* A & B *sibi mutuo occurrunt; ictus idem contingit, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum summa velocitatum impingente.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis post impactum $(MC-mc):(M+m)$ (§.540); adeoque impetus ipsius A seu fortioris $(M^2C-Mmc):(M+m)$, consequenter impetus per ictum amissus $= MC-(M^2C-Mmc):(M+m) = (M^2C+MmC-M^2C+Mmc):(M+m) = (MmC+Mmc):(M+m) = Mm(C+c):(M+m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C+c$, erit celeritas post ictum $=(MC+Mc):(M+m)$ (§.535); adeoque impetus $(M^2C+M^2c):(M+m)$ (§.543); consequenter impetus per ictum amissus $MC+Mc-M^2C+M^2c):(M+m) = (M^2C+M^2c+MmC+Mmc-M^2C-M^2c):(M+m) = (MmC+Mmc):(M+m) = Mm(C+c):(M+m)$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

570. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§.553), in corpora A & B cum summa velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA CII.

571. *Determinare celeritatem corporum elasticorum quorumcunque* A & B *celeritatibus quibuscunque directe concurrentium.*

RESOLUTIO.

I. Si corpora A & B in easdem plagas tendant; post ictum, vi sola impulsus, secundum eandem moventur celeritate communi $(MC+mc):(M+m)$ (§.537). Accedat jam vis elastica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C-c$ (§.568), adeoque, cum in momento ictus A & B corpus unum constituant, eandem ita distribuit, ut celeritates post ictum à vi elastica acquisitæ sint in ratione massarum reciproca. Sit ergo celeritas ipsi B acquisita $= x$, erit Tab. IV. Fig. 55.

$$M : m = x : C-c-x$$
$$MC-Mc-Mx = mx$$
$$MC-Mc = Mx+mx$$
$$(MC-Mc):(M+m) = x$$

Hinc celeritas ipsi A acquisita $= C-c-(MC-Mc):(M+m) = (MC-Mc+mC-mc-MC+Mc):(M+m) = (mC-mc):(M+m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius; celeritas hæc subtrahenda est ab ea quæ per solum impulsum acquiritur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat; celeritas hæc addenda est priori per impulsum solum acquisitæ (§.76). Unde tandem prodit celeritas ipsius $A = (MC+mc-mC+mc):(M+m) = (MC-mC+2mc)$

$2mc) : (M+m)$, & ipsius $B = (MC + mc + MC - Mc) : (M+m) = 2MC + mc - Mc) : (M+m.)$

Ex. gr. Sit $M = 6$ librarum, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 + 16) : (6+4) = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$, & ipsius $B = (36 + 8 - 12) : 10 = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B versus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M = 2$, $m = 6$, $C = 4$, $c = 1$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (8 - 24 + 12 : (2+6) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; celeritas ipsius $B = (16 + 6 - 2) : (2+6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipsius A negativa prodeat, id indicio est, celeritatem per actionem elateris acquisitam esse majorem celeritate per impulsum acquisita, adeoque corpus A resilire post ictum. Post conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia sibi mutuo occurrant, in conflictu per impulsum solum utrique acquiritur celeritas $(MC - mc) : (M+m)$ (§. 540). Cum vis elastica in corpora, quae inter se colliduntur, agat cum celeritate $C+c$ (§. 570); si celeritas ipsi B inde acquisita sit x, erit, vi superiorum,

$$M : m = x : C + c - x$$
$$MC + Mc - Mx = mx$$
$$MC + Mc = Mx + mx$$
$$(MC + Mc) : (M+m) = x$$

Hinc celeritas, quae ipsi A acquiritur, $C + c - (MC+Mc) : (M+m) = (MC+mC+Mc+mc-MC-Mc) : (M+m) = (mC+mc) : (M+m)$. Unde tandem, ut ante, prodit celeritas ipsius $A = (MC - mc - mC - mc) : (M+m) = (MC - mC - 2mc) : (M+m)$; celeritas vero ipsius $B = (MC - mc + MC + Mc) : (M+m) = (2MC + Mc - mc) : (M+m)$. Quodsi $mC + 2mc > MC$; celeritas ipsius A est negativa; quod ostendit, vim elasticam esse impulsu superiorem, adeoque corpus A resilire, nec progredi cum resiliente B.

Ex. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 - 16) : 10 = -1$, & ipsius $B = (36 + 12 - 8) : 10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A cum uno.

COROLLARIUM I.

572. Quoniam $\frac{MC - mC + 2mc}{M+m} = \frac{MC+mC-2mC+2mc}{M+m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M+m}$ & $\frac{2MC+mc-Mc}{M+m} = \frac{Mc+mc+2MC-2Mc}{M+m} = c + \frac{2MC - 2Mc}{M+m}$; atque $\frac{2MC - 2Mc}{M+m}$; & $\frac{2mC - 2mc}{M+m}$ sunt celeritates, quae se habent ad celeritatum differentiam ante impactum (quae *celeritas respectiva* dicitur) ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum summam; si corpus elasticum A in aliud B, sive quiescens, sive tardius motum incurrat; invenitur celeritas post impactum corporis A, ubi fiat: *ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius B, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quae ex celeritate ipsius A ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum.* Celeritas vero ipsius B reperitur, si fiat; *Ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius A, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, qua addita celeritati ipsius B prodit celeritas hujus post impactum.*

COROL-

COROLLARIUM II.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c$, atque $\frac{2mC + 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + 2Mc}{M + m}$ sunt celeritates, quæ se habent ad celeritatum ante impactum summam (quæ *celeritas respectiva* dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem summam; si duo corpora elastica A & B sibi mutuo occurrant, invenitur post impactum corporis A celeritas, ubi fiat: *ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius* B, *ita celeritatum ante impactum summa ad celeritatem quæ ex celeritate ipsius* A *ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum.* Celeritas vero ipsius B invenitur, si fiat: *ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius* A *ita summa celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua subducta celeritas ante impactum relinquit eam, quæ inest post eundem.*

THEOREMA XCIII.

574. *Si corpus elasticum* A *directe impingit in aliud quiescens* B; *erit celeritas ejus post conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad summam eorundem : quam vero communicat cum* B, *ea ad eandem est, ut duplum pondus ipsius* A *ad ponderum summam.*

DEMONSTRATIO.

Si B non quiescit, celeritas ipsius A post ictum est $(MC - mC + 2mc) : (M + m)$, (§. 571). Si vero quiescit, celeritas ejus ante conflictum nulla est, adeoque $c = 0$. Quare cum in hoc casu fiat $2mc = 0$, erit celeritas ipsius A post impactum $= (MC - mC) : (M + m)$. Est itaque ad C celeritatem ante conflictum, ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem summam. *Quod erat unum.*

Similiter si B non quiescit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc) : (M + m)$, (§. 571). Jam si quiescit, celeritas ejus nulla est, adeoque $c = 0$; consequenter $mc = 0$ & $Mc = 0$. Quare celeritas ipsius B post conflictum $= 2MC : (M + m)$. Est igitur ad celeritatem ipsius A ante conflictum, ut duplum ponderis A ad summam ponderum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

575. Erit ergo, ex æquo, post conflictum velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B, ut differentia ponderum ad duplum ipsius A (§. 196 *Arithm.*)

THEOREMA XCIV.

576. *Si duo corpora elastica* A & B *sibi mutuo directe occurrunt, cum celeritatibus quæ ipsorum ponderibus reciproce proportionales sunt; post conflictum eadem celeritate a se invicem resiliunt qua advenerant.*

DEMONSTRATIO.

Post conflictum celeritas ipsius A est $(MC - mC - 2mc):(M+m)$, & celeritas ipsius B est $(2MC+Mc-mc):(M+m)$ (§. 571). Est vero $M:m=c:C$ *per hypoth.* adeoque $mc=MC$ (§. 297 *Arithm.*) Quod si ergo, in expressione celeritatis ipsius A, pro $2mc$ substituas $2MC$, prodibit $(-mC-MC):(M+m)=-C$. Resilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum.*

Quodsi similiter, in expressione celeritatis ipsius B, pro $2MC$ substituas $2mc$; prodibit $(mc+Mc):(M+m)=c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XCV.

577. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; differentia celeritatum tam ante quam post impulsum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*; erit eorum differentia $=C-c$, & corpus M, quod sequitur, in alterum *m* incurrit. Celeritas igitur ipsius M post conflictum $=\frac{MC+2mc-mC}{M+m}$; ipsius autem *m* $=\frac{mc+2MC-Mc}{M+m}$; & quoniam post conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius *m* minor est; consequenter celeritatum differentia post conflictum $\frac{mc+2MC-Mc-MC-2mc+mC}{M+m}$ $=\frac{MC-Mc-mc+mC}{M+m}=C-c$. Est adeo celeritatum differentia post conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVI.

578. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem plagam moventur, post conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum æqualis est summa celeritatum post eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & *m* ante conflictum C & *c*: erit differentia earundem $C-c$. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur *per hypoth.* in alterum *m* incurrit, & post conflictum M & *m* moventur in plagas contrarias *per hypoth.* celeritas vi elastica producta in M major est celeritate ex ictu, utpote qua M cum *m* in eandem plagam progrediebatur (§. 534). Celeritas igitur in corpore M negativa est adeoque $\frac{mC-2mc-MC}{M+m}$ & in corpore $m=\frac{2MC+mc-Mc}{M+m}$ (§. 571); consequenter summa celeritatum post conflictum $=\frac{MC+mC-Mc-mc}{M+m}$ $=C-c$. Est ergo summa celeritatum post conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVII.

579. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur; summa celeritatum ante conflictum æqualis est differentiæ earum post eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c: erit summa earundem $C + c$. Quoniam corpora sibi mutuo occurrunt & post conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit post conflictum celeritas corporis M $= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, & corporis m $= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Est vero differentia harum celeritatum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, quæ eadem cum summa celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVIII.

580. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; summa celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & m celeritates ante conflictum C & c; erit earum summa $C + c$. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, adeoque sibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis m $= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$ (§. 571). Enimvero corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, in quam ante eundem tendebat *per hypoth.* adeoque $mC + 2mc > MC$, seu celeritas post conflictum negativa, consequenter $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (§. *cit.*) Est igitur summa celeritatum post conflictum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$; adeoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCIX.

581. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; quantitas motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in corpus m celeritate c motum: erit celeritas illius post conflictum $\frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$, & hujus celeritas $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571), consequenter quantitas motus corporis M post conflictum $= \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M + m}$ & corporis $m = \frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$. Est itaque summa motuum post conflictum $= \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M + m}$ $= MC + mc$ (§. 22). Enimvero quantitas utriusque corporis ante conflictum in

in unam summam collecta erat itidem $MC + mc$ (§. *cit.*). Quamobrem patet quantitatem motus ante & post conflictum esse eandem. *Q. e. d.*

THEOREMA C.

582. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur *per hypoth.* sibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M + m}$, & cum corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, qua advenerat, erit celeritas corporis M post conflictum $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$. Quare quantitates motuum in corporibus M & m sunt $\frac{MmC + 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M + m}$; consequenter eorum differentia $= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M + m} = MC - mc$. Est vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem. *Q. e. d.*

THEOREMA CI.

583. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem partem, post conflictum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus post conflictum est aequalis summae earundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, corpus unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in alterum m celeritate c motum; erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$. Quoniam vero corpus M movetur post conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, adeoque celeritas positiva evadet $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$ (§. 571). Sunt igitur quantitates motus post conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M + m}$ & $\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$; adeoq; differentia $\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M + m} = MC + mc$. Quare cum sit $MC + mc$ summa quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum post conflictum aequalis est summae ante eundem.

THEOREMA CII.

584. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in easdem moventur; summa motuum post eundem aequalis est differentia eorundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, sibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post conflictum $= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}$, & corporis $M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ (§. 571). Sunt adeo quantitates motus post conflictum $= \frac{2MmC + Mmc - m^2 c}{M + m}$ & $\frac{M^2 C - MmC - 2Mmc}{M + m}$; consequenter summa motuum post conflictum $= \frac{M^2 C + MmC - Mmc - m^2 c}{M + m}$ $= MC - mc$. Quoniam differentia motuum ante conflictum est $MC - mc$, summa motuum post eundem est æqualis differentiæ motuum ante eundem.

THEOREMA CIII.

585. *In conflictu corporum elasticorum, hoc solo in casu eadem conservatur motus quantitas, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & post conflictum in eandem plagam moventur, aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, post eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes, post eundem in eandem tendunt. Jam in hoc solo casu, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam tendunt, summa motuum ante & post conflictum eadem (§. 581. & seqq.). In hoc igitur casu solo eadem conservatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit CARTESIUS, dum hanc statuit Naturæ Legem, quod in omni corporum conflictu eadem semper conservetur motus quantitas.

SCHOLION.

587. *Ut idem evidentius appareat, ostendendum porro erit, quonam in casu quantitas motus augeatur, in quonam minuatur. Eo igitur fine addimus Theoremata proxime sequentia.*

THEOREMA CIV.

588. *In conflictu corporum elasticorum, quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum post conflictum est æqualis summæ eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero summa motuum post conflictum est major differentia motuum post eundem: id quod ex terminis manifestum est (§. 61, 64 *Arithm.*). Quamobrem etiam summa motuum post conflictum major est summa eorundem ante conflictum (§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetur. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA CV.

589. *In conflictu corporum elasticorum, quantitas motus minuitur, quando ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem feruntur; summa motuum post conflictum æqualis est differentiæ eorundem ante conflictum (§. 584). Enimvero summa motuum ante conflictum major est differentia eorundem ante conflictum: id quod ex terminis manifestum (§. 61, 64 *Arithm.*). Ergo summa motuum ante conflictum major est summa motuum post eundem (§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA CVI.

590. *Corpora elastica post conflictum eadem celeritate a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, & tardius motum præcedit, celerius motum sequitur, quemadmodum in conflictu supponi debet; differentia celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi vero post conflictum itidem in eandem plagam feruntur, differentia celeritatum post conflictum est æqualis differentiæ celeritatum ante eundem (§. 577). Quoniam itaque tardius motum sequitur, celerius motum præcedit, quemadmodum ex actione elateris intelligitur, qua corpora, vi ictus, eadem celeritate secundum eandem directionem progressura (§. 534) a se invicem separantur (§. 571), adeoque differentia celeritatum a se invicem discedunt; post conflictum ea celeritate a se invicem recedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, & tardius motum præcedit, celerius motum sequitur; differentia celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi post conflictum in diversas plagas tendunt, summa celeritatum à se invicem recedunt. Quare cum in hoc casu summa celeritatum post conflictum sit æqualis differentiæ ante eundem (§. 578); eadem celeritate etiam in hoc casu post conflictum a se invicem discedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat secundum.*

III. Quodsi duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura; summa celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi post conflictum tendant in eandem, cum celerius motum præcedat, tardius motum sequatur, vi eorum quæ *n. I.* dicta sunt, differentia celeritatum a se invicem recedunt. Est vero differentia celeritatum post conflictum æqualis summæ ante eundem (§. 579). Ergo cor-

pora post conflictum eadem celeritate ad se invicem accedunt, qua post eundem a se invicem recedunt. *Quod erat tertium.*

IV. Denique si duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura, & post conflictum in contrarias a se invicem discedunt; summa celeritatum ante conflictum ad se invicem accedunt, post conflictum a se invicem recedunt. Est vero in hoc casu summa celeritatum ante & post conflictum eadem (§. 580). Ergo eadem celeritate post conflictum a se invicem recedunt, quo ante eundem ad se invicem accedunt. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

591. *Hoc Theorema breviter ita enunciatur* : In conflictu corporum elasticorum, eadem semper conservatur celeritas respectiva. *Hanc Propositionem alii inter leges motus referunt, ac inde regulas motus demonstrant.*

COROLLARIUM.

592. Æqualibus igitur temporibus ante & post conflictum, æquales sunt corporum a se invicem distantiæ; veluti quo intervallo, uno minuto ante conflictum, corpora a se invicem distant, eodem, uno minuto post eundem, a se invicem distant.

THEOREMA CVII.

593. *Si duo corpora elastica* A *&* B *directe concurrant, vel sibi mutuo occurrant; summa factorum ex massis in quadrata celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

In concursu directo, celeritates post conflictum sunt $(MC - mC + 2mc) : (M + m)$, vel $(mC - 2mc - MC) : (M + m)$, & $(2MC - Mc + mc) : (M + m)$ (§. 571). Hinc quadrata earundem $(M^2C^2 + 4MmCc - 4m^2Cc + 4m^2c^2 + m^2C^2 - 2mMC^2) : (M^2 + 2Mm + m^2,)$ & $(4M^2C^2 + 4MmCc - 2Mmc^2 + m^2c^2 - 4M^2Cc + M^2c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2)$; consequenter priore per M, posteriore per m multiplicato, prodit summa factorum ex massis in quadrata celeritatum $(M^3C^2 + 2Mm^2c^2 + 2M^2C^2m + M^2c^2m + Mm^2c^2 + m^3c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2) = MC^2 + mc^2$, quæ eadem est summa ex factis massarum in quadrata celeritatum ante conflictum. Idem cum eodem modo in occursu corporum directo ostendatur, quo celeritas corporis m est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$, corporis vero M est $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, vel $\frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (§. 571); patet propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. Eadem itaque in conflictu conservatur Virium vivarum quantitas (§. 325).

THEOREMA CVIII.

595. *Si duo corpora elastica, celeritatibus per conflictum acquisitis, denuo in se invicem incurrere, vel sibi mutuo occurrere supponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates quas ante eundem habebant.*

DEMONSTRATIO.

Sint maſſæ corporum M & *m*, celeritates ante primum conflictum C & *c*, ac corpus M incurrat in alterum *m*: erunt poſt conflictum celeritates eorundem corporum $\frac{MC - mc + 2mc}{M+m}$ & $\frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$ (§. 571). Quoniam celeritas corporis *m* major eſt celeritate alterius M poſt conflictum (§. *cit.*); mutatis directionibus corpus *m* in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A = m$, $B = M$, celeritas ipſius $A = V = \frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$ & celeritas corporis $B = v = \frac{MC - mC + 2mc}{M+m}$. Erit igitur, poſt alterum conflictum celeritas corporis incurrentis $A = \frac{AV - BV + 2Bv}{A+B}$, & celeritas alterius $B = \frac{2AV + Bv - Av}{A+B}$. Jam

$$AV = 2MmC + m^2c - Mmc$$
$$-BV = -2M^2C - Mmc + M^2c$$
$$+2Bv = 2M^2C - 2MmC + 4Mmc$$

$$\frac{AV - BV + 2Bv}{A+B} = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$$

Recuperat igitur corpus *m*, poſt conflictum alterum, celeritatem *c* quam ante primum habebat. *Quod erat unum.* Porro

$$2AV = 4MmC + 2m^2c - 2Mmc$$
$$+Bv = +M^2C - MmC + 2Mmc$$
$$-Av = -MmC + m^2C - 2m^2c$$

$$\frac{2AV + Bv - Av}{A+B} = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$$

Recuperat itaque etiam corpus M, per conflictum alterum, celeritatem C quam ante primum habebat. *Quod erat ſecundum.*

Utrumque eodem modo oſtenditur, ſi corpora duo ſibi mutuo directa occurrant & mutatis directionibus poſt conflictum primum denuo ſibi occurrere ſupponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO LXIV.

596. Si linea recta AB jungit centra gravitatis A & B duorum corporum, & punctum C ita eandem dividat, ut ſit pondus corporis A ad pondus corporis B, uti reciproce BC ad CA; dicetur punctum C *Centrum gravitatis corporum* A *&* B. Tab. I. Fig. 4.

SCHOLION.

597. *Ratio denominandi patet ex iis, quæ ſuperius* (§. 144) *demonſtrata ſunt.*

THEOREMA CIX.

598. *Centrum gravitatis corporum elaſticorum, ante & poſt conflictum vel quieſcit, vel uniformiter ſeu eadem velocitate in eandem plagam movetur, & temporibus æqualibus eodem intervallo ab eodem diſtant mobilia ante & poſt conflictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim, ſumtis temporibus ante & poſt conflictum æqualibus, eadem eſt corporum A & B diſtantia, adeoque recta jungens eorum centra gravitatis AB Tab. I. Fig. 4.

eadem

eadem (§. 192 *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum sit : mobilia ab eodem æquali intervallo distare debent, sumtis ante & post conflictum temporibus æqualibus. *Quod erat primum.*

Fieri autem non potest ut eadem, ante & post conflictum temporibus æqualibus, sit corporum A & B a centro gravitatis distantia, nisi aut centrum istud quiescat, aut ante & post conflictum eodem modo moveatur : quod per se patet. Ergo centrum gravitatis ante & post conflictum vel moveri eodem modo, vel quiescere debet. *Quod erat secundum.*

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius est (§. 144); cum corpore majore, seu graviore, in eandem plagam, adeoque continuo juxta eandem directionem movetur. *Quod erat tertium.*

Denique cum corporum motus sit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a se invicem recedentibus distantia, in accedentibus vero ad se invicem subdupla, subtripla, subquadrupla (§. 31); consequenter cum distantiæ a centro sint in constante ratione, nimirum ratione massarum reciproca (§. 596), eædem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in casu priori, ast subduplæ, subtriplæ, subquadruplæ in posteriori evadere debent (§. 178, 181 *Arithm.*). Quamobrem si centrum gravitatis movetur, spatia ab eodem descripta temporum rationem habere, adeoque ipsum motu æquabili ferri (§. 31); consequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24) *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

599. Quod centrum gravitatis subinde quiescat, subinde moveri debeat, & quandonam quiescat, quandonam moveatur, patet ex Propositione sequente.

THEOREMA CX.

600. *Si duo corpora elastica moventur celeritatibus quæ sint massis seu ponderibus ipsorum reciproce proportionales, sibique mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & post conflictum quiescit : in alio autem casu quocunque, non quiescit, sed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur *per hypoth.* spatia descripta eodem tempore continuo sunt ut celeritates quibus feruntur (§. 33), adeoque in ratione massarum reciproca (§. 167 *Arithm.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus distat in ratione massarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a distantiis anterioribus continuo partes in ratione massarum reciproca, *per demonstrata;* adeoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ sunt itidem in ratione massarum reciproca (§. 188 *Arithm.*); consequenter centrum gravitatis in eodem loco constanter hæret (§. 596), & hinc ante con-

& hinc ante conflictum quiescit. Enimvero post conflictum celeritates eædem prorsus sunt quæ ante eundem fuerant (§. 590), adeoque itidem massis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur, ut ante, quod distantiæ continuo crescant a loco centri gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione massarum reciproca (§. 187 *Arithm.*); consequenter & post conflictum quiescit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo casu, eodem, quo ante, modo patet quod distantiæ a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decrescant, nec post conflictum crescant in ratione massarum reciproca; consequenter a loco isto continuo non distent corpora in ratione massarum reciproca (§. 188, 187 *Arith.*). Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco est (§. 596), consequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elastica æqualia eadem celeritate sibi mutuo occurrunt, celeritates quoque massis reciproce proportionales sunt; quod per se patet. Centrum gravitatis igitur ante & post conflictum quiescit, si corpora elastica æqualia æquali celeritate sibi mutuo occurrunt.

SCHOLION.

602. *Nimirum casus hic specialis sub generali Theorematis actu continetur, ut dici non possit præter casum Theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quiescit. Ceterum Theorema præsens ita enunciari solet:* Status centri gravitatis non mutatur ab actione corporum in se invicem. *Sunt quidam Philosophi, qui ut autoritatem* CARTESII *tueantur, eandem motus quantitatem conservari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & post conflictum movetur. Verum enim est quantitatem motus centri gravitatis ante & post conflictum esse eandem.*

THEOREMA CXI.

603. *Si corpora elastica sibi mutuo occurrunt; celeritas ab uno eorum amissa est ad celeritatem quam idem amitteret si in alterum quiescens impingeret, ut summa celeritatum utriusque ad celeritatem ipsius impingentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & m celeritatibus C & c sibi mutuo occurrant, erit illius celeritas post conflictum $= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ (§. 571); consequenter celeritas in conflictu amissa $= C - \frac{MC - mC - 2mc}{M+m}$ $= \frac{MC + mC - MC + mC + 2mc}{M+m}$ $= \frac{2mC + 2mc}{M+m}$. Jam vero si corpus M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $= \frac{MC - mC}{M+m}$ (§. *cit.*) consequenter celeritas amissa foret $C - \frac{MC - mC}{M+m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M+m}$ $= \frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu priori

priori amissa ad celeritatem in posteriori amittendam ut $\frac{2mC+2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m} = C+c:C$, hoc est, ut summa celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXII.

604. *Si corpus elasticum unum in alterum incurrit; celeritas ab incurrente in conflictu amissa est ad celeritatem quam idem amitteret si in alterum quiescens impingeret, ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus m incurrit, quod celeritate c movetur, erit illius celeritas post conflictum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ (§. 571); adeoque celeritas in conflictu amissa $C-\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ $=\frac{MC+mC-MC+mC-2mc}{M+m}$ $=\frac{2mC-2mc}{M+m}$. Enimvero si corpus M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $\frac{MC-mC}{M+m}$, adeoque celeritas amissa foret $C-\frac{MC-mC}{M+m}=\frac{MC+mC-MC+mC}{M+m}$ $=\frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu priori amissa ad celeritatem in casu posteriori amittendam ut $\frac{2mC-2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m}=C-c:C$, hoc est, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis post eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIII.

605. *Si corpus elasticum majus incurrat in minus quiescens; celeritatem majorem ea qua fertur, sed dupla minorem eidem communicat.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus m quiescens: erit celeritas corporis m post conflictum $2MC:(M+m)$ (§. 571), hoc est, si $M=m+n$, $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$. Est igitur celeritas corpori minori m communicata per conflictum a corpore M ad celeritatem hujus ante conflictum $=\frac{2mC+2nC}{2m+n}:C=2mC+2nC:2mC+nC$ (§. 181 *Arithm.*) $=2m+2n:2m+n=2:1+\frac{m}{m+n}$. Est igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, sed minor quam dupla ejusdem: nimirum si dupla foret, antecedens rationis esse deberet $2+2m:(m+n)$. Idem etiam patet si celeritatem corpori minori acquisitam $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$ dividas actu per $2m+n$; prodit

prodit enim $C+\frac{nC}{2m+n}$. Eſt vero $C+\frac{nC}{2m+n} > C$ (§. 84 *Arithm.*). Jam vero $\frac{nC}{2m+n} : C = nC : (2m+n) C = n : 2m+n$. Sed $n < 2m+n$ (§. 20 *Arithm.*). Ergo $\frac{nC}{m+n} < C$ (§. 151 *Arithm*). *Q. e. d.*

THEOREMA CXIV.

606. *Si corpus elaſticum majus in minus quieſcens incurrat; minus poſt conflictum movetur celeritate compoſita ex ea qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera qua poſt conflictum idem incedit.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quieſcens m, ſitque $M=m+n$; patet, ex demonſtratione Theorematis præcedentis, corporis m celeritatem poſt conflictum eſſe $C+\frac{nC}{2m+n}$. Enimvero celeritas corporis M poſt conflictum $= \frac{MC-mC}{M+m}$ (§. 571) $= \frac{mC+nC-mC}{2m+n} = \frac{nC}{2m+n}$. Componitur adeo celeritas corporis m ex celeritate C, quam habebat majus M ante conflictum, & ex celeritate $\frac{nC}{2m+n}$, quæ eſt eidem poſt conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXV.

607. *Si celeritas corporis elaſtici majoris in aliud minus quieſcens incurrentis fuerit ut ſumma maſſarum utriuſque corporis; minori dat celeritatem quæ eſt ut duplum ſui, amittit vero celeritatem quæ eſt ut duplum minoris corporis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus m, in quod majus M celeritate C incurrit, quieſcit; celeritas ejus poſt conflictum eſt $\frac{MC-mC}{M+m}$, & minori dat celeritatem $\frac{2MC}{M+m}$ (§. 571). Eſt vero $C=M+m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris ſive incurrentis $=M-m$, quæ differt à celeritate initiali $M+m$ quantitate $2m$. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem quæ eſt ut duplum corporis minoris. *Quod erat unum.*

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquiſita erit 2 M, adeoque ea eſt ut duplum corporis majoris incurrentis. *Q. e. d.*

THEOREMA CXVI.

608. *Si corpus elaſticum minus in aliud majus quieſcens incurrit, celeritate quæ eſt ut maſſarum utriuſque corporis ſumma; dat ei celeritatem quæ eſt ut duplum ſui, ſed celeritatem amittit quæ eſt ut duplum majoris.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi corpus m celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas poſt conflictum $\frac{2mC}{M+m}$ & cele-

celeritas ipsius post eundem $\frac{mC - MC}{M+m}$ (§. 571). Est vero C ut $M+m$ *per hypoth.* Ergo celeritas majoris ut $2m$ seu duplum minoris; minoris vero sive incurrentis ut $m - M$. Differentia vero inter $M+m$ & $m - M$ est $2M$. Celeritas igitur in ictu amissa est ut duplum corporis M. *Q. e. d.*

THEOREMA CXVII.

609. *Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit; post conflictum semper resilit eique celeritatem sua minorem dat.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrat in majus M; erit celeritas majoris M post conflictum $\frac{2mC}{M+m}$, minoris vero seu incurrentis $\frac{mC - MC}{M+m}$ (§. 571). Nimirum in formula generali litteræ M & m permutantur, quia ibi M percutiens, hic vero m percutiens est. Jam vero celeritas incurrentis ante conflictum $C = \frac{MC + mC}{M+m}$. Quare si ponamus $M = m+n$ (*§. 20 Arithm.*): erit celeritas minoris ante conflictum $= \frac{2mC = nC}{2m+n}$, majoris vero post eundem $\frac{2mC}{2m+n}$. Est igitur velocitas majori acquisita minor celeritate incurrentis (*§. cit.*). *Quod erat unum.*

Jam cum sit $M = m+n$, erit celeritas minoris post conflictum $\frac{mC - mC - nC}{2m+n} = \frac{-nC}{2m+n}$, adeoque negativa. Post conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571). Corpus igitur minus m semper resilit post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXVIII.

610. *Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit; celeritas utriusque post conflictum simul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrit in majus M, atque $M = m+n$; erit celeritas majoris post conflictum $= \frac{2mC}{2m+n}$; minoris vero, non habita ratione directionis $= \frac{nC}{2m+n}$ quemadmodum ex demonstratione Propositionis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum post conflictum est $\frac{2mC + nC}{2m+n} = C$. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIX.

611. *Si corpus elasticum unum* A *incurrat in duo elastica* B *&* C, *quorum* B *sit majus quam* A, *&* C *vicissim majus quam* B, *atque corpus* C *mediante altero* B *percutit; majorem corpori* C *celeritatem dat, quam si idem immediate, seu corpore* B *non interveniente, percuteret.*

De-

Demonstratio.

Sint massæ corporum A, B & C = M, *n*M & *ni*M, celeritas incurrentis = C. Cum sit ut summa massarum ad duplam massam incurrentis ita celeritas percutientis ad celeritatem percussi (§. 574); erit $M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M+nM}$, quæ est celeritas corpori B acquisita. Quodsi jam hac celeritate corpus B in C impingat, seu idem urgeat; erit $nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M+nM} : \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)}$, quæ est celeritas corpori C interventu corporis B acquisita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M+niM : 2M = C : \frac{2MC}{M+niM}$, quæ est celeritas corpori C acquirenda, si corpus A immediate seu absque interventu corporis B idem percuteret. Est adeo celeritas mediata corporis C ad immediatam $= \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{2MC}{M+niM} = \frac{2nM}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{1}{M+niM} = 2nM^2 + 2n^2iM^2 : nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^2iM^2 = 2n+2n^2i : n+ni+n^2+n^2i$. Est vero $n+n^2i = n(1+ni) > ni+n^2 = n(i+n)$, quia $ni > i+n$, adeoque $2n+2n^2i > n+n^2+n^2i+ni$ (§. 90 *Arithm.*). Patet igitur celeritatem corporis C, interventu alterius B a corpore A percussi, esse majorem ea quam acciperet, si a corpore A immediate percuteretur.

Ex. gr. Sit massa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquisita, ad eam quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Est igitur celeritas mediata major immediata. Sit similiter $M = 2$, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$; adeoque celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Est igitur denuo celeritas mediata major immediata.

Theorema CXX.

612. *Si corpus elasticum unum* A *in aliud segnius motum sed majus* B *incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus* C *quiescens, sed se itidem majus; corpus* C *majore celeritate feretur, quam si immediate a corpore* A *percuteretur.*

Demonstratio.

Sit massa corporis A = M, massa secundi B = *n*M & tertii C = *ni*M, celeritas corporis A = C, corporis B vero = *l*C. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B $= \frac{2MC + nlMC - lMC}{M+nM}$ (§. 571). Quodsi idem corpus A in tertium C quiescens incurreret, foret hujus celeritas $= \frac{2MC}{M+niM}$. Incurrat jam corpus B, celeritate per conflictum cum corpore A modificata, in quiescens C; erit celeritas corporis C $= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M+nM)(nM+niM)}$ (§. *cit.*)

(§. *cit.*). Eſt igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam

$$= \frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{2MC}{M+niM}$$

$$= \frac{2nM + 2n^2lM - nlM}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{1}{M+niM}$$

$= (2n + 2n^2l - nl)(1+ni) : (1+n)(n+ni) = 2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il : n + ni + n^2 + n^2i$. Eſt vero $n + n^2i > n^2 + ni$, adeoque $2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il > n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major eſt immediata.

Ex. gr. Sit maſſa corporis $A = 1$, alterius $B = 2$, tertii $C = 3$, adeoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = 2$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $4 + 16 - 4 + 24 + 96 - 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 112 : 24 = 14 : 3$. Eſt itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, ſed $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 4 - 1 + 24 + 48 - 12 : 2 + 6 + 4 + 22 = 67 : 34$. Eſt adeo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA CIII.

613. *Invenire corpus* B *interponendum inter duo alia corpora* A *&* C, *ut corpus* C *quieſcens a corpore* A *data celeritate moto percuſſum maximam acquirat celeritatem quam ex percuſſione iſtiuſmodi habere poteſt.*

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur $= V$. Incurrat A in B quieſcens; erit hujus celeritas poſt conflictum $= \frac{2AV}{A+B}$ (§. 571). Incurrat jam corpus B celeritate hac acquiſita in tertium C quieſcens; erit corporis C celeritas poſt conflictum $= \frac{4ABV}{AB+B^2+AC+BC}$ (§. *cit.*). Quoniam celeritas hæc maxima eſt quam corpus C ex iſtiuſmodi percuſſione acquirere valet *per hypoth.* erit differentiale ejus nihilo æquale (§. 63 *Anal. infin.*). Jam cum A, C & V ſint quantitates conſtantes, B vero ſola ſit variabilis, facta differentiatione (§. 19 *Analyſ. infin.*) reperitur $(4A^2VBdB + 4AB^2VdB + 4A^2CVdB + 4ABCVdB - 4A^2BVdB - 8AB^2VdB - 4ACBVdB) : (AB + B^2 + AC + BC)^2 = 0$, hoc eſt,

$$4A^2CVdB - 4AB^2VdB = 0$$

$$AC - B^2 = 0$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit $A : B = B : C$ (§. 301 *Arithm.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quieſcens a corpore quacunque celeritate percutitur, fuerit medium proportionale inter percutiens & percuſſum; celeritatem ei dabit maximam quam interventu cujuſdam corporis ei communicare valet.

COROLLARIUM.

614. Quodſi ergo ſeries fuerit corporum in continua proportione creſcentium; ultimum acquiret celeritatem maximam quam a priori ex percuſſione tot corporum interventu acquirere valet quæ continuo creſcunt.

SCHO-

SCHOLION.

615. *Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari posse, quæ fidem omnem superare videtur, calculus probat & HUGENIUS (a) exemplo illustri docuit. Idem valet si corpora continuo decrescant.*

PROBLEMA CIV.

616. *Determinare motum corporum A & B oblique impingentium, sive elasticorum, sive elateris expertium, post conflictum.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 55. Motus corporis A per AC resolvitur in duos alios secundum AE & AD, & motus corporis B per BC similiter in duos alios secundum BF & BG (§. 245), suntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC, ut ipsæ rectæ AD, BF; AC, BC (§. 247). Jam cum rectæ AE & BG sint parallelæ; vires secundum has directiones agentes sibi mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu insuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, seu quod perinde est, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem constituant, perinde est ac si corpora A & B solis velocitatibus, quæ sunt ut EC & GC, directe sibi mutuo occurrerent (§. 523). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta superiora. Sit ex. gr. corporis A resilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur, fiat CK=AE, & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI designabit motum corporis A post conflictum; movebitur nempe post ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241). Eodem modo reperitur, corpus B resiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM = BG. Sunt adeo celeritates post ictum, ut CI ad CM. Quod si post conflictum corpora A & B versus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC construitur.

(a) *De Motu Corporum ex Percussione*, Prop. 13.

CAPUT XIII.

De Vi Centrifuga & Centripeta.

DEFINITIO LXV.

617. V*Is centrifuga* est vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.

Ex. gr. Si corpus in peripheria circuli movetur, in quovis puncto A conatur progredi per tangentem AD (§. 71), &, Tab. V. Fig. 56. si nihil obstaret, actu progrederetur; adeoque, eodem tempore quo arculum AE describit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROL-

COROLLARIUM.

Tab.V. Fig.56. 618. Est adeo vis centrifuga ut recta DE ad AD perpendicularis, si arcus AE infinite parvus (§. 245).

DEFINITIO LXVI.

619. *Vis centripeta* est vis, qua mobile per rectam AG progressurum retrahitur a motu rectilineo ut in curva incedat.

COROLLARIUM I.

620. Est itaque vis centripeta ut recta DE, si arculus AE infinite parvus.

COROLLARIUM II.

621. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis est (§. 618.)

DEFINITIO LXVII.

622. *Vires centrales* communi nomine ducuntur Vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA CXXI.

623. *Si duo corpora pondere æqualia, eodem vel æquali tempore, motu æquabili peripherias circulorum inæqualium describant; erunt vires centrales ut diametri* AB *&* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arculus AE infinite parvus, adeoque a subtensa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore describuntur; si ex centro C ducatur radius CE, erit HK arculus eodem momento descriptus, & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137 *Geom.*). Quodsi jam ducantur tangentes AD & HI, atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, △△ ADE & HIK eodem modo determinantur, Tab.V. Fig.56. (§. 119 *Geom.*), adeoque similia sunt (§. 120 *Geom.*); consequenter AE : HK = DE : IK (§. 175 *Geom.*). Sunt vero ut DE ad IK, ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 620). Ergo vires centrales sunt ut arcus AE & HK (§. 167 *Arithm.*); consequenter ut peripheriæ circulorum quas percurrunt, *per demonstrata*, adeoque & ut diametri eorundem (§. 412 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

624. Quodsi ergo vires centrales duorum corporum peripherias circulorum inæqualium describentium fuerint ut diametri, temporibus æqualibus easdem percurrunt.

THEOREMA CXXII.

625. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis est ut arcus infinite parvi* AE *quadratum per diametrum* AB *divisum.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM; erit in rectangulo ADEM, AM = DE. Quoniam arcus infinite parvus AE a subtensa non differt; erit BA : AE = AE : AM (§. 330 *Geom.*). Est ergo AM = DE = AE^2 : BA (§. 301 *Arithm.*). Quare cum vis centralis sit ut DE (§. 620); erit eadem ut AE^2 : BA. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquabili tempusculis æqualibus arculos æquales AE describat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, constanter eadem est.

THEO-

THEOREMA CXXIII.

Tab.V. Fig.56. 627. *Si duo corpora diversas peripherias motu aequabili describant; vires centrales sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 625), adeoque ut AE^2. HL ad HK. AB (§. 178 *Arithm.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore describantur, *per hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

628. Si celeritates fuerint aequales; erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL. (§. 181 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

629. Si diametri AB & HL fuerint aequales; hoc est, si utrumque mobile in eadem peripheria, sed dispari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. *cit. Arithm.*)

THEOREMA CXXIV.

630. *Si duorum mobilium in diversis peripheriis incedentium vires centrales fuerint aequales; erunt diametri circulorum* AB *&* HL *in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem instanti sunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ *per hypoth.* consequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA II.

631. *Quantitatum proportionalium radices sunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$, *per hypoth.* Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a}.\sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b}.\sqrt{m}$; erit utique $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA III.

632. *Sint quatuor quaecumque quantitates proportionales, sintque totidem aliae inter se quoque proportionales; si posteriores singulas per singulas priores dividas, vel contra; quoti quoque proportionales erunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$, & $c : nc = d : nd$ *per hypoth.* Quodsi a per c, ma per nc, b per d, mb per nd dividas; prodibunt $\frac{a}{c}$, $\frac{ma}{nc}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{mb}{nd}$. Jam cum sit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{nac}{mac} = \frac{n}{m}$, & $\frac{b}{d} : \frac{mb}{nd} = \frac{nbd}{mbd} = \frac{n}{m}$; erit utique $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb.}{nd}$ Eodem modo patet, esse $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} : \frac{nd}{mb}$. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXV.

633. *Si duo corpora in peripheriis inaequalibus eadem vi centrali urgentur; tempus in majori est ad tempus in minori in ratione subduplicata diametri majoris* AB *ad minorem* HL. Tab.V. Fig.56.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Fig.56. Sit AB = D, HL = d; celeritas in majori peripheria = C, in minori = c; peripheria major = P, minor = p; tempus per illam = T, per hanc = t; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), adeoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Eſt vero $P : p = D : d$ (§. 412 *Geom.*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 632). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ ſunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus ſimiles qui peripheriarum rationem habent (§. 170 *Arithm.*), deſcribuntur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

634. Eſt igitur $T^2 : t^2 = D : d$, (§. 260 *Arithm.*); hoc eſt diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, ſunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM II.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634); erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167 *Arithm.*); conſequenter $T : t = C : c$ (§. 631); hoc eſt, tempora, quibus peripheriæ aut arcus ſimiles percurruntur a mobilibus eadem vi centrali impulſis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA CXXVI.

636. *Vires centrales ſunt in ratione compoſita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.*

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v; reliqua ut in demonſtratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 38); conſequenter $C^2 : c^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ (§. 260 *Arithm.*), adeoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = \frac{D^2}{DT^2} : \frac{d^2}{dt^2}$ (§. 185 *Arithm.*) $= \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 231 *Arithm.*). Eſt igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167 *Arihm.*) $= Dt^2 : dT^2$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. E. D.*

THEOREMA CXXVII.

637. *Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus ſimilibus mobilia feruntur, ſunt ut diametri circulorum; vires centrales ſunt reciproce ut eadem diametri.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, *per hypoth.* & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 636); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$ $= d : D$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$ (§. 167 *Arithm.*); conſequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 185 *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc caſu æquales.

THEOREMA CXXVIII.

Tab.V. Fig.56. 639. *Si corpus quoddam in peripheria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, qua acquiritur per altitudinem* AL *cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo* AL *ad radium* CA.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi describeret 2AL, nempe celeritate quam cadendo per AL acquisivit & qua per AE movetur (§. 92). Est igitur tempus per AE ad tempus per AL, ut AE ad 2 AL (§.32), & hinc reperitur spatium eodem tempore a gravi cadente percursum, quo percurritur AE, $= AL. AE^2 : 4 AL^2 = AE^2 : 4AL$ (§. 86). Est vero vis centralis ad gravitatem in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires istæ producunt (§. 280), adeoque spatiorum eodem tempore motu æquabili descriptorum (§. 33). Quare cum spatium eo instanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2 : 4AL$, vi centrali percursum sit $AE^2 : BA$ (§. 625); erit vis centralis ad gravitatem ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 : 4AL$, hoc est, ut 4AL ad BA, seu 2AL ad CA (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

640. Quodsi adeo gravitas corporis dicatur G; erit vis centrifuga 2 AL. G : CA.

THEOREMA CXXIX.

641. *Si grave in peripheria circuli* [illegible]*abili motu feratur, ea quidem celeritate quam acquirit cadendo per altitudinem* AL *dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitati æqualis.* Tab.V. Fig.56.

DEMONSTRATIO.

Vis centralis est 2AL.G:CA (§.640). Quare si $AL = \frac{1}{2}CA$; eadem erit CA. G : CA = G. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

642. Ergo si gravitati vis centralis æqualis est; grave ea celeritate in peripheria circuli fertur quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA CXXX.

643. *Si vis centralis gravitati æqualis est; tempus per peripheriam integram est ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium.*

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percursum, quæ cadendo per $\frac{1}{2}$CA acquiritur, est in tempore æquali = CA (§. 92). Quare cum peripheria circuli eadem celeritate uniformiter percurratur (§. 642); erit tempus per peripheriam ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium CA (§. 32). *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXI.

644. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, quæ sit reciproce in ratione subduplicata diametrorum; vires centrales sunt in ratione duplicata distantiarum a centro virium reciproce sumtarum.*

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & *c*, diametri D & *d*, vires V & *v*; erit V : *v*
X 2 = C^2

$= \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260 *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{4} d^2 : \frac{1}{4} D^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires sunt reciproce ut quadrata radiorum seu distantiarum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXII.

645. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritatibus incedunt, quæ sunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi distantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = d : D$ *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§. 260 *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{8} d^3 : \frac{1}{8} D^3$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires centrales reciproce sunt ut cubi radiorum seu distantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXIII.

646. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione subduplicata diametrorum; temporum quadrata, quibus integras peripherias aut arcus similes percurrunt, sunt in ratione triplicata distantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & *t*, celeritates C & *c*, diametri D & *d*. Cum tam peripheriæ (§. 412 *Geom.*) quam arcus similes (§. 170 *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 38). Est vero $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}}$ (§. 124 *Analys. finit.*); consequenter $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$ (§. 260 *Arithm.*). $= \frac{1}{8} D^3 : \frac{1}{8} d^3$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

647. Ergo si Vires centrales sunt in reciproca ratione distantiarum a centro subduplicata; temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus similes percurruntur, sunt in triplicata earundem distantiarum (§. 644) ratione.

THEOREMA CXXXIV.

648. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce; tempora sunt in ratione duplicata distantiarum a centro.*

DEMONSTRATIO.

Quia $C : c = d : D$, *per hypoth.* & peripheriæ (§. 412 *Geom.*), atque arcus similes (§. 171 *Arithm.*) sunt ut radii, adeoque $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit $T : t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2$ (§. 124 *Anal. finit.*) $= \frac{1}{4} D^2 : \frac{1}{4} d^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, tempora sunt in ratione duplicata radiorum seu distantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

649. Si ergo Vires centrales sunt reciproce ut cubi distantiarum a centro virium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus similes percurruntur, sunt ut quadrata earundem (§. 645).

SCHOLION.

Tab.V. Fig.56. 650. *Quodsi supponamus vim centripetam urgere corpus versus centrum* C, *ut pro effectu ejus sumatur portio secantis* EG; *omnia manent ut ante, propterea quod, in casu infinite parvi,* EG *&* DE *pro æqualibus haberi possint, atque adeo eadem in utroque casu eruatur mensura vis centralis. Nimirum cum* CA (§. 308 Geom.) *&* DE per hypoth. *sint perpendiculares ad* AG: *erunt inter se parallelæ* (§. 256 Geom.), *adeoque angulus* GED = ECM (§. 233 Geom.). *Quare cum etiam recti ad* D *&* M *sint æquales* (§. 145 Geom.); *erit* GE : ED = EC : CM (§. 267 Geom.). *Quoniam sagitta* AM *infinite parva,* per hypoth. CM *&* CA *æquales habentur* (§. 4 Analyſ. infin.). *Ergo etiam* CM = CE (§. 40 Geom. & §. 87 Arithm.) *Est igitur etiam* GE = DE (§. 149 Arithm.). *Quod vero sit etiam* EG *ut* $AE^2 : AB$, *quemadmodum supra ostendimus esse* ED (§. 627), *ita evincitur.* $AG^2 = NG.$ EG (§. 379 Geom.), *hoc est, quia in casu arcus* AE *infinite parvi* NG = NE (§. 4 Analyſ. infinit.), NE. EG = AB. EG = AG^2, *seu, quia arcus infinite parvus* AE *a portiuncula tangentis* AG *assignabiliter non differt,* AB. EG = AE^2. *Unde prodit* EG = $AE^2 : AB$, *aut quod perinde est, vis centrifuga est ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum divisum.*

THEOREMA CXXXV.

651. *Si corpus in linea curva versus easdem partes cava ea lege incedat, ut radius* CB *ex ipso in punctum fixum* C, *quod in eodem plano situm est, ductus areas* BAC, BEC, *&c. describat temporibus proportionales, seu dato tempore æquales: corpus a vi centripeta versus punctum* C *urgetur.* Tab.V. Fig.57.

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus sola vi insita per rectam, seu arcum infinite parvum AB, dato minimo quovis instanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipsi AB æqualem (§. 31), & in directum sitam (§. 71). Sed per vim centripetam a BD retrahitur, & per arculum BE incedere cogitur, estque △ CAB = △ CBE, *per hypoth.* & ducta recta CD, ob AB = DB *per demonstrata,* △ CBD = CBA (§. 385 *Geom.*). Ergo △CDB = △CEB (§. 87 *Arith.*), consequenter perpendicula ex E & D in BC demissa æqualia sunt (§. 385 *Geom.*), & hinc DE ipsi FB parallela (§. 226 *Geom.*). Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 241), vis centripeta in B tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonstretur, patet vim centripetam a motu rectilineo versus C retrahere mobile. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXVI.

652. *Si corpus secundum directionem rectæ* AD *progrediatur, & una a vi centripeta ad punctum fixum* C *in eodem plano situm urgeatur; curvam describit versus* C *cavam, cujus areæ*

Tab.V. Fig.57. *quæcunque duobus radiis AC & BC comprehensa sunt temporibus, quibus describuntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim insita vel impressa cum agat juxta BD, & centripeta juxta BF seu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis describitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis instanti directio mobilis a vi centripeta mutatur; curva describitur, eaque versus C cava: quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB versus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero, ob AB = BD *per hypoth.* △△ ABC & BDC æqualia (§. 385 *Geom.*), & ob ED & BC parallelas (§. 241), △△ BCD & BCE itidem æqualia sunt (§. 385 *Geom.*); consequenter ABC = BEC. Quod cum eodem modo demonstretur de triangulis quotcunque aliis æqualibus tempusculis descriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus quibus describuntur proportionales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXXXVII.

653. *Si mobile in linea curva incedens vi centripeta versus centrum immobile urgetur; celeritas ejus est reciproce ut perpendiculum a centro illo in tangentem curvæ demissum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus describuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE, & in tempusculis infinite parvis motus æquabilis; erunt celeritates in A & B, ut AB ad BE (§. 33), Tab.V. hoc est, ut bases triangulorum ACB & Fig.57. BCE. Sunt vero triangula ista æqualia *per hypoth.* adeoque bases AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393 *Geom.*), hoc est, reciproce ut perpendicula ex centro C in bases AB & BE continuatas, quæ sunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20 *Analys. infin.*), demissa (§. 227 *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B sunt reciproce ut perpendicula ex centro C in tangentes demissa (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO LXVIII.

654. *Centrum virium* diximus punctum O, ad quod mobile in linea curva Tab. XVI. revolutum a vi centripeta continuo urgetur. Fig. 161. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur *Orbis*, vel *Orbita*, item *Trajectoria*.

DEFINITIO LXIX.

655. *Radius vector* est recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hærere supponitur.

COROLLARIUM.

656. Est adeo radius vector distantia mobilis a centro virium (§. 192 *Geom.*).

THEOREMA CXXXVIII.

657. *In omni curva vis centralis est in ratione composita ex directa radii vectoris, & reciproca radii osculi simplici, atque reciproca triplicata perpendiculi ex centro virium in tangentem orbis demissi.*

DEMONSTRATIO.

Tangat PN curvam in puncto M, sitque O centrum virium, OM radius

Tab. XVI. Fig. 161. vector & CM radius osculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius osculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ M*m* haberi potest pro arcu circuli radio CM descripti (§. 313, 314 *Analys. infin.*). Vis centripeta agens versus centrum circuli erit ut *m*R, quæ vero agit versus centrum virium Orbis O ut *m*N. Quoniam radius osculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317 *Analys. infin.*), & *m*RN = CMN + MCR = (§. 239 *Geom.*) = CMN, ob MCR infinite parvum = 0 (§. 3 *Analys. infin.*); angulus R recto æqualis, consequenter etiam ipsi P (§. 145 *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON (§. 239 *Geom.*) = MNO, ob MON infinite parvum = 0 (§. 3 *Anal. infin.*). Ergo *m*R : *m*N = PO : MO (§. 267 *Geom.*), hoc est, vis centripeta agens versus centrum circuli osculatoris C est ad vim centripetam versus centrum virium O agentem, ut PO ad MO *per demonstrata*. Quodsi celeritas, qua arculus M*m* describitur, fuerit = C: erit vis centripeta agens in centrum osculi $C = C^2 : MC$ (§. 627.). Est vero C reciproce ut PO, hoc est ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653); adeoque vis centripeta agens in centrum osculi C $= \frac{1}{PO^2.MC}$. Quare cum sit *per demonstrata* vis petens centrum osculi ad vim quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens versus centrum orbis $O = \frac{MO}{PO^3.MC}$, atque adeo est in ratione composita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii osculi MC, & reciproca triplicata perpendiculi ex centro Virium Orbis in tangentem demissi PO. *Q. e. d.* Tab. XVI. Fig. 161.

THEOREMA CXXXIX.

658. *Si corpus in peripheria circuli revolvatur, & vis centripeta idem urgeat versus punctum fixum* O *in peripheria situm; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris* OM.

DEMONSTRATIO.

Tangat PR circulum in puncto dato M & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius osculi (§. 324 *Analys. infin.*). Jam cum CM (§. 308 *Geom.*) & OP *per hypoth.* sint perpendiculares ad PR; erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), consequenter $o = x$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum OPM sit rectus, *per construct.* & MON itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit MN : MO = MO : OP, (§. 267 *Geom.*); adeoque $OP = \frac{MO^2}{MN}$, consequenter $OP^3 = \frac{MO^6}{MN^3}$. Est vero vis centripeta in $M = \frac{MO}{OP^3.MC}$ (§. 657). Quare si pro OP^3 substituatur ejus valor $\frac{MO^6}{MN^3}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO.MN^3}{MO^6.MC}$. Sunt vero MN & Tab. XVI. Fig. 162.

Tab. XVI. Fig. 162. MC in omni puncto peripheriæ constantes, adeoque, ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diversis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^6}$ seu $\frac{1}{MO^5}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q.e.d.*

THEOREMA CXL.

659. *Si corpus in peripheria circuli revolvitur, & vis centripeta ad punctum quodcunque intra circulum datum O tendat; erit ea in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris* OM *&* *triplicata chordæ* AM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 163. Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda DM; sitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P *per construct.* & AMD (§. 317 *Geom.*) rectus est, ac præterea $o=x$ (§. 323 *Geom.*); erit AD : AM = OM : OP (§. 267 *Geom.*), adeoque $OP = \frac{OM.\,AM}{AD}$: consequenter $OP^3 = \frac{OM^3.\,AM^3}{AD^3}$. Est vero vis centripeta in $M = \frac{MO}{OP^3.\,DC}$ (§. 657 *Mech.* & §. 324 *Analyſ. infin.*). Quare eadem $= \frac{MO.\,AD^3}{AM^3.\,OM^3.\,DC}$; consequenter cum AD & DC constantes sint, seu in omni puncto curvæ eædem; vis centripeta $= \frac{1}{AM^3.\,OM^2}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q.e.d.*

THEOREMA CXLI.

660. *In omni Sectione conica, vis centripeta tendens ad focum curvæ est reciproce in ratione duplicata radii vectoris, seu distantiæ a foco.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMN Sectio conica quæcunque, parabola, ellipsis vel hyperbola. Sit focus in O, & in eo centrum virium. Tangat TM sectionem conicam in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis, & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit ob OP & MH parallelas (§. 256 *Geom.*) POM $=x$ (§. 233 *Geom.*); adeoque ob rectos ad P & R, *per construct.* MO : OP = MH : MR (§. 267 *Geom.*); consequenter $OP = \frac{MO.\,MR}{MH}$. Est vero MR æqualis semiparametro (§. 418, 438, 504 *Analyſ. finit.*) adeoque $=\frac{1}{2}a$, si ea dicatur a. Ergo $OP = \frac{MO.\,\frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^3 = \frac{MO^3.\,a^3}{8MH^3}$. Porro in omni Sectione conica radius osculi $= \frac{4MH^3}{a^2}$ (§. 322, 325, 327 *Anal. infin.*). Quare cum vis centripeta sit ut $\frac{MO}{PO^3.\,MC}$ (§. 657), substitutis valoribus PO^3 & radii osculi MC reperitur ea $\frac{8\,MO.\,MH^3.\,a^2}{4MO^3.\,MH^3.\,a^3} = \frac{2}{MO^2.\,a}$, hoc est,

Tab. XVII. Fig. 163.

ob 2

Tab. XVII. Fig. 163. a. ob 2 & *a* constantes quantitates in omni puncto curvæ, $= \frac{1}{MO^2}$ (§. 178. 181 *Arithm.*). Vis igitur centripeta tendens ad focum Sectionis conicæ est reciproce ut quadratum distantiæ a foco seu radii vectoris. *Q. e. d.*

SCHOLION.

661. Quoniam proprietas hæc Sectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus fluit; ideo conveniens est ut generaliter ex iisdem demonstretur. Mensuram virium centripetarum ut $\frac{MO}{PO^3.MC}$ *superius demonstratam (§. 657) invenit* Abrahamus DE MOIVRE, *Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum mensuris aliorum, quas quantitates infinite parvæ ingrediuntur, sequente Problemate ostendere lubet.*

PROBLEMA CVI.

662. Invenire vim centripetam in qualibet curva.

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 161. Sit O centrum virium, MO radius vector, MC radius osculi, & OP ad tangentem PM perpendicularis. Describatur ex centro virium O, radio vectore MO, arcus infinite parvus MK. Fiat MC $= n$, MO $= x$; erit $mK = dx$. Sit porro MK $= dz$, & arculus curvæ $Mm = ds$; tempus vero per arcum Mm $= dt$. Quoniam hoc est ut sector OMK (§. 652); erit $dt =$ MK.$\frac{1}{2}$MO seu ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut MK.MO (§. 178 *Arithm.*), adeoque $= xdz$. Porro cum angulus ad P sit rectus, *per constr.* & K rectus (§. 38 *Analys. infin.*), &, ob infinite parvum $MOm = 0$ (§. 3 *Analys. infin.*), PMO $=$ MmK (§. 239 *Geom.*); erit Tab. XVI. Fig. 161.

$$Mm : MK = MO : OP$$

$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Est igitur $OP^3 = \frac{x^3dz^3}{ds^3}$, & hinc, cum

Vis centralis $\frac{MO}{OP^3.MC}$ (§. 657), erit ea

$$= x : \frac{nx^3dz^3}{ds^3}$$

$$= \frac{ds^3}{nx^2dz^3}$$

Est vero $dt = xdz$ *per demonstr.* & hinc $dt^2 = x^2dz^2$

Quare Vis centralis $= \frac{ds^3}{ndzdt^2}$

Atque hic est character analyticus unus, quem dedit VARIGNONIUS (*a*).

Aliter.

Quoniam angulus CMR rectus (§. 337 *Anal. infin.*), erit MRm, ab eodem non differens nisi quantitate infinite parva MCR (§. 239 *Geom.*) itidem rectus (§. 4 *Anal. infin.* & §. 145 *Geom.*), & ex eadem ratione MmR etiam rectus. Quamobrem mR haberi potest pro arculo, radio Mm descripto ex centro M (§. 38 *Analys. infin.*). Cum adeo sit Mm = MR (§. 40 *Geom.*); erit RN differentia inter arcum Mm & portionem tangentis MN, seu differentia secunda arculi Mm. Unde si Mm $= ds$, ut ante, RN $= dds$. Sit porro ut ante MK $= dz$, MO $= x$, adeoque Km $= dx$:

(*a*) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* A. 1701. p. 28. edit. Bat.

Tab. XVI. Fig. 161. $= dx$: tempusculum vero per arculum $Mm = dt$. Cum $MmK + KmC$ sit rectus (§. 38 *Analyſ. infin.*), & $RNm + RmN$ itidem rectus (§. 241 *Geom.*); sit vero $KmC = RmN$ (§. 156 *Geom.*); erit $MmK = RNm$ (§. 91 *Arithm.*).

Eſt vero præterea NRm rectus, *per demonſtr.* & MKm itidem rectus (§. 38 *Analyſ. infin.*). Quamobrem (§. 207 *Geom.*)

$$Km : KM = NR : mR$$

$$dx : dz = dds : \frac{ddsdz}{dx}.$$

Porro cum CMR ſit rectus, & Mm ad RC perpendicularis, *per demonſtr.* erit (§. 327 *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$

$$\frac{ddsdz}{dx} : ds = ds : \frac{ds^2 dx}{dzdds}$$

Eſt itaque $CM = n = \frac{ds^2 dx}{ddsdz}$.

Jam vis centralis ante reperta fuit $\frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Quare ſi ſubſtituatur valor radii circuli oſculatoris n modo inventus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3 dzdds}{ds^2 dxdzdt^2} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$. Atque hæc eſt formula altera quam dedit VARIGNONIUS (a).

S C H O L I O N.

663. *Quodſi beneficio harum formularum vis centralis in circulo & ſectionibus conicis eruere volueris, quemadmodum ante factum eſt: multo difficilius idem fieri intelliges, quam in anterioribus a nobis factum eſt. Sufficit itaque oſtendiſſe, quomodo formula, qua nos uſi ſumus, in* Varignonianas *degeneret.*

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1700. p. 286.

P R O B L E M A CVII.

664. *Data lege virium centripetarum, & conceſſis quadraturis; invenire Trajectoriam in qua mobile incedit.*

R E S O L U T I O.

Sit in O centrum virium, AC Trajectoria, AO ejus axis, AL arcus circuli radio AO deſcriptus. Ducantur radii OL & Ol infinite propinqui, & radiis OB ac Ob deſcribantur arcus EB & eb. Fiat denique $AO = a$, $AL = z$, $OE = x$; erit $Ee = BN = dx$, $Ll = dz$, &, ob ſectores ſimiles ObN ac OlL (§. 138, 412 *Geom.*). Tab. XVII. Fig. 164.

$$OL : Ll = Ob : bN$$

$$a : dz = x : \frac{xdz}{a}.$$

Sit celeritas qua mobile fertur in $B = c$, & vis centralis $= v$. Quoniam maſſa mobilis eadem exiſtente ſive $= 1$, elementum celeritatis dc, quod poſitivum vel negativum eſſe poteſt prout celeritas vel augetur vel minuitur, eſt ut elementum temporis in vim ſollicitantem ſive centralem ductum (§. 113); tempus vero per BN, ob motus in ſpatiolo infinite parvo æquabilitatem, ut $\frac{dx}{c}$ (§. 39); erit

$$-dc = \frac{vdx}{c}$$

$$-cdc = vdx$$

$$-\tfrac{1}{2}c^2 = \int vdx$$

hoc

Tab. XVII. *Fig.* 164. hoc est omissa quantitate constante $\frac{1}{2}$, cum hic tantummodo rationum habeatur ratio, (§. 187 *Arithm.*), & addita constante homogenea ex lege integrationis (§. 95 *Analyſ. infin.*)

$$ab - c^2 = \int v dx$$

$$ab - \int v dx = c^2$$

$$\sqrt{(ab - \int v dx)} = c.$$

Quoniam motus per Bb in tempusculo infinite parvo peractus æquabilis, erit spatium $Bb = cdt$ (§. 34)

adeoque $Bb = dt \sqrt{(ab - \int v dx)}$

Sed $dt = BO.\ bN$ (§. 652)

$$= \frac{x^2 dz}{a}$$

Ergo $Bb = \frac{x^2 dz \sqrt{(ab - \int v dx)}}{a}$

$$Bb^2 = \frac{x^4 dz^2 (ab - \int v dx)}{a^2}$$

Jam $BN^2 = dx^2$

$$bN^2 = \frac{x^2 dz^2}{a^2}$$

$$Bb^2 = dx^2 + \frac{x^2 dz^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2} = \frac{x^4 dz^2 (ab - \int v dx)}{a^2}$$

hoc est, ut observetur lex homogeneorum.

$$a^4 c^2 dx^2 + a^2 c^2 x^2 dz^2 = x^4 dz^2 (ab - \int v dx)$$

$$a^4 c^2 dx^2 = x^4 dz^2 (ab - \int v dx) - a^2 c^2 x^2 dz^2$$

$$\frac{a^4 c^2 dx^2}{x^4 (ab - \int v dx) - a^2 c^2 x^2}$$ Tab. XVII. *Fig.* 164.

$$\frac{a^2 c dx}{\sqrt{(abx^4 - x^4 \int v dx - a^2 c^2 x^2)}} = dz$$

$$z = \int (a^2 c dx : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int v dx - a^2 c^2 x^2)})$$

Hæc est æquatio generalis ad Trajectoriam, in qua mobile data vi centrali v ad punctum O urgetur, & in qua c denotat quantitatem arbitrariam constantem ex lege homogeneorum assumendam.

SCHOLION.

665. Æquationem hanc generalem ad Trajectoriam invenit Joannes Bernoulli, *Problema inversum de Trajectoriis, in quibus vires centrales sunt reciproce ut quadrata distantiarum, soluturus; ac inde casum hunc specialem non sine artificio deduxit* (a): *majoris enim artis est solvere Problema in casu speciali, quam generaliter. Ut vero solutionem nostro more cum primis Matheseos principiis perspicue connectamus, Problemata quædam per modum Lemmatum præmittenda sunt.*

PROBLEMA CVIII.

666. Invenire æquationem ad Parabolam, abscissis a foco computatis. Tab. XVII. *Fig.* 163. b.

RESOLUTIO.

Sit in Parabola $QO = x$, $QM = y$, parameter $= p$; erit $AO = \frac{1}{4}p$ (§. 396 *Analyſ. fin.*); adeoque $AQ = \frac{1}{4}p + x$, consequenter $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px$ (§. 388 *Analyſ. fin.*). *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA CIX.

667. Invenire æquationem ad Ellipsin, abscissis a foco computatis.

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* A. 1710. p. 691. & seqq.

Tab. XVII. Fig. 165.

RESOLUTIO.

Sit in F focus Ellipsis & in C centrum. Fiat $AB = m$, parameter $= p$, $FP = x$: erit $FA = \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)}$ (§. 427 *Analys. fin.*); adeoque

$$AP = \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x$$
$$PB = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} + x$$
$$AP . PB = \frac{1}{4}pm - 2x\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2$$

Jam ex natura Ellipseos (§. 420 *Analys. fin.*),

$$y^2 : \frac{1}{4}pm - 2x\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2 = p : m$$

Ergo

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - \frac{px^2}{m}.$$ *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA CX.

Tab. XVII. Fig. 163.b.

668. *Invenire æquationem ad Hyperbolam, abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

Sit focus Hyperbolæ in O, centrum C, axis dimidius transversus CA. Sit $2AC = m$, parameter $= p$, $OQ = x$, $QM = y$: erit $AO = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m$ (§. 463 *Anal. fin.*); adeoque

$$AQ = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m + x$$
$$AQ + 2AC = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{1}{2}m + x.$$
$$AQ(AQ + 2AC) = \frac{1}{4}pm + 2x\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2$$

Quare, cum sit ex natura Hyperbolæ (§. 459 *Analys. fin.*).

$$y^2 : \frac{1}{4}pm + 2x\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2 = p : m$$

erit

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{px^2}{m}$$

Q. e. i. & d.

PROBLEMA CXI.

669. *Invenire Trajectoriam in qua mobile incedit, si vis centripeta qua urgetur fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris.* Tab. XVII. Fig. 164.

RESOLUTIO.

Quoniam in solutione generali radium vectorem diximus x, erit vis centralis $v = \frac{1}{x^2} = \frac{a^2g}{x^2}$, servata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali substitui possit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (§. 664) in casu generali; $= \frac{a^2c^2dx}{\sqrt{(abx^4 - x^4\int v dx - a^2c^2x^2)}}$ erit idem in casu speciali

$$\frac{a^2c^2dx}{x\sqrt{(abx^2 - x^2\int\frac{a^2gdx}{x^2} - a^2c^2)}}$$

Sed $\int\frac{a^2gdx}{x^2} = \int a^2gx^{-2}dx = a^2gx^{-1}$

Quare $dz = \frac{a^2c^2dx}{x\sqrt{(abx^2 + a^2gx - a^2c^2)}}$

Cum dz, sive Ll, sit elementum arcus a forma ordinaria discedens; ut ad eam reducatur, fiat

$$x = \frac{a^2}{y}$$

erit $dx = -\frac{a^2dy}{y^2}$, & $x^2 = \frac{a^4}{y^2}$;

adeoque

Tab. XVII. Fig. 164.

adeoque $dz = -\frac{a^4c^2dy : y^2}{\frac{a^2}{y}\sqrt{(\frac{a^5b}{y^2}+\frac{a^4g}{y}-a^2c^2)}}$

$$= -\frac{a^4c^2dy}{a^2y\sqrt{(\frac{a^5b}{y^2}+\frac{a^4g}{y}-a^2c^2)}}$$

$$= -\frac{a^4c^2dy}{a^3\sqrt{(a^3b+a^2gy-c^2y^2)}}$$

$$= -\frac{ac^2dy}{\sqrt{(a^3b+a^2gy-c^2y^2)}}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2g}{2c^2} - t$

erit $y^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^2gt}{c^2} + t^2$

adeoque $-c^2y^2 = -\frac{a^4g^2}{4c^2} + a^2gt - c^2t^2$

$$a^2gy = \frac{a^4g^2}{2c^2} - a^2gt$$

$$dy = -dt$$

Unde tandem habetur

$$dz = \frac{acdt}{\sqrt{(a^3b+\frac{a^4g^2}{4c^2}-c^2t^2)}}$$

Fiat denique $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = c^2h^2$

erit $dz = \frac{acdt}{c\sqrt{(h^2-t^2)}}$

$$\frac{dz}{a} = \frac{dt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{hdt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$$

Habemus adeo elementum circuli $\frac{hdt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$, cujus radius h, finus rectus t (§. 153 *Anal. infin.*), per radium h divisum, & $\frac{dz}{a}$ est itidem elementum circuli Ll per radium LO divisum vi denominationis in solutione generali (§.664) facta. Jam dato radio, datoque arcu, datur angulus (§.57 *Geom.*), atque adeo ratio arcus ad radium; consequenter arcus per radium divisus (§. 129 *Arithm.*), exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LOl, & $\int\frac{dz}{a}$ angulum AOL; pariterque $\frac{hdt}{h\sqrt{(h^2-t^2)}}$ angulum priori LOl, & $\int\frac{hdt}{h\sqrt{(h^2-t^2)}}$ alium posteriori AOL æqualem, cujus radius h, sinus rectus t. Unde jam fluit constructio curvæ ABC istiusmodi.

Tab. XVII. Fig. 164.

Radio $h = \sqrt{(\frac{a^3b}{c^2}+\frac{a^4g^2}{4c^4})}$ describatur Quadrans MKT, sumtoque arcu AL $= z$, pro arbitrio, ducatur recta OL secans quadrantem istum in K, erit arcus KM $= \int\frac{hdt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$, & KI $= t$. Jam porro inveniri potest radius OB sive OE. Quoniam enim

$$y = \frac{a^2g}{2c^2} - t = \frac{a^2g - 2c^2t}{2c^2}$$

$$\& \quad x = \frac{a^2}{y}$$

$$\text{erit } x = \frac{2a^2c^2}{a^2g - 2c^2t}$$

$$= \frac{2c^2}{g - 2\frac{c^2t}{a^2}}$$

Est igitur $a : c = c : \frac{c^2}{a}$, & $a : t = \frac{c^2}{a} : \frac{c^2t}{a^2}$, ac denique $g - 2\frac{c^2t}{a^2} : c = c : \frac{c^2}{g-2c^2t:a^2}$.

Quodsi

Tab. XVII. *Fig.* 164. Quodsi recta OB hoc modo inventa, ex centro O describatur arcus EB; intersecabit is radium OL in B, eritque punctum B in Trajectoria quæsita.

PROBLEMA CXII.

670. *Invenire æquationem ad Trajectoriam, in qua vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium.*

RESOLUTIO.

Tab. XVII. *Fig.* 167. Sit $OQ = \frac{a^2g}{2c^2}$, & $OP = t$; erit $PQ = \frac{a^2g}{2c^2} - t = y$ (§. *669*). Quoniam $OB = z = \frac{a^2}{y}$; si intra asymptotos QO & QR describatur Hyperbola GNV, latere potentiæ existente $= a$ (§. 489 *Analys. finit.*) erit $PN = z$ (§. 488 *Analys. finit.*). Fiat jam $OF = x$, $FB = y$, reliqua sint ut ante; erit (§. 268 *Geom.*)

$$OP : OS = OF : OB$$

$$t : h = x : \frac{hx}{t}$$

Sed $OB = \frac{2a^2c^2}{a^2g - 2c^2t}$ (§. *669*).

Ergo $\frac{hx}{t} = \frac{2a^2c^2}{a^2g - 2c^2t}$

$$a^2ghx - 2c^2htx = 2a^2c^2t$$

$$a^2ghx = 2c^2htx + 2a^2c^2t$$

$$\frac{a^2ghx}{2c^2hx + 2a^2c^2}$$

Porro (§. *cit. Geom.*) Tab. XVII. *Fig.* 167.

$$OP : PS = OF : FB$$

$$t : \sqrt{(h^2 - t^2)} = x : y$$

$$x\sqrt{(h^2 - t^2)} = ty$$

$$h^2x^2 - t^2x^2 = t^2y^2$$

$$h^2x^2 = t^2x^2 + t^2y^2$$

$$\frac{h^2x^2}{x^2 + y^2} = t^2$$

Est vero etiam *per demonstrata.*

$$t^2 = \frac{a^4g^2h^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{h^2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^4g^2h^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{a^4g^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2}$$

$$4a^4c^4 + 8a^2c^4hx + 4c^4h^2x^2 = a^4g^2x^2 + a^4g^2y^2$$

$$y^2 = \frac{4c^4h^4x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Quæ est æquatio ad Trajectoriam quæsitam. Cum ea sit quadratica, erit ad Sectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in Trajectoria urgetur a vi centripeta, quæ est reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium; erit Trajectoria ista aliqua Sectio conica.

Ut appareat, ad quamnam Sectionem conicam sit æquatio; comparetur ea cum æquationibus singularum sectionum conicarum, quas ante reperimus, abscissis a foco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter $= p$, (§. *666*)

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + px$$

Æqua-

Tab. XVII. Fig. 167. Æquatio vero ad Trajectoriam *per demonstr.*

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Ob deficientem in Parabola secundum terminum, erit

$$\frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} - 1 = 0.$$

$$4c^4 h^2 = a^4 g^2$$

$$h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4}$$

$$h = \frac{a^2 g}{2c^2}$$

Est vero per constructionem, $h =$ OT $=$ OS, & $\frac{a^2 g}{2c^2} =$ OQ.

Trajectoria igitur Parabola est, si OT $=$ OQ.

In calculo sumsimus

$$h = \sqrt{\left(\frac{a^3 b}{c^2} + \frac{a^4 g^2}{4c^4}\right)},$$

in casu Parabolæ

$$\frac{a^3 b}{c^2} = 0;$$

adeoque $b = 0$.

$$p = \frac{8c^4 h}{a^2 g^2} \qquad \tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$= \frac{8c^4 a^2 g}{2a^2 c^2 g^2} \qquad p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$= \frac{4c^2}{g} \qquad p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo Parabolæ est tertia proportionalis ad g & $2c$.

Tab. XVII. Fig. 167. Æquatio pro Ellipsi, abscissis a foco computatis, est (§. 667),

$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam per demonstrata

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo eadem, quæ in Parabola.

$$\text{Porro} - \frac{p}{m} = \frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} - 1$$

$$\text{hoc est } 1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2}$$

$$a^4 g^2 - \frac{4a^4 c^2 g}{m} = 4c^4 h^2$$

$$h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2}\right)}$$

In Ellipsi adeo $\frac{a^2 g}{2c^2} > h$

hoc est, OQ $>$ OT.

Quodsi ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$$-\frac{2p}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4 b}{a^2 g^2};$$

hoc

Tab. XVII. Fig. 167.

hoc est, $\frac{8c^2}{mg}\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g})} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{c^2m}{g})} = \frac{mc^2h}{a^2g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g} = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$$

$$\tfrac{1}{4}m - \frac{c^2}{g} = \frac{mc^4h^2}{a^4g^2}$$

$$a^4g^2m - 4a^4c^2g = 4mc^4h^2$$

$$a^4g^2m - 4mc^4h^2 = 4a^4c^2g$$

$$m = \frac{4a^4c^2g}{a^4g^2 - 4c^4h^2}.$$

Æquatio pro Hyperbola abscissis a foco computatis est (§. 668).

$$y^2 = \frac{px^2}{m} + \frac{2px}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam est

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{2c^2}{g}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Eadem ergo parameter in Hyperbola, quæ in ceteris Sectionibus conicis.

$$\frac{p}{m} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1$$

hoc est $\frac{4c^2}{gm} = \frac{4c^4h^2 - a^4g^2}{a^4g^2}$

$$4a^4c^2g^2 = 4c^4h^2gm - a^4g^3m$$

$$4a^4c^2g^2 + a^4g^3m = 4c^4h^2gm$$

$$\frac{4a^4c^2g + a^4g^2m}{4c^4m} = h^2$$

$$\sqrt{(\frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{c^2m})} = h$$

Jam cum $QO = \frac{a^2g}{2c^2}$ & $TO = h$, fitque $\frac{a^2g}{2c^2} < h$; erit $QO < TO$, quando Trajectoria Hyperbola.

Tab. XVII. Fig. 167.

Si ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$$\frac{2p}{m}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

hoc est, ob $p = \frac{4c^2}{g}$,

$$\frac{8c^2}{gm}\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} = \frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm)} = \frac{mc^2h}{a^2g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm = \frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$$

$$m + p = \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$$

hoc est, $m + \frac{4c^2}{g} = \frac{4mc^4h^2}{a^4g^2}$

$$a^4g^2m + 4a^4c^2g = 4mc^4h^2$$

$$4a^4c^2g = 4mc^4h^2 - a^4g^2m$$

$$\frac{4a^4c^2g}{4c^4h^2 - a^4g^2} = m.$$

Quod si, datis m & p per literas assumtitias h, c, g & a, harum valores desiderentur per m & p; æquationum reductione facta facile determinantur.

Est enim $p = \frac{4c^2}{g}$ $\quad h = \frac{a^2g}{2c^2}$

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad c^2 = \frac{a^2g}{2h}$$

$$c^2 = \tfrac{1}{4}pg$$

$$\tfrac{1}{4}pg = \frac{a^2g}{2h}$$

$$p = \frac{2a^2}{h}$$

$$h = \frac{2a^2}{p}$$

Si

Si ergo p datur & c pro arbitrio aſſumitur, cum in omni Sectione conica ſit $p = 4c^2 : g$, valor ipſius g omni Sectioni conicæ reſpondet. Aſt cum in Parabola tantummodo ſit $h = a^2 g : 2c^2$; valor ipſius h per a & p determinatus Parabolæ proprius. Unde ſi valores quantitatum g & h modo repertos ſubſtituas in æquatione ad Trajectoriam, in æquationem ad Parabolam, abciſſis à foco computatis, eadem degenerat. Nimirum æquatio ad Trajectoriam

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 hx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Porro

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad h = \frac{2a^2}{p}$$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \qquad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4 h^2}{a^4 g^2} = \frac{16a^4 c^4 p^2}{16a^4 c^4 p^2} = 1$$

Coëfficiens itaque ipſius $x^2 = 1 - 1 = 0$: atque adeo hic terminus in æquatione, quæ quæritur, deficit.

$$\frac{8c^4 h}{a^2 g^2} = \frac{16a^2 c^4 p^2}{16a^2 c^4 p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4 p^2}{16c^4} = \tfrac{1}{4}p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \tfrac{1}{4}p^2$, quæ eſt ad Parabolam, abſciſſis à foco computatis (§. 666.).

Quodſi valor ipſius h in Ellipſi vel Hyperbola deſideretur, in æquationibus

$$h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2} \;\&\; h^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} + \frac{a^4 g}{mc^2}$$

ſubſtituendus eſt valor ipſius g. Nimirum

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo

$$h^2 = \frac{16a^4 c^4}{4c^4 p^2} \mp \frac{4a^4 c^2}{mpc^2} = \frac{4a^4}{p^2} \mp \frac{4a^4}{mp}$$

$$= \frac{4a^4 m \mp 4a^4 p}{mp^2}$$

$$h = \frac{2a^2}{p}\sqrt{(1 \mp \frac{p}{m})}$$

Si denique valor ipſius b deſideretur, in æquatione $a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} = ch^2$ ſubſtituendus eſt valor ipſius g^2 & h^2.

In Parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \qquad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Unde $a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$

h. e. $a^3 b + \frac{4a^4 c^2}{p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$

$$a^3 b = 0$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam ſupra reperimus.

In Hyperbola

$$h^2 = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2} \qquad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

$$\text{Ergo } a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} = \frac{4a^4 mc^2 + 4a^4 c^2 p}{mp^2}$$

$$a^3 b = \frac{4a^4 mc^2 + 4a^4 pc^2}{mp^2} - \frac{4a^4 c^2}{p^2}$$

$$= \frac{4a^4 c^2}{mp}$$

$$b = \frac{4ac^2}{mp}$$

In Ellipsi idem prodit valor, sed negativus.

SCHOLION.

671. *A Theoria virium centralium pendet solutio Problematis de curva, in qua grave descendens eandem ubique premit vi ponderi absoluto æquali: quod à* Joanne Bernoulli *propositum* (a) *solvit* Hospitalius (b). *Ejus igitur solutionem hic subnectere libet.*

PROBLEMA CXIII.

Tab. XVII. Fig. 168. 672. *Invenire curvam, in qua grave descendens motu naturaliter accelerato eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto; seu, si* MC *sit radius evolutæ in puncto* M, *ut ubique filum* MC *eadem vi tendat.*

RESOLUTIO.

Sit AH axis curvæ, AB altitudo per quam cadendo acquirit celeritatem initialem, qua descensum in curva inchoat: PM & *pm* sint ordinatæ infinite propinquæ, MC radius evolutæ ad curvam BMK ex evolutione descriptam normalis (§. 317 *Analys. infin.*). Producatur PM in N & repræsentet MN pondus absolutum corporis descendentis. Producatur itidem radius evolutæ CM indefinite & in eum sic productum ex N demittatur perpendicularis NO; repræsentabit MO partem ponderis quo premitur curva in puncto M; seu planum in quo est tangens curvæ in puncto M (§. 47 *Geom.*). Tab. XVII. Fig. 168.

Enimvero filum CM non modo tenditur in M ab hac gravitatis parte, quæ est ut MO; verum etiam a vi centrifuga quam habet in arculo M*m* radio evolutæ MC descripto. Quamobrem aggregatum ex ea gravitatis parte & conatu centrifugo in M est æquale ponderi absoluto *per hypoth.*

Sit jam conatus centrifugus $=$ V, erit (§. 639)

$$MC : 2PM = MN : V$$

adeoque $V = \frac{2PM.\ MN}{MC}$,

consequenter

$$MN = \frac{2PM.\ MN}{MC} + MO$$

per demonstr.

Sit igitur MN $= a$, quia MN pondus absolutum denotans constans est, AP $= x$, PM $= y$, arcus curvæ BM $= v$; erit P*p* $=$ MR $= dx$, *m*R $= dy$, M*m* $= dv$, & MC $= tdv : dx$ (§. 320 *Anal. infin.*).

Ut valor ipsius *t* determinetur, fiat, ut ibidem, differentiale ipsius MC $= 0$. Sed quia in singulis arculis M*m* pressio eadem *per hypoth.* ubivis assumendi sunt æquales, atque adeo M*m* $= dv$ quantitas constans. Sumta igitur in differentiatione *dv* pro constante, prodibit

(a) In *Actis Erudit. Supplem.* T. 2. p. 291.
(b) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1700. pag. 11.

dvdtdx

Tab. XVII. Fig. 168.

$$\frac{dvdtdx - tdvddx}{dx^2} = o$$

$$dvdtdx = tdvddx$$

$$\frac{dtdx}{ddx} = t$$

Est vero $dt = dy$ (*§. cit. Analys. infin.*)

Ergo $t = \frac{dydx}{ddx}$.

Substituatur hic valor in expressione radii osculi seu evolutæ $MC = tdv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dvdydx}{dxddx} = \frac{dydv}{ddx}$$

Porro CMR + RM*m* est rectus (§.317 *Analys. infin.*), & PMC + CMR itidem rectus, ob MR & P*p* perpendiculares ad *p*R alteri PM parallelam (*§.*230 *Geom.*). Quamobrem CMR + RM*m* = PMC + CMR (§. 145 *Geom.*), adeoque RM*m* = PMC (§. 91 *Arith.*). Est vero PMC = OMN (§.156 *Geom.*). Ergo RM*m* = OMN (§. 87 *Arithm.*). Quoniam præterea anguli O & R recti sunt *per constr.* erit (§.267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : MO$$

$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}.$$

Denique cum sit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2PM.\ MN}{MC}$$

hoc est, $\frac{dydv}{ddx} : a = 2y : \frac{2\ ayddx}{dydv}$

habebimus ob $\frac{2PM.\ MN}{MC} + MO = MN$ per demonstrata, $\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = a$

$$2ayddx + adydx = adydv$$

$$2yddx + dydx = dydv.$$

Quodsi coëfficiens 2 abesset, summa membri primi foret ydx. Sed si integrabile fieri debet, dividendum est per $2\sqrt{y}$: quo facto prodit

$$\frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}} = \frac{dydv}{2\sqrt{y}}$$

$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$, quia dv constans;

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv sit differentiale arcus, dx abscissæ; adjicienda est quantitas constans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $-dv\sqrt{a}$. Habemus adeo

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$$

$$ydx^2 = ydv^2 - 2dv^2\sqrt{ay} + adv^2$$

Sed $dv^2 = dx^2 + dy^2$

Ergo

$$ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2$$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 + ady^2 - 2dy^2\sqrt{ay}$$

$$dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy\ (\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}.$$

Fiat $z = 2\sqrt{ay} - a$

erit $dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$

$$\frac{dz.\sqrt{y}}{a} = dy$$

Jam $z = 2\sqrt{a}.\ \sqrt{y} - a$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

Tab. XVII. Fig. 168.

five $\frac{z+a}{2\sqrt{a}}=\sqrt{y}$

Porro $\frac{z}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\sqrt{a}=\sqrt{y}-\sqrt{a}$

feu $\frac{z-a}{2\sqrt{a}}=\sqrt{y}-\sqrt{a}$.

Quodsi ergo valores hactenus inventi substituantur in formula

$dx=\frac{dy.(\sqrt{y}-\sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay}-a)}}$; prodibit

$$dx=\frac{dz\,(z+a)\,(z-a)}{4a\sqrt{a}.\sqrt{z}}$$

$$=\frac{(z^2-a^2)\,dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a}=\frac{z^2\,dz-a^2\,dz}{\sqrt{z}}$$

$$=z^{3:2}\,dz-a^2\,z^{-1:2}\,dz$$

$$4.ax\sqrt{a}=\tfrac{2}{5}z^{5:2}-2a^2\,z^{1:2}$$

$$2\,ax\sqrt{a}=\tfrac{1}{5}\,(z^2-5a^2)\sqrt{z}$$

Jam $z^2=4ay-4a\sqrt{ay}+a^2$

$\sqrt{z}=\sqrt{(2\sqrt{ay}-a)}$

Quamobrem

$$10\,ax\sqrt{a}=(4ay-4a\sqrt{ay}-4a^2)\sqrt{(2\sqrt{ay}-a)}$$

$$5\;ax=(2y-2\sqrt{ay}-2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay}-a^2)}.$$

Sit $x=0$; erit

$$2y-2\sqrt{ay}-2a=0$$

$$2y-2\sqrt{ay}=2a$$

$$y-\sqrt{ay}=a$$

$$\tfrac{1}{4}a\quad\tfrac{1}{4}a$$

$$y-\sqrt{ay}+\tfrac{1}{4}a=\tfrac{5}{4}a$$

$$\sqrt{y}-\tfrac{1}{2}\sqrt{a}=\tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$\sqrt{y}=\tfrac{1}{2}\sqrt{a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$y=\tfrac{6}{4}a+\tfrac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$2y=3a+a\sqrt{5}=2\,AB.$$

Fiat $y=0$,

erit $5\,ax=-2a\sqrt{a^2}$

$$x=-\tfrac{2}{5}a$$

Curva igitur KMB continuatur ultra punctum B. Nimirum si fiat $AD=a$ & erecta perpendiculari $CD=\frac{2}{5}a$; curva huic in puncto C occurrit.

Quoniam curva verticalem ad angulos rectos secat, ubi differentiale semiordinatæ $=0$; ut punctum reperiatur, in quo curva rectam AB secat ad angulos rectos, fiat $dy=0$, erit ob $dx\sqrt{(2a\sqrt{ay}-a^2)}=dy\,(\sqrt{y}-\sqrt{a})$

$$dx\sqrt{(2a\sqrt{ay}-a^2)}=0$$

$$2a\sqrt{ay}-a^2=0.$$

$$2\sqrt{ay}=a$$

$$4ay=a^2$$

$$y=\tfrac{1}{4}a.$$

Quamobrem si fiat $AG=\frac{1}{4}a$, curva secabit AB in G ad angulos rectos.

PROBLEMA CXIV.

673. *Invenire curvam, in qua mobile descendens eandem quidem constanter eadem vi premit, sed qua non æqualis est ponderi absoluto.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in Problemate præcedente, nisi quod vis premens dicatur b; erit (§. 672),

$$\frac{2\,ayddx}{dydv}+\frac{adx}{dv}=b.$$

$$2.\,ayddx+adydx=bdydv$$

$$\frac{2ayddx+adydx}{2\sqrt{y}}=\frac{bdvdy}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y}=bdv\sqrt{y}-adv\sqrt{a}$$

$a^2\,ydx^2$

$$a^2ydx^2 = b^2ydv^2 - 2abdv^2\sqrt{ay} + a^3dv^2$$
$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydy^2 + b^2ydx^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} - 2abdx^2\sqrt{ay} + a^3dy^2 + a^3dx^2$$

$$a^2ydx^2 - b^2ydx^2 + 2abdx^2\sqrt{ay} - a^3dx^2 = b^2ydy^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} + a^3dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)} = dy(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})}{\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)}}.$$

Fiat $b = 0$, erit

$$dx = -\frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2y - a^3)}} = -\frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$
$$x = 2\sqrt{(ay - a^2)}.$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

Eſt igitur in hoc caſu curva, per quam mobile deſcendit, Parabola, cujus parameter $= 4a$. Quando vero $b = 0$, perinde eſt ac ſi mobile in vacuo libere deſcendit. Quamobrem conſenſus Hypotheſium præſentium cum curva deſcenſus *Galilaana* patet (§. 482).

S C H O L I O N.

674. *Monuit jam* V A R I G N O N I U S (a) *eandem Solutionem ad alia Problemata ſimilia extendi poſſe: quod quomodo fiat, ſequente Problemate oſtendere lubet.*

P R O B L E M A CXV.

Tab. XVII. Fig. 168. 675. *Invenire curvam, qua a pondere in ea deſcendente premitur in ratione dignitatum altitudinum* PM.

R E S O L U T I O.

Si omnia ſint ut in antecedentibus, erit *per hypotheſ.*

$$\frac{2aydd x + adxdy}{dydv} = \frac{y^n}{a^{n-1}} \quad (§. 672)$$

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* A. 1710. p. 196.

$$2yddx + dxdy = y^n a^{-n} dvdy$$

$$\frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2}y^{n-1:2}a^{-n}dvdy$$

$$dx\sqrt{y} = \frac{y^{n+1:2}dv}{(2n+1)a^n} = \frac{y^n dv\sqrt{y}}{(2n+1)a^n}$$

$$(2n+1)a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2a^{2n}dx^2 = y^{2n}dv^2 = y^{2n}dx^2 + y^{2n}dy^2$$

$$(2n+1)^2a^{2n}dx^2 - y^{2n}dx^2 = y^{2n}dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})}}.$$

Quodſi jam fuerit $n = 1$, adeoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile deſcendit, conſequenter in ratione duplicata celeritatum (§. 86): erit

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(9a^2 - y^2)}}$$

$$x = -\sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

Fiat $y = 0$, relinquetur $\sqrt{9a} = 3a$, conſequenter (§. 109 *Anal. infin.*)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2 - y^2)}.$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Eſt ergo curva quæſita circulus, cujus radius eſt $3a$.

Sit $n = 2$, hoc eſt, prematur curva in ratione duplicata altitudinum deſcenſus, ſeu quadruplicata celeritatum (§. 86); erit

$$dx = \frac{y^2dy}{\sqrt{(25a^4 - y^4)}};$$

Quæ eſt æquatio ad Curvam Elaſticam *Bernoullianam (a)*.

Sit $n = \frac{1}{2}$, hoc eſt, prematur curva in ratione ſubduplicata altitudinum, ſeu in ratione celeritatum (§. *cit.*); erit

$$dx = \frac{y^{1:2}\, dy}{\sqrt{(4a-y)}}$$

$$dx^2 = \frac{ydy^2}{4a-y}$$

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 = \frac{ydy^2}{4a-y} + dy^2$$

$$= \frac{ydy^2 + 4ady^2 - ydy^2}{4a - y}$$

$$= \frac{4ady^2}{4a-y}$$

$$dv = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{(4a-y)}} = \frac{2\,ady}{\sqrt{(4a^2-ay)}}$$

$$v = -4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Fiat $y=0$, erit reſiduum $= -8a$, adeoque

$$v = 8a - 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Tab. XVII. *Fig.* 166. Quodſi diameter circuli HB $= 4a$, HI $= y$; erit IB $= 4a - y$.

Quare $IB^2 = 16a^2 - 8ay + y^2$

$IN^2 = 4ay - y^2$

(§. 377 *Anal. fin.*)

$BN^2 = 16a^2 - 4ay$

$BN = 2\sqrt{(4a^2 - ay)}$

Tab. XVII. *Fig.* 166.

$2BN = 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$ = arcui Cycloidis BM (§. 168 *Anal. infin.*)

$2BH = BM + AM$

$8a = BMA$

$8a - 4\sqrt{(4a^2 - ay)}$ = arcui AM.

Atque adeo patet curvam, quæ a mobili deſcendente premitur in ratione celeritatum, ſeu altitudinum ſubduplicata, eſſe Cycloidem ordinariam.

Corollarium.

676. Quodſi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$, & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem eſt $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(4a-y)}}$. Quare ſi diameter circuli genitoris fuerit $= a$, reliqua maneant ut ante; æquatio ad Cycloidem eſt $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}} = \frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$, conſequenter area Cycloidis APM $= \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$.

CAPUT XIV.

De Reſiſtentia Medii.

Definitio LXX.

677. Per *Reſiſtentiam medii* intelligitur reſiſtentia fluidi, per quod mobile fertur.

(a) In *Actis Eruditorum* A. 1694. p. 272. & A. 1695. p. 538.

Corollarium.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus reſiſtit, loco pellere tenetur, atque adeo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, maſſa quippe manente eadem, minuitur (§. 22).

PROBLEMA CXVI.

Tab. XVII. Fig. 169. 679. *Data celeritate mobilis in medio resistente motu aquabili lati; invenire celeritatem dato tempore amissam, spatium confectum, & curvam resistentiæ, in qua semiordinatæ sunt ut celeritates amissæ.*

RESOLUTIO.

Sit AB celeritas, qua mobile initio fertur $= a$, ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP $= x$ amissas, PN celeritas amissa $= r$; erit NM celeritas residua, quæ dicatur v. Sit jam *pm* alteri PM infinite propinqua; erit NK differentia positiva semiordinatarum PN & *pn*, seu celeritatum extinctarum $= dr$, eademque differentia negativa semiordinatarum NM & *nm* seu celeritatum residuarum $= - dv$. Unde resultat

$$\text{I. } dr = - dv.$$

Tab. XVII. Fig. 170. Sit porro curva ESI, cujus ordinatæ PS sunt ut NK (Fig. 169). seu legem resistentiæ exponunt. Quodsi ergo NK dividas per PS, quotus erit quantitas constans; perinde enim fere est, ac si eandem quantitatem dividas per se ipsam. Sit PS $= z$. Quoniam NK $= - dv$, *per demonstrata*; erit $\frac{NK}{PS} = - \frac{dv}{z}$. Jam cum P$p = dx$; quia AP perinde ac in curva præcedente tempus exponit, sit constans; erit per legem homogeneorum

$$- \frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{II. } - adv = zdx.$$

Sit denique spatium a mobili tempusculo dx percursum $= ds$. Quoniam idem est vdx (§. 34), erit

$$ds = vdx$$

adeoque III. $s = \int vdx$

SCHOLION.

680. *Ex formulis hisce generalibus, quas dedit* VARIGNONIUS (*a*), *deducuntur quæ de resistentia medii in hypothesibus specialibus a* WALLISIO, NEWTONO, HUGENIO, *atque* LEIBNITIO *inventa sunt: quemadmodum ex sequentibus patebit.*

THEOREMA CXLII.

681. *Si mobile motu aquabili fertur per medium in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; curva resistentiæ totalis* ANG *est Logarithmica, cujus asymptotus tempus, semiordinatæ ad ipsum relatæ celeritates residuas repræsentant.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobili resistitur in ratione celeritatum *per hypothes.* seu celeritates in instanti amissæ sunt ut celeritates; si omnia sint ut in Problemate præcedente (§. 679): erit $z = v$. Est vero $- adv = zdx$, *vi num. II.* (§. *cit.*). Ergo $- adv = vdx$; consequenter $a = - \frac{vdx}{dv}$. Est vero $- \frac{vdx}{dv}$ subtangens curvæ, cujus abscissæ sunt x, semiordinatæ decrescentes v (§. 20 *Anal. infin.*). Ergo subtan-

(*a*) In *Comment. Acad. Reg. Scient.* A. 1707. p. m. 503.

Tab. XVII. Fig. 169. tangens curvæ resistentiæ totalis ANG constans est. Ipsa adeo est Logarithmica, cujus asymptotus BF (§. 54 *Anal. infin.*). Repræsentat autem BF tempus, & semiordinatæ ad ipsum relatæ exprimunt celeritates residuas à resistentia medii. *Q. e. d.*

SCHOLION.

682. *Si quis dubitet hanc esse Logarithmicæ proprietatem propriam, quod subtangens sit constans: haud difficulter idem demonstratur. Sint enim* z *&* y *duæ semiordinatæ,* v *&* x *ipsis respondentes abscissæ: erunt subtangentes* $\frac{ydx}{dy}$ *&* $\frac{zdv}{dz}$, *adeoque* ydx : dy = a, *&* zdv : dz = a (§. 54 Anal. infin.), *consequenter* ydx : dy = zdv : dz (§. 87 Arithm.) *Quoniam differentiale abscissæ sumitur constans; erit* dx = dv, *consequenter* y : dy = z : dz (§. 183 Arithm.), *adeoque* y + dy : y = z + dz : z (§. 190 Arithm.). *Habemus adeo semiordinatas in proportione geometrica. Jam ipsis respondentes abscissæ* x + dx *&* x, *atque* v + dv *&* v, *ob* dx = dv, *sunt æqui-differentes* (§. 322 Arithm.). *Abscissis adeo æqui-differentibus respondent semiordinatæ in geometrica progressione; consequenter curva constantis subtangentis est Logarithmica* (§. 552 Anal. fin.). *Ceterum* ANG *dicitur* curva resistentiæ totalis, *ad differentiam* curvæ resistentiæ instantaneæ, *in qua semiordinatæ sunt ut celeritates in instanti amissæ.*

THEOREMA CXLIII.

683. *Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum, & tempora sumuntur æqualia; erunt celeritates in principiis singulorum temporum in progressione geometrica, & partes singulis temporibus amissæ erunt iisdem proportionales, seu ut totæ, vel etiam ut celeritates in fine illorum temporum.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Si enim mobili a medio per quod motu æquabili fertur, resistitur in ratione celeritatum; curva resistentiæ ANG Logarithmica est, cujus asymptotus BF tempus repræsentat, abscissæ vero NM celeritates residuas exhibent (§. 681). Quodsi ergo tempora sumuntur æqualia, celeritates in principiis temporum sunt in geometrica progressione (§. 552 *Anal. fin.*) *Quod erat unum.*

Quodsi fiat BM = MR, tempora, quibus amittuntur celeritates AO & NV, æqualia sunt. Est vero AB : NM = NM : TR, *per demonstr.* Ergo AB — NM : AB = NM — TR : NM (§. 193 *Arithm.*), hoc est, AO : AB = NV : NM; consequenter AO : NV = AB : NM (§. 173 *Arithm.*), seu celeritates temporibus æqualibus amissæ sunt ut totæ in principiis illorum temporum. *Quod erat secundum.*

Quoniam AB : NM = NM : TR *per demonstr.* erit etiam AB — NM : NM = NM — TR : TR (§. 193 *Arithm.*); hoc est, AO : NM = NV : TR, consequenter AO : NV = NM : TR (§. 173 *Arithm.*), seu celeritates temporibus æqualibus BM & MR amissæ, sunt ut celeritates NM & TR in fine illorum temporum. *Quod erat tertium.*

Ulti-

Tab. XVII. Fig. 169. Ultimum quoque ita ostenditur. AO : NV = AB : NM, *per num.* 2. & AB : NM = NM : TR, *per num.* 1. Ergo AO : NV = NM : TR (§. 167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA CXLIV.

684. *Si mobile motu æquabili per medium fertur in quo eidem resistitur in ratione celeritatum ; spatia singulis temporibus descripta sunt ut celeritates amissæ, & , si tempora sumantur æqualia, ut celeritates totæ in principio vel in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia sint ut in Problemate generali (§. 679); erit $-adv = zdx$, *vi num. II.* & $vdx = ds$, *vi num. III.* Est vero $z = v$ *per hypoth.* Ergo $-adv = vdx$ (§. 15 *Arithm.*); consequenter $ds = -adv$ (§. 87 *Arithm.*). Est igitur $s = a^2 - av$ (§. 95 *Anal. infinit.*), seu, ob constantem a, est s ut $a - v$ (§. 181 *Arithm.*). Sed $a - v$ est celeritas a mobili tempore x amissa. Quamobrem spatia sunt ut celeritates amissæ. *Quod erat unum.*

Quodsi tempora sumantur æqualia, celeritates amissæ sunt ut totæ in principio, vel fine illorum temporum (§. 683). Sunt vero etiam ut celeritates amissæ istis temporibus, ita spatia movendo iisdem confecta *per demonstrata.* Ergo eadem spatia sunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA CXLV.

685. *Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum resistitur , & tempora sumuntur æqualia seu in progressione arithmetica ; erunt celeritates in instanti, seu tempusculo infinite parvo, amissæ ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Curva enim resistentiæ Logarithmica est, cujus asymptotus tempora, semiordinatæ ad eandem relatæ celeritates in fine illorum temporum repræsentant (§. 681). Quare si tempora sint x & t, semiordinatæ ipsis respondentes y & z; erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (§. 54 *Anal. infin.*), consequenter cum tempora sumantur in progressione arithmetica, *per hypoth.* sitque adeo $dx = dt$ (§. 333 *Arithm.*) $y : dy = z : dz$. Est itaque $y : z = dy : dz$ (§. 173 *Arithm.*), hoc est, celeritates in fine temporum istorum y & z sunt ut celeritates in instanti inde amissæ dy & dz. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

686. Quoniam in curva resistentiæ instantaneæ ESI, abscissa EP est ut tempus, semiordinata PS ut celeritas in instanti amissa (*§.* 682); PS vero est celeritas in fine temporis EP mobili residua (*§.* 685), & in curva resistentiæ totalis abscissis, tanquam temporibus, respondent semiordinatæ, tanquam celeritates istis amissæ (§. 682) ; curva resistentiæ totalis eadem quæ curva resistentiæ instantaneæ , si mobili motu æquabili lato resistitur in ratione velocitatum. Tab. XVII. Fig. 170.

THEOREMA CXLVI.

687. *Si mobili motu æquabili lato resistitur in medio per quod fertur in ratione celeritatum; spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium integrum percurrendum ad spatium aliud percurrendum, ita celeritas quam initio motus habet mobile ad celeritatem residuam (§. 684). Quamobrem spatium quodlibet adhuc percurrendum est ad integrum, ut celeritas residua qua percurrendum, ad celeritatem initialem, seu quam in principio habet mobile (§. 193 *Arithm.*): quod cum de omni spatio percurrendo verum sit; erit spatium percurrendum unum ad aliud quodcunque, ut celeritas residua qua illud percurrendum, ad celeritatem residuam, qua hoc percurrendum (§. 195 *Arith.*); hoc est, spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis quibus percurrenda proportionalia (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. XVII. Fig. 169. 688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per spatium integrum percurrendum; cum spatia percursa sint AO, AQ &c. (§. 684), erunt percurrenda OB, QB &c. seu applicatæ NM & TR ad asymptotum BF Logisticæ ANG.

THEOREMA CXLVII.

689. *Si mobili motu æquabili lato a medio resistitur in ratione celeritatum & spatia adhuc percurrenda sint ut numeri; erunt tempora insumta percursis ut illorum Logarithmi.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenda sunt ut semiordinatæ Logisticæ NM, TR &c. applicatæ ad tempora insumta BM, BR, spatiis jam percussis AO, AQ (§. 688). Enimvero si in Logistica NM, TR sumuntur ut numeri, abscissæ BM, BR sunt ut eorum Logarithmi (§. 553 *Anal.*). Ergo si spatia percurrenda sunt ut numeri, tempora sunt eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA CXLVIII.

690. *Si mobile æquabili motu incedit in medio quod in ratione velocitatum eidem resistit; celeritas nonnisi tempore infinitò extinguitur, & spatium percurrendum integrum* AB *nunquam absolvit, etsi semper accedat ad limitem.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decrescentes sunt ut semiordinatæ Logarithmicæ ad asymptotum BF applicatæ, & asymptotus tempus exhibet (§. 681). Quare cum AB celeritatem integram repræsentet quam mobile in principio motus habet; ea prorsus extingui nequit, nisi punctis G & F coincidentibus, seu Logistica ANG cum asymptoto BF concurrente; quod cum fieri non possit nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. infin.*); celeritas quoque nullo tempore finito extingui potest. *Quod erat primum.*

Jam cum celeritate quam in principio motus habet mobile non prorsus extincta,

Tab. XVII. Fig. 169. extincta, terminum B attingere non possit; nullo quoque tempore finito eundem attingere valet; adeoque spatium percurrendum integrum AB nunquam absolvit. *Quod erat secundum.*

Quia tamen motus indesinenter continuatur, adeoque spatium celeritatibus amissis descriptum continuo crescit; mobile ad terminum suum B continuo propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

691. *Nemo objiciat Propositionem præsentem experientiæ repugnare: neque enim hypothesis resistentiæ in ratione velocitatum naturæ rerum conformis, quemadmodum suspicatus fuit* WALLISIUS. *Et si vel maxime hypothesis naturæ prope ad eam accederet; ex naturæ consuetudine motus in praxi tandem insensibilis fieri deberet, quemadmodum a* LEIBNITIO (a) *jam annotatum est.*

THEOREMA CXLIX.

692. *Si intra asymptotos rectangulas* AB *&* BK *describatur Hyperbola* FLS, *&, motus initio, celeritas exponatur per rectam* AB, *elapso aliquo tempore vero per rectam* OB; *tempus per aream* AFLO, *& spatium eo tempore descriptum per rectam* AO *exprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Si enim BQ & BO fuerint celeritates in fine temporum BM & BR restantes; dicaturque $BQ = y$, $BO = z$; erit $y : z = dy : dz$ (§. 685), consequenter $y : dy = z : dz$ (§. 173 *Arithm.*). Sunt vero $\frac{dy}{y}$ & $\frac{dz}{z}$ elementa spatii hyperbolici asymptotici (§. 120 *Anal. infin.*). Quamobrem elementa ista æqualia sunt, si eorum altitudines quæ sunt abscissarum in asymptoto BA sumtarum differentialia, fuerint ut celeritates in instanti amissæ. Quodsi ergo, ab initio motus usque ad plenariam extinctionem, sumantur continuo AO, AQ ut celeritates extinctæ; spatium hyperbolicum asymptoticum resolvitur in elementa inter se æqualia. Atque adeo area FAOL successiva elementorum æqualium additione gignitur, quemadmodum abscissa AP continua accessione elementorum æqualium resultat. Enimvero abscissa AP exponitur tempus, quo celeritas PN, sive AO, amittitur, *per hypoth.* Ergo etiam spatium hyperbolicum AFLO tempus designare debet, quo celeritas AO amittitur. *Quod erat unum.* Tab. XVII. Fig. 169.

Jam rectæ AO & AQ sunt ut celeritates temporibus BM & BR amissæ, *per hypoth.* Sunt vero spatia temporibus BM & BR movendo confecta ut celeritates iisdem temporibus extinctæ (§. 684). Ergo spatia temporibus BM & BR seu, quod perinde est *per demonstrata*, temporibus AFLO & AFHQ confecta sunt ut rectæ AO & AQ. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CL.

693. *Si motui æquabili in medio resistitur in ratione celeritatum; decrementa celeritatum sunt incrementis spatiorum proportionalia.*

(a) In *Actis Eruditorum.* A. 1689. p. 41.

DEMONSTRATIO.

Spatia enim & celeritates amissæ eodem tempore per eandem rectam exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decrementa eodem tempore, per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa spatiorum & decrementa celeritatum iisdem rectis proportionalia sunt; spatiorum quoque incrementa celeritatum decrementis proportionalia sunt (§. 167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

SCHOLION I.

694. WALLISIUS, *qui primus de resistentia aëris in motu corporum determinanda cogitavit* (a), *& resistentiam in ratione celeritatum fieri supposuit; rationem celeritatis* a, *quæ initio motus est, ad residuam, uno momento, seu tempusculo infinite parvo elapso, sumit ut* m *ad* 1. *Celeritas igitur residua est* $\frac{a}{m}$. *Jam cum celeritates residuæ in progressione geometrica decrescant* (§.685), *per hanc seriem exhibentur celeritates ab initio motus usque ad ejus extinctionem*, $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}$, &c. *in infinitum, donec scilicet quod restat est respectu ipsius* a *infinite parvum, adeoque nullum. Summa igitur celeritatum* $a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5}$ &c. *in infinitum, ob terminum ultimum contemtibilis parvitatis*, $= \frac{a}{m-1} + a$ (§.120 *Anal. fin.*) $= \frac{a+ma-a}{m-1} = \frac{ma}{m-1}$. *Jam vero, singulis celeritatibus, tempusculis æqualibus describuntur singula spatiola, quæ cum sint ut celeritates, spatium integrum, celeritate prorsus extincta, erit* $\frac{ma}{m-1}$, *seu, si* $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, *quemadmodum idem determinat* WALLISIUS.

(a) In *Algebra* c. 101. f. 438. Vol. 2. *Oper.*

SCHOLION II.

695. NEWTONUS (b) *cum deprehenderet hypothesin resistentiæ in ratione celeritatis magis mathematicam esse quam naturalem, & naturæ magis conformem censens alteram de resistentia in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege resistentiæ oriundos considerare cepit. Nostrum igitur est ut eosdem hic more nostro explicemus. Ex superioribus enim formulis generalibus deducuntur, quæ de eodem notanda veniunt; prouti ex sequentibus patet.*

THEOREMA CLI.

696. *Si corpus motu æquabili per medium similare fertur, ipsique resistitur in velocitatis ratione duplicata; curva resistentiæ totalis est Hyperbola æquilatera* ANG *intra asymptotos* HK *&* KF, *puncto* B, *in quo celeritas initialis* AB *applicatur, a centro* K *intervallo rectæ* AB *quæ celeritatem initialem exponit distante.* Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis AB $= a$, celeritas amissa $= v$, tempus quo amittitur $= x$, decrementum celeritatis instantaneum ut z; erit $-adv = zdx$ (*vi num. II.* §. 679). Est vero decrementum celeritatis instantaneum in ratione duplicata celeritatis extinctæ *per hypoth.* adeoque servata lege homogeneorum $z = \frac{v^2}{a}$. Quamobrem

$$-adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{a^2}$$

hoc

(b) In *Princ.* Lib. 2. Prop. 5. & seqq. p. m. 239.

Tab. XVII. Fig. 171.

hoc eſt, $-v^{-2}dv = dx : a^2$

$$v^{-1} = x : a^2$$

Sive, ſi quantitas conſtans in integratione adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = 0$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, adeoque

$$\frac{1}{a} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo $\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$

$$a^2 - av = vx$$

$$a^2 = vx + av$$

Curva igitur reſiſtentiæ totalis ANG eſt Hyperbola æquilatera intra aſymptotos HK & KF; latere potentiæ Hyperbolæ exiſtente linea recta quæ celeritatem exponit, & applicata AB, quæ eandem exponit, ſui intervallo a centro K remota (§. 490 *Anal. fin.*).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræſentatur per aſymptotum BF, celeritates reſiduæ per ſemiordinatas NM, Hyperbola vero cum aſymptoto ANG non concurrit (§. 481 *Anal. fin.*); celeritas, quas fertur mobile, integra nonniſi infinito tempore per reſiſtentiam medii extinguitur, ſeu mobile nunquam motu ſuo prorſus privatur.

THEOREMA CLII.

698. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis; celeritas reſidua erit ad extinctam in ea ratione quam habet latus potentiæ Hyperbolæ* KB *ad partem aſymptoti* BM *exponentem tempus quo celeritas extincta fuit.*

Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si enim potentiæ Hyperbolæ latus KB = BA = a, recta tempus exponens BM = x, celeritas reſidua MN = v, adeoque extincta PN = $a-v$; erit $a^2 - av = vx$ (§. *696*). Eſt igitur $a : x = v : a-v$ (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, AB : BM = MN : NP, ſeu celeritas reſidua eſt ad extinctam, ut latus potentiæ Hyperbolæ ad partem aſymptoti tempus exponentem quo celeritas extincta fuit. *Q. e. d.*

THEOREMA CLIII.

699. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis; ſpatium dato tempore eſt ut logarithmus rationis quam habet celeritas initialis ad reſiduam tempore iſto elapſo.*

DEMONSTRATIO.

Si enim ſpatium ſit s, reliqua ſint ut ante; erit $vdx = ds$ (§. 679). Eſt vero in hypotheſi propoſitionis $-\frac{a^2 dv}{v^2} = dx$ (§. 696), adeoque $vdx = -a^2 dv : v$, conſequenter $ds = -a^2 dv : v$. Sed $-adv : v$ eſt differentiale logarithmi fractionis $a : v$ (§. 243 *Analyſ. infin.*). Quamobrem $s = al\,(a : v)$, hoc eſt, ob conſtantem a, ſpatium dato percurſum tempore eſt ut $l(a:v)$, ſeu ut logarithmus celeritatis initialis a ad reſiduam v. *Q. e. d.*

Theorema CLIV.

Tab. XVII. Fig. 171. 700. *Si mobili æquabili motu per medium resistens lato resistitur in ratione duplicata celeritatum; tempore quod per partem asymptoti* BM *Hyperbolæ* ANG *exponitur confectum spatium repræsentatur per spatium hyperbolicum asymptoticum* ABMN *inter celeritatem initialem* AB *& residuam* NM *interceptum.*

Demonstratio.

Si enim tempus BM $= x$ & celeritas restans MN $= v$; erit vdx elementum areæ ABMN (§. 97 *Analyf. infin.*). Sed si spatium tempore BM descriptum $= s$; erit $ds = vdx$ (§. 679). Ergo $s = \int vdx =$ ABMN. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, respondens ABMN, exprimit spatium a mobili tempore isto confectum. *Q. e. d.*

Corollarium.

701. Quoniam spatia motu æquabili dato tempore confecta sunt in ratione composita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret spatium, quod est ut BM. AB (§. 159 *Arithm.*); consequenter spatium istud exponit rectangulum ABMP (§. 376 *Geom.*). Quare cum motu resistentiis in duplicata celeritatum ratione impedito, tempore BM, conficiatur spatium per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit spatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita descriptum, ad spatium quod eodem tempore in medio non resistente describeret mobile; ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN, ad rectangulum ABMP.

Theorema CLV.

702. *Si motus æquabilis impeditur resistentiis quæ sunt in ratione duplicata celeritatum; decrementa celeritatum instantanea sunt in ratione composita ex celeritate residua & incremento momentaneo spatii percursi.*

Demonstratio.

Constat ex demonstratione Theorematis 151. (§. 696), esse $-adv = v^2dx : a$. Est igitur $-dv$ ut v^2dx propter constantem a^2 (§. 181 *Arith.*). Enimvero $v^2dx = v.vdx$, & v designat celeritatem residuam, $vdx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum spatii in medio resistente percursum. Ergo, in hypothesi Theorematis, decrementa momentanea velocitatis $= -dv$ sunt in ratione composita celeritatum residuarum & incrementorum momentaneorum spatii percursi. *Q. e. d.*

Theorema CLVI.

703. *Si recta* AB *celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio per quod æquabiliter movetur in ratione duplicata celeritatum resistitur, & erectis perpendicularibus* AC *&* BF *describantur duæ Logarithmicæ* ANG *&* BOR, *quarum communis est subtangens* AB, *altera vero* BOR *ad asymptotum* AC, *altera* ANG *ad asymptotum* BF *relata; ducta* PO *ipsi* AB *parallela, exponet* MO *tempus*, PN *celeritatem isto tempore amissam, &* NM *celeritatem in fine illius temporis adhuc residuam.* Tab. XVII. Fig. 172.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVII. Fig. 172. Si enim subtangens communis AB $= a$, tempus $= x$, celeritas in fine ejusdem residua $= v$; erit

$$a^2 = vx + av \text{ (§. 696)}$$

$$o = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

Sunt adeo $-\int\frac{dv}{v}$ & $\int\frac{dx}{a+x}$ duo logarithmi æquales (§. 243 *Analys. infin.*). Quare si sit BM $= y$ & NM $= v$; erit $\frac{dy}{a} = -\frac{dv}{v}$; adeoque ANG Logarithmica ad asymptotum BF relata, cujus subtangens $a =$ AB. Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$; (§. 87 *Arithm.*) erit itidem BOR Logarithmica ad asymptotum AC relata, cujus itidem subtangens AB (§. 54 *Anal. infin.*) Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus $= x$, celeritas residua $= v$, *vi denominationis*; recta MO $= x$ tempus, NM $= v$ celeritatem in fine ejus residuam, & PN celeritatem tempore MO amissam exponit. *Q. e. d.*

THEOREMA CLVII.

Tab. XVII. Fig. 171. 704. *Si tempus* BM *resolvitur in tempuscula quæ sunt in progressione geometrica; spatiola istis tempusculis descripta æqualia sunt, & velocitates residuæ sunt in eadem ratione decrescente in qua tempora crescunt quantitate quadam constante aucta.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM asymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; spatium hyperbolicum ABMN exponit spatium a mobili tempore BM in medio resistente descriptum (§. 700). Enimvero ostendimus in superioribus (§. 692), si BM resolvitur in particulas, quæ sunt in progressione geometrica, aream ABMN resolvi in spatiola seu elementa inter se æqualia. Spatiola igitur tempusculis in ratione geometrica progredientibus descripta sunt inter se æqualia. *Quod erat unum.* Tab. XVII. Fig. 171.

Si AB exprimat celeritatem initialem, & duæ fuerint Logisticæ ANG & BOR ad asymptotos BF & AC relatæ; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine istius residuam (§. 703). Sumantur jam in asymptotis abscissæ BM vel AP in progressione arithmetica, erunt NM & PO in progressione geometrica & quidem semiordinatæ NM in decrescente, semiordinatæ vero PO in crescente (§. 552 *Anal. fin.*). Patet igitur, temporibus MO quantitate constante AB (= PM) auctis in ratione geometrica crescentibus, celeritates residuas NM in ratione geometrica decrescere. *Quod erat alterum.* Tab. XVII. Fig. 172.

COROLLARIUM.

705. Quoniam spatia dato tempore descripta sunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum residuarum (§. 699): si celeritates residuæ sumantur ut numeri, spatia sunt ut eorum logarithmi, & tempora etiam sunt ut numeri (§. 704).

COROL-

Corollarium II.

Tab. XVII. Fig. 172. 706. Quare cum AP vel BM fit ut logarithmus MN vel PO; erit BM vel AP ut ſpatium tempore MO celeritate PN, utpote extincta tempore MO (§. 705), deſcriptum (§. 453 *Anal. fin.*)

Scholion.

707. *Eadem methodo ad alias Hypotheſes reſiſtentiæ applicari poterant formulæ generales. Sed cum iſtiuſmodi Hypotheſes magis geometricæ, quam naturales ſint; plura in præſente non addimus: ad reſiſtentias in motu gravium explicandas progreſſuri in duabus Hypotheſibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in Hypotheſi* Galilæana, *utpote experimentis in iis a Centro Telluris diſtantiis conſentiente, in quibus ea capere licet.*

Problema CXVII.

Tab. XVIII. Fig. 173. 708. *Invenire curvam reſiſtentiæ, celeritatem reſiduam, & ſpatium dato tempore deſcriptum, in motu gravium, ſeu æquabiliter accelerato.*

Resolutio.

Exponat recta AC tempus. Fiat AP = PM; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquiſitam (§. 68), & AMF erit linea recta, ac APM triangulum æquicrurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per reſiſtentiam, & MN celeritas in fine illius temporis reſidua; erit ANG curva reſiſtentiæ totalis. Ducatur pm ipſi PM infinite propinqua, & demiſſa perpendiculari NR; erit nR particula celeritatis tempuſculo Pp extincta. Fiat PS ut nR; erit ESI curva reſiſtentiæ inſtantaneæ (§. 682). Denique fiat QP = NM; erit AQH curva celeritatum reſiduarum.

Sit jam $AP = PM = x$, $NM = PQ = v$, $PS = z$, $PN = r$; erit Tab. XVIII. Fig. 173.

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

$$\text{I. } dr = dx - dv$$

Porro ut ſupra (§. 679)

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

Unde $\dfrac{dx - dv}{z} = \dfrac{dx}{a}$

$$\text{II. } adx - adv = zdx$$

quæ eſt æquatio ad curvam reſiſtentiæ inſtantaneæ ESI.

Tandem ſi s ſpatium tempore x confectum denotet, erit ut ſupra (§. 679)

$$\text{III. } vdx = ds.$$

Scholion.

709. *Ex formulis hiſce generalibus, perinde ac ſupra, deducuntur quæ de motu gravium in medio reſiſtente a* Newtono, Hugenio *&* Leibnitio *inventa ſunt; quemadmodum ex ſequentibus intelligitur.*

Theorema CLVIII.

710. *Si gravi deſcendenti reſiſtitur in ratione celeritatum; curva celeritatum reſiduarum* AQH *eſt Logarithmica, cujus aſymptotus* BF *tempus exponit, ſemiordinatæ vero* OQ *ad aſymptotum relatæ ſunt differentiæ inter celeritates reſiduas* PQ *& ſubtangentem* AB. Tab. XVIII. Fig. 174.

Demonstratio.

Si $AP = x$, $PQ = v$, $AB = a$; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708).

Eſt

Tab. XVIII. Fig. 174. Eſt vero $z = v$ *per hypoth.*

Ergo $adx - adv = vdx$

$$adx - vdx = adv$$

$$dx = \frac{adv}{a-v}$$

Quæ eſt æquatio ad curvam AQH.

Fiat $a - v = y$

erit $a - y = v$

$$- dy = dv$$

$$-\frac{ady}{y} = \frac{adv}{a-v} = dx$$

Quæ eſt æquatio ad Logarithmicam, cujus ſubtangens $= a$ (§. 54 *Analyſ. infin.*).

Sit itaque AB $= a$, AP $=$ BO $= x$; erit O$o =$ P$p = dx$. Quoniam PQ $= v$; erit QO $= a - v = y$, adeoque QL $= - dy$. Quodſi ergo, ſumta AB pro ſubtangente, deſcribatur Logarithmica, cujus aſymptotus BF; erit $dx = -\frac{ady}{y}$ æquatio ad eandem. Eſt igitur curva celeritatum reſiduarum in fine ſingulorum temporum AQH Logarithmica, cujus aſymptotus BF, ſemiordinatæ vero ſunt differentiæ inter lineas quæ celeritates in fine ſingulorum temporum reſiduas exponunt, atque rectam quandam conſtantem AB, cui ſubtangens æqualis eſt (§. 54 *Anal. infin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

711. Quodſi fiat PM $=$ AP & MN $=$ PQ; erit PN celeritas per reſiſtentiam amiſſa tempore AP, conſequenter ANG curva reſiſtentiæ totalis (§. 682). Data igitur curva celeritatum reſiduarum in fine ſingulorum temporum, datur curva reſiſtentiæ totalis ANG. Tab. XVIII. Fig. 174.

THEOREMA CLIX.

712. *Si gravi deſcendenti reſiſtitur in ratione celeritatum; ſpatia movendo confecta ſunt ut celeritates extinctæ.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia fuerint ut in Theoremate præcedente, erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Eſt vero $vdx = ds$ (§. *cit.*). Ergo $ds = adx - adv$, conſequenter $s = ax - av$. Eſt igitur propter conſtantem a ſpatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181 *Arithm.*). Quoniam PM $= x$, MN $= v$; PM vero eſt celeritas cadendo tempore AP acquiſita & MN celeritas in fine temporis in medio reſiſtente reſidua, erit PN $= x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igitur ſpatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non reſiſtente a gravi acquiſitam eſt ut tempus AP (§. 68); PN vero denotans celeritatem extinctam ut ſpatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus inſumptis proportionales, a quibus ſpatia movendo in medio reſiſtente confecta ſi ſubtrahantur, relinquunt rectas NM celeritati in medio reſiſtente a gravi acquiſitæ proportionales.

THEOREMA CLX.

714. *Si complementa celeritatum a gravi in medio reſiſtente in ratione celeritatum cadendo acquiſitarum ad celeritatem maximam quam corpus cadendo acquirere valet ſumantur ut numeri; erunt tempora inſumta ut eorum logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Tab. XVIII. Fig. 174. Si BF exponit tempus, curva AQH celeritatum residuarum est Logarithmica; cujus asymptotus BF, subtangens AB (§. 710). Quoniam Logistica AQH cum asymptoto BF non concurrit nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. fin.*); AB est celeritas quam in medio resistente infinito tempore grave cadendo acquirere potest, adeoque absolute maxima. Est itaque QO celeritatis tempore AP in medio resistente acquisitæ complementum ad maximam. Quamobrem si complementa celeritatum acquisitarum ad maximam sunt ut numeri; erunt tempora insumta, quæ per AP sive BO denotantur, ut ipsorum logarithmi (§. 553 *Anal. fin.*) *Q. e. d.*

THEOREMA CLXI.

715. *Si grave in medio cadit quod in ratione celeritatum descensui ejus resistit; celeritatem absolute maximam nunquam acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim curva celeritatum residuarum in medio resistente, seu acquisitarum si medium in ratione celeritatum resistit, AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF. (§. 710). Quoniam celeritates acquisitæ sunt semiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræsentatur per semiordinatam, quæ respondet puncto, in quo curva AQH asymptotum BF secat. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 553 *Anal. fin.*), seu quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem absolute maximam acquirat. Tab. XVIII. Fig. 174. Eam igitur nunquam acquirit. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXII.

716. *Si grave descendit per medium in ratione velocitatum resistens; celeritatum, temporibus in progressione arithmetica auctis, cadendo acquisitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere potest differentiæ in progressione geometrica decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Constat enim ex antecedentibus, si AQH sit Logarithmica, cujus asymptotus BF & AK eidem parallela; esse QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquisitam (§. 710), & BA celeritatem maximam quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abscissæ BO, BR ut tempora, semiordinatæ ipsis respondentes OQ & RV ut celeritatum QP & VT istis temporibus acquisitarum differentiæ a maxima, seu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero si in Logarithmica abscissæ crescunt in progressione arithmetica semiordinatæ in geometrica decrescunt (§. 552 *Anal. fin.*). Ergo si grave per medium in ratione velocitatum resistens cadit, & tempora in progressione arithmetica crescunt; celeritatum temporibus istis acquisitarum differentiæ a maxima in geometrica decrescunt. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA CLXIII.

Tab. XVIII. Fig. 174. 717. *Si gravi per medium descendenti resistatur in ratione celeritatum, & axis* AK *tempora descensus repræsentet*, ANG *sit curva resistentiæ totalis*, AQH *vero curva celeritatum acquisitarum*, *& circa axem* AD *ad* AK *normalem describatur Parabola* AIC, *cujus parameter est ut dupla celeritas maxima quam corpus cadendo acquirere valet; spatium in medio resistente confectum est ad spatium eodem tempore in vacuo conficiendum, in ratione* PN *ad* PI, *seu ut semiordinata curvæ resistentiæ totalis ad semiordinatam Parabolæ externæ ad eundem axem relata.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim spatium, in medio resistente in ratione celeritatum, movendo confectum est tempore AP $= x$ ut $ax - av$ (§. 712); spatium vero eodem tempore in vacuo conficiendum ut $\frac{1}{2} x^2$ (§. 80); erit istud ad hoc ut $ax - av$ ad $\frac{1}{2} x^2$, consequenter ut $x - v$ ad $x^2 : 2a$ (§. 181 *Arithm.*). Jam cum ANG sit curva resistentiæ totalis *per hypoth.* erit PN $= x - v$ (§. 712), & quia AQH est curva celeritatum temporibus x acquisitarum *per hypoth.* celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere potest, est ut recta AB $= a$ (§. 715). Enimvero si circa axem AD parametro $2a$, quæ est ut dupla celeritas maxima a gravi acquisitu possibilis, describatur Parabola AIC, cum sit QI $=$ AP $= x$; erit AQ $=$ PI $= x^2 : 2a$ (§. 398 *Anal. fin.*). Est igitur spatium movendo in medio resistente confectum, ad spatium eodem tempore in medio non resistente conficiendum, ut PN ad PI. *Q. e. d.* Tab. XVIII. Fig. 174.

THEOREMA CLXIV.

718. *Spatium a gravi per medium in ratione velocitatum resistens descendente confectum tempore infinito infinitum est; celeritas vero tempore isto acquisita finita est.*

DEMONSTRATIO.

Iisdem enim positis, quæ in antecedentibus, spatium movendo confectum tempore AP est ut semiordinata PN. Quare cum crescente AP crescat etiam PN; ubi AP fit infinita, etiam applicata ad AP infinita evadere debet, consequenter tempore infinito percursum spatium infinitum est. *Quod erat unum.*

Jam celeritas absolute maxima, quam corpus in medio resistente cadendo acquirere potest, exponitur per subtangentem Logisticæ AQH ipsi AB æqualem, adeoque per lineam finitam; consequenter & ipsa finita est. Celeritas igitur tempore infinito acquisita finita est. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CLXV.

719. *Si intra asymptotos* CB *&* BA *rectangulas describatur Hyperbola æquilatera, & recta* AB *vel rectangulum* ABNE *exponat celeritatem maximam quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens acquirere valet; area* AILE *exponet tempus, rectangulum* Tab. XVIII. Fig. 175.

Tab. XVIII. Fig. 175. AIKE *celeritatem cadendo acquisitam, &* EKL *spatium tempore isto confectum.*

DEMONSTRATIO.

Sit AB $= a$, seu ut celeritas maxima quam corpus acquirere valet, AI$= v$, seu ut celeritas tempore x acquisita, & AE $= b$; erit, ob constantem b, $ab : bv = a : v$ (§. 178 *Arithm.*), adeoque etiam rectangulum ABNE exponet celeritatem maximam, quam corpus cadendo in medio resistente acquirere valet, & AIKE exponet celeritatem dato tempore x acquisitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium resistit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{adv}{a-v}$ (§. 710), adeoque $bdx = \frac{abdv}{a - v}$. Quoniam AB$= a$, AI $= v$; erit BI $= a - v$. Est vero in Hyperbola BA. AE$=$BI.IL (§. 486 *Analys. fin.*), adeoque $(a-v)$. IL $= ab$, consequenter IL $= ab : (a-v)$. Est igitur $abdv : (a-v)$ elementum areæ AILE. Quamobrem bx æquatur areæ AILE, & hinc x seu AP $=$ AILE : AE. Ob constantem itaque AE, tempus x est ut spatium hyperbolicum asymptoticum AILE (§. 178 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Jam si tempus x exponatur per rectam AP, & celeritas eodem acquisita v per rectam AI; spatium cadendo confectum est ut $x - v$ (§. 712). Quare si tempus exponitur per spatium hyperbolicum AILE, & celeritas isto tempore acquisita per rectangulum AIKE; spatium descensus exponitur per eorum differentiam, adeoque per trilineum hyperbolicum EKL. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

720. Quoniam celeritas per resistentiam medii in ratione celeritatis extincta est ut spatium dato tempore cadendo confectum (§. 712), spatium vero hoc est ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore AILE extincta ut trilineum KLE. Tab. XVIII. Fig. 175.

COROLLARIUM II.

721. Et quia rectangulum AIKE celeritatem cadendo tempore AILE acquisitam exponit (§. 719); celeritas acquisita est ad celeritatem extinctam ut rectangulum AIKE ad trilineum hyperbolicum EKL.

THEOREMA CLXVI.

722. *Si recta dimidia* AB *sit subtangens, &* AC *asymptotus Logarithmicæ* BOI, *ductaque* BF *ipsi* AC *parallela, fiat ut semiordinata Logarithmicæ* OP *aucta dupla subtangente* AB *ad* OK *semiordinatam, ita abscissa* AP *ad quartam proportionalem* PQ; *erit punctum* Q *in curva celeritatum residuarum* AQH, *seu abscissa* AP *tempus, semiordinata* PQ *celeritatem hoc tempore cadendo a gravi acquisitam exponet, siquidem eidem resistitur in ratione celeritatum duplicata.* Tab. XVIII. Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Sit AB$= a$, AP$= x$, PQ$= v$; erit $adx - adv = zdx$ (§. 708). Est vero $z = v^2 : a$, *per hypoth.* observata scilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2dx - a^2dv = v^2 dx$$

$$a^2dx - v^2dx = a^2 dv$$

$$dx = \frac{a^2\, dv}{a^2 - v^2}$$

Fiat

Tab. XVIII. Fig. 176.

Fiat $v = \frac{ay - a^2}{y + a}$

erit $dv = \frac{aydy + a^2dy - aydy + a^2dy}{(y+a)^2} = \frac{2a^2\,dy}{(y+a)^2}$

& $v^2 = \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

adeoque $a^2 - v^2 = a^2 - \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{yy + 2ay + a^2}$

$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{(y+a)^2} = \frac{4a^3y}{(y+a)^2}$

Ergo $\frac{a^2\,dv}{a^2 - v^2} = \frac{2a^4dy\,(y+a)^2}{4a^3y\,(y+a)^2} = \frac{\frac{1}{2}ady}{y}$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2}ady : y$, quæ eſt æquatio ad Logarithmicam, cujus ſubtangens $\frac{1}{2}a$.

Sit itaque AB $= a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Deſcribatur Logarithmica BOI, cujus aſymptotus AC, ſubtangens $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}a$. Si jam ſumatur AP $= x$, erit PO $= y$, adeoque OK $= y - a$, conſequenter $dx = \frac{1}{2}ady : y$ (§. 54 *Anal. infin.*). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, adeoque $y + a : y - a := a : v$. Eſt itaque PO + AB : OK = AB : PQ. Quare cum PQ $= v$ ſit celeritas tempore x reſidua; recta AP tempus, PQ celeritatem reſiduam ſeu hoc tempore acquiſitam exponit; conſequenter AQH eſt curva celeritatum reſiduarum (§. 682). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

723. Quodſi fiat PM = AP, & MN = QP; erit punctum N in curva reſiſtentiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM eſt ut celeritas cadendo in vacuo ſeu medio non reſiſtente acquiſita (§. 68). Quare cum QP ſit ut celeritas in medio reſiſtente tempore AP acquiſita (§. 722); ſi MN ipſi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas reſiſtentia medii extincta tempore AP. Eſt igitur ANG curva reſiſtentiæ totalis (§. 682).

Tab. XVIII. Fig. 176.

THEOREMA CLXVII.

724. *Iiſdem poſitis quæ in Propoſitione præcedente, dupla ſubtangens* AB *Logarithmicæ* BOI, *cujus ope curva celeritatum reſiduarum* AQH *conſtruitur, celeritatem maximam exponit quam grave, in medio in ratione duplicata celeritatum reſiſtente cadendo, acquirere poteſt; eam vero grave non acquirit niſi tempore infinito elapſo, & recta* BF *eſt curvæ celeritatum reſiduarum* AQH *aſymptotus.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ſemiordinatam QP quæ celeritatem in medio reſiſtente tempore AP acquiſitam exponit, fieri ipſi AB ſeu ſubtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Eſt vero PO + AB : OK = AB : PQ (§. 722), hoc eſt, OK + 2AB : OK = AB : PQ. Quare ſi PQ ipſi AB æqualis fieri debet, neceſſe eſt ut OK æqualis evadat ipſi OK + 2AB. Enimvero hoc fieri nequit, niſi quando 2AB reſpectu ipſius OK infinite parva evadit (§. 4 *Analyſ. infin.*), conſequenter quando OK, adeoque etiam BF infinita evadit. Ergo PQ ipſi AB æqualis fieri nequit, niſi quando AC infinita evadit. Curva igitur celeritatum reſiduarum cum recta BF nonniſi infinito intervallo concurrit, atque

Tab. XVIII. *Fig.* 176. adeo BF est ipsius asymptotus, & AB exponit celeritatem maximam quam corpus in medio resistente acquirere potest; cumque recta tempus repræsentans AP infinita evadat, quando fit PQ = AB, celeritas maxima nonnisi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

725. Quoniam OK + 2AB:OK = AB:PQ (§. 722); erit AB − PQ: PQ = 2AB : OK (§. 193 *Arithm.*), hoc est, KQ : QP = 2AB : OK, seu differentia celeritatis dato tempore acquisitæ a maxima quæ in medio resistente acquiri potest, est ad celeritatem dato tempore acquisitam; ut dupla maxima quæ acquiri potest, ad semiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad asymptotum BF curvæ celeritatum in medio resistente acquisitarum AQH.

COROLLARIUM II.

726. Quoniam celeritas maxima a gravi cadente, in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit, non acquiritur nisi infinito tempore elapso (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere potest.

SCHOLION.

727. HUGENIUS *celeritatem maximam, quam grave in medio resistente acquirere potest,* celeritatem terminalem *appellat* (a).

THEOREMA CLXVIII.

728. *Si grave descenderet in vacuo seu medio non resistente, tempore finito eam celeritatem acquireret quam in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente nonnisi tempore infinito acquirere potest.*

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile descendat in medio quod in ratione celeritatum simplici resistit, sive in medio cadat quod in illorum duplicata ratione descensum impedit; celeritas maxima quam cadendo acquirere potest grave est ut linea quædam data (§. 715, 724), adeoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquisitæ sint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio resistente tempore finito acquiritur in non resistente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque resistente non acquiritur nisi tempore infinito (§. 715, 726): Ergo, in medio non resistente, finito tempore acquiritur, quæ, in resistente utroque, infinito acquiritur. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXIX.

729. *Spatium in vacuo celeritate terminali* AB *tempore* AP *a gravi percursum, est ad spatium eodem tempore percursum in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente; ut rectangulum* ABKP *ad aream* AQP. Tab. XVIII. Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur *per hypoth.* erit idem in ratione composita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§. 34), adeoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio resistente spatium tempore AP per-

(a) In *Discursu de causa gravitatis* p. 170.

Tab. XVIII. Fig. 176. percursum est ut area curvæ celeritatum residuarum AQP (§. 708). Est igitur spatium a gravi in medio resistente percursum, sive motus impediatur in ratione celeritatum, sive in ratione earundem duplicata, ad spatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum, ut area curvæ celeritatum residuarum AQP ad rectangulum ABKP. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXX.

730. *Si celeritate terminali tanquam radio describatur quadrans circuli, & celeritas in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit a gravi cadendo acquisita exponatur per cosinum arcus; spatium in medio isto descriptum erit ut differentia logarithmorum sinus versi & excessus diametri supra eundem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $= x$, celeritas in medio resistente acquisita $= v$; erit spatium in eodem percursum $\int v dx$ (§. 708). Reperimus vero supra (§ 722) $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sed $\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} - \frac{\frac{1}{2} a dv - \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2} dv}{a - v} - \frac{\frac{1}{2} dv}{a + v}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ *per demonstrata* $= \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a - v} - \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a + v}$. Jam $\int dv : (a - v) = - l(a - v)$, & $\int dv : (a + v) = l(a + v)$ quia, quantitate constante a sumta pro unitate, $a - v$ exprimit numerum unitate minorem, adeoque logarithmum habet negativum (§. 351 *Arithm.*). Ergo $\int v dx = -\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$. Sunt ergo spatia in medio resistente tempore x percursa ut $-\frac{1}{2} a^2 l(a - v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$; consequenter, ob constantem $\frac{1}{2} a^2$, ut $- l(a - v) - l(a+v)$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, ut differentiæ logarithmorum quantitatum $a-v$ & $a+v$. Quodsi jam celeritate terminali AB describatur quadrans BD, ducaturque recta QE ipsi PD parallela; erit AL, sinus arcus ED, seu cosinus arcus BE, $= v$, adeoque BL, sinus versus arcus ejusdem BE, $= a - v$, consequenter logarithmus negativus $a - v$, logarithmus sinus versi BL. Jam diameter circuli $= 2a$. Quare si inde subducas $a - v$, relinquetur $a + v$. Est igitur $a + v$ excessus diametri BS supra sinum versum BL, adeoque logarithmus positivus $a + v$, logarithmus excessus diametri BS supra sinum versum BL. Jam cum $- l(a-v) - l(a+v)$ sit differentia logarithmi negativi ipsius BL & positivi LS; spatium a mobili in medio in ratione celeritatum duplicata resistente descriptum, est ut differentia logarithmorum sinus versi BL & excessus diametri BS supra sinum versum BL, si celeritate terminali describitur quadrans circuli BED, & AL cosinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP quæ celeritatem tempore AP acquisitam exponit quo spatium istud confectum est. *Q. e. d.*

Co-

COROLLARIUM.

Tab. XVIII. Fig. 176. 731. Quoniam excessus diametri supra sinum versum est hujus complementum ad diametrum, & differentia logarithmorum sinus versi & excessus ejus supra diametrum, est logarithmus sinus versi per complementum ejus ad diametrum divisi (§. 343 *Arithm.*); consequenter logarithmus rationis sinus versi ad complementum ejus ad diametrum (§. 129 *Arithm.*); si, celeritate terminali sumpta pro sinu toto, cosinus arcuum sint ut celeritates cadendo acquisitæ, erunt logarithmi rationis sinuum versorum ad eorum complementa ad diametrum, ut spatia temporibus istis descripta quibus celeritates fuêre acquisitæ.

THEOREMA CLXXI.

732. *Si gravis descensus impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritate terminali* AB *describitur quadrans circuli* BED, *sitque* ER = AL *sinus arcus* ED *ut celeritas in medio resistente cadendo acquisita, erit spatium percursum ut logarithmus sinus complementi* EL.

DEMONSTRATIO.

Patet, ex demonstratione præcedentis Theorematis, si spatium sit s, AL $= ER = v$, $AB = a$, esse $ds = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sit $EL = y$: erit (§. 377 *Anal. fin.*)

$$y^2 = a^2 - v^2$$
$$2ydy = -2vdv$$
$$ydy = -vdv$$
$$a^2 ydy = -a^2 vdv$$
$$\frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2} = -\frac{a^2 ydy}{y^2}$$

hoc est, $ds = -\frac{a^2 dy}{y}$ Tab. XVIII. Fig. 176.

$$s = -a^2 \int \frac{dy}{y} = -a^2 ly$$

Sunt igitur spatia ut $-a^2 ly$, seu propter constantem a, (§. 181 *Arithm.*) ut $-ly$. Est vero $-ly$ logarithmus sinus EL, utpote negativus; quia sinus EL continuo decrescunt, crescentibus sinibus ER. Quare si velocitates residuæ sumuntur ut sinus arcuum ED, erunt spatia descripta eodem tempore quo celeritates istæ cadendo acquisitæ, ut logarithmi cosinuum EL, seu sinuum complementorum arcuum ED. *Q. e. d.*

SCHOLION.

733. *Quodsi dubites summam differentialis* $-a^2dy : y$ *esse* $-a^2ly$, *propterea quod quantitas constans eidem in integratione adjici possit* (§. 95 Anal. infin.): *adjice quantitatem constantem* c *ut sit* $s = c - a^2 ly$. *Quoniam, in casu* $s = 0$ *evadit* $y = la$, *erit* $c - a^2 la = 0$. *Sumatur* a *pro unitate, erit* $c - la = 0$, *adeoque* $c = la$. *Sed Logarithmus unitatis* = 0 (§. 334 Arithm.) *Ergo etiam* c = 0. *Patet igitur, si* AB *sumatur pro unitate, non opus esse ut quantitas quædam constans in summatione elementi cosinus* EL *adjiciatur.*

THEOREMA CLXXII.

734. *Si gravi descendenti resistitur in ratione duplicata celeritatum, & cosinus arcus* EB *exponit celeritatem cadendo acquisitam, radius vero* AB *celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem istam cadendo acquisivit grave, est ut logarithmus rationis* SL *ad*

Tab. XVIII. Fig. 176. *ad* LB; *seu complementi sinus versi ad diametrum ad sinum versum.*

DEMONSTRATIO.

Si sit AB $= a$, AL $=$ ER $= v$, tempus descensus $= x$; erit $dx = \frac{a^2\, dv}{a^2 - v^2}$ prouti apparet ex demonstratione Theorematis 166 (§. 722). Jam vero $\frac{a^2\, dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v}$ utpote (facta reductione ad denominationem eandem) $=$ $(\frac{1}{2}a^2 dv + \frac{1}{2}avdv + \frac{1}{2}a^2 dv - \frac{1}{2}avdv) : (a-v)(a+v)$

Ergo $\frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx$.

Quoniam $\int \frac{dv}{a-v} = - l(a - v)$ & $\int \frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v) - \frac{1}{2}al(a - v)$. Sunt igitur, propter constantem $\frac{1}{2}a$, tempora quibus celeritates v acquiruntur ut $l(a+v) - l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v) = l\,\frac{a+v}{a-v}$ (§. 343 *Arithm.*), hoc est, cum sit $a+v =$ LS & $a - v =$ BL, $l(a+v) - l(a-v) = l$(LS : LB), qui est logarithmus rationis LS ad LB (§. 129 *Arithm.*). Ergo si radius circuli AB exponit celeritatem terminalem, & AL cosinus arcus BE celeritatem in medio resistente data lege acquisitam; erit tempus quo celeritas hæc a gravi cadendo acquiritur ut logarithmus rationis complementi sinus versi ad diametrum LS ad sinum versum LB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

735. Patet, ex demonstratione Theorematis præsentis, esse tempus x ut $l\,\frac{a+v}{a-v}$ si a exponat celeritatem terminalem & v celeritatem tempore x acquisitam. Est vero $a+v$ celeritas acquisita terminali aucta & $a-v$ differentia ejus a terminali, seu complementum ad terminalem; consequenter $(a+v) : (a-v)$ exprimit rationem celeritatis acquisitæ terminali auctæ, ad ipsius complementum ad terminalem. Tempus igitur est ut logarithmus rationis celeritatis acquisitæ terminali auctæ, ad ipsius complementum ad terminalem. Tab. XVIII. Fig. 176.

COROLLARIUM II.

736. Quoniam QP $= v$, KQ $= a - v$; si fiat PT $=$ AS $=$ AB; erit QT $= a+v$; consequenter logarithmus rationis TQ ad QK ut tempus.

THEOREMA CLXXIII.

737. *Si rationes inter summam celeritatis terminalis & acquisitæ atque differentiam acquisitæ a terminali sumantur ut numeri; & descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum; erunt tempora, quibus celeritates fuerunt acquisitæ, ut logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis fuerit $= a$, acquisita $= v$; erit summa terminalis & acquisitæ $a+v$ & differentia acquisitæ a terminali $a - v$, consequenter ratio summæ istius ad hanc differentiam $= \frac{a+v}{a-v}$ (§. 129 *Arithm.*).

Sunt vero tempora, quibus celeritates iſtæ acquiruntur, ut $l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 734). Quare ſi ratio ſummæ terminalis celeritatis ac acquiſitæ ad differentiam acquiſitæ a terminali ſumitur ut numerus; erit tempus quo celeritas acquiſita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXIV.

Tab. XVIII. Fig. 176. 738. *Si deſcenſui gravis reſiſtitur in ratione duplicata celeritatum, & ſpatia percurſa ſint ut logarithmi ſinuum* LE *arcus* BE *quadrantis* BD *celeritate terminali tanquam radio deſcripti; tempora inſumta ſunt ut logarithmi rationis inter ſinum verſum* BL *& complementum ejus ad diametrum* LS.

DEMONSTRATIO.

Si enim deſcenſus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis, &, celeritate terminali AB deſcripto quadrante BED, coſinus arcus BE, ſeu arcus ED ſinus LA eſt ut celeritas acquiſita, ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi ſinuum EL (§. 732); tempora vero inſumta ut logarithmi rationum inter ſinum verſum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§. 734). Quamobrem quando ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi ſinuum; tempora inſumta ſunt ut logarithmi rationum inter ſinum verſum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXV.

739. *Incrementum celeritatis gravium in medio non reſiſtente eſt ad incrementum acquiſita in medio quod in ratione duplicata celeritatis reſiſtit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus ſupra quadratum celeritatis acquiſita exceſſum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritas gravium in medio non reſiſtente creſcit in ratione temporis (§. 68); ſi tempus dicatur x, erit incrementum celeritatis momentaneum, in tempuſculo ſcilicet dx, uti dx. Jam ſi celeritas terminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio quod in ratione duplicata celeritatis reſiſtit acquiſita $= v$; erit $a^2\,dx - v^2\,dx = a^2 dv$, prouti patet ex demonſtratione Theorematis 166 (§. 722). Eſt igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv ſit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege reſiſtente acquiſitæ; erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio reſiſtente, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus exceſſum ſupra quadratum acquiſitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $(a^2 - v^2) = (a+v)(a-v)$; erit dx ad dv in ratione compoſita a ad $a+v$ & a ad $a-v$, hoc eſt, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum eſt in caſu dato ad incrementum in medio reſiſtente, in ratione compoſita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquiſita auctam, & ejuſdem celeritatis terminalis ad ipſius ſupra acquiſitam exceſſum.

THEOREMA CLXXVI.

Tab. XVIII. Fig. 177. 741. *Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritas terminalis exponitur per rectam* AB = CF, *quæ tanquam radio describitur quadrans, eadem vero pro latere potentiæ Hyperbolæ sumta intra asymptotos* AC & CD *describatur Hyperbola* BME, *fiatque* HF *celeritati in medio resistente acquisitæ æqualis; area hyperbolica* APMB *exprimit spatium eo tempore a gravi percursum quo celeritatem ut* HF *acquisivit.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim AB = AC = CF = a, HF = v; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§. 417 *Geom.*), GH = PC = $\sqrt{(a^2 - v^2)}$; consequenter ob PC. PM = AB^2 (§. 488 *Anal. fin.*) PM = $a^2 : \sqrt{(a^2 - v^2)}$. Jam differentiale rectæ AP = $a - \sqrt{(a^2 - v^2)}$ $= \frac{vdv}{\sqrt{(a^2 - v^2)}}$. Quamobrem elementum areæ APMB $= \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$; consequenter area APMB $= \int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Est vero spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas v acquisita $= \int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Ergo spatium hyperbolicum APMB exprimit spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas ut HF acquisita. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquisita FH in terminalem FC degenerat; semiordinata PM cum asymptoto CD coincidit, adeoque area hyperbolica ABMP degenerat in infinitam EBACD; consequenter spatium repræsentat infinitum a gravi percursum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit nisi tempore infinito elapso (§. 726); spatium infinitum a gravi nonnisi tempore infinito percurritur. Tab. XVIII. Fig. 177.

THEOREMA CLXXVII.

743. *Si intra asymptotos rectangulas* DC & AC *describatur Hyperbola æquilatera* EMB, *cujus latus potentiæ est ut celeritas terminalis*, AP *vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquisitam; spatium hyperbolicum* ABMP *exponet spatium eodem tempore a gravi in medio descriptum quod in ratione duplicata descensui resistit quo celeritas acquisita fuit.*

DEMONSTRATIO.

Sit AC = a, erit etiam latus potentiæ Hyperbolæ = a. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acquisita = v; erit PA $= \frac{v^2}{a}$, consequenter CP $= a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2 - v^2}{a}$. Unde ob CP. PM = a^2 (§. 488 *Anal. fin.*), reperitur PM $= \frac{a^3}{a^2 - v^2}$. Jam differentiale abscissæ PA $= \frac{2vdv}{a}$, consequenter elementum spatii hyperbolici ABMP $= \frac{2a^2 vdv}{a^2 - v^2}$, adeo-

Tab. XVIII. Fig. 177. que ABMP $= 2\int\frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$. Est igitur area hyperbolica ABMP ut $\int\frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$ propter constantem 2 (§.181 *Arithm.*). Ex antecedentibus constat spatium a gravi, in medio data lege resistente, interea temporis descriptum dum celeritatem v acquirit, esse ut $\int\frac{a^2vdv}{a^2-v^2}$ (§. 730). Idem igitur spatium est ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMP. Tab. XVIII. Fig. 177.

SCHOLION.

744. *Patet adeo, unum idemque spatium descensus multis modis per figuras repræsentari posse.*

CAPUT XV.

De Machinis Simplicibus.

DEFINITIO LXXI.

745. Machina vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLION.

746. *Quoniam effectus Machinarum ex structura ipsarum secundum immutabiles motuum leges consequuntur: omnes operationes rerum corporearum Mechanicæ dicuntur, quia agunt structuræ suæ convenienter & juxta æternas motuum leges. Hinc manifestum est, illum demum Mechanice Philosophari, qui evidenter ostendit, quomodo vi legum motus effectus rerum ex structura ipsarum consequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum esse, qui Mechanice Philosophantur. Apparet etiam, Philosophiam Mechanicam liberam esse ab ea labe, quam imperiti eidem adspergere conantur. Immo nec obscurum est, sine Matheseos præsidio de rebus naturalibus temere Philosophari.*

DEFINITIO LXXII.

747. Per *Potentiam* intelligo Vim, quæ Machinæ applicata ad motum tendit, sive actu eundem producat, sive non. In priore casu dicitur *Potentia movens*; in posteriore *Potentia sustentans.*

DEFINITIO LXXIII.

748. *Pondus* appello, quod ope Machinæ vel sustentatur, vel movetur, vel motui producendo utcunque resistit.

DEFINITIO LXXIV.

749. *Vectis* est linea recta inflexilis & gravitatis expers AB, unico sui puncto C fulcro firmo D innixa, circa quod moveri potest. Tab. V. Fig. 58.

Co-

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo instrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in usu applicatur, ad Vectem revocantur; consequenter quæ de Vecte demonstrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION I.

751. *Ex natura Vectis adeo ratio redditur non modo structuræ & effectuum omnium instrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non passim in vita communi obviorum; sed & motuum animalium: quod posterius primus docuit* Joannes Alphonsus Borellus *in peculiari* De motu animalium *Opere.*

SCHOLION II.

752. *In genere autem notandum est, ubi Machinarum leges investigamus, non considerari materiam ex qua constant, nec materiæ affectiones, neque varias figuras quæ ob certos usus inducuntur; sed tantum eorum rationem haberi, quæ Machinæ essentiam absolvunt, ut nempe constet quæ Machinæ qua tali conveniant. Quodsi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obstaculum impedire, quominus Lex ista accurate observari queat; ea ex suis principiis seorsim sunt determinanda.*

DEFINITIO LXXV.

753. *Hypomochlium* est fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO LXXVI.

Tab.V. Fig.59. 754. *Vectis Homodromus* est, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentiæ B & hypomochlium C; vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C.

DEFINITIO LXXVII.

755. *Vectis heterodromus*, est in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiæ B. Tab.V. Fig.58.

DEFINITIO LXXVIII.

756. *Axis in Peritrochio* est circulus AB basi cylindri concentricus, & una cum ipso circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille *Axis*, circulus *Peritrochium*; radii circuli (qui subinde soli comparent) *Scytalæ* appellantur. Tab.V. Fig.60.

SCHOLION.

757. *Proprie per Axem intelligitur virga ferrea, cui circumpositus est cylindrus ligneus scytalis instructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi (§. 746), cur definitiones ad Geometriam puram revocari consultum sit.*

COROLLARIUM.

758. Axi adeo in Peritrochio locus est, quotiescunque in motu Machinæ concipere licet circulum circa axem fixum descriptum, & cylindri huic circumpositi plano concentricum.

DEFINITIO LXXIX.

759. *Trochlea* est circulus AB circa centrum C volubilis. Tab.V. Fig.61.

DEFINITIO LXXX.

760. *Cochlea* est cylindrus rectus AB spirali similiter sulcatus. Describitur autem illa spiralis, si recta FG motu æquabili in superficie cylindri circumferatur, & interea punctum I ex F versus G motu itidem æquabili descendit. *Cochlea mas* est, si superficies convexa; *Cochlea fœmina* vero, si concava fuerit sulcata. Tab.V. Fig. 62.63.

SCHOLION.

Tab.V. Fig.63. 761. *Mas & fœmina, si motus gigni debet, semper conjunguntur. Loquor nimirum de Cochleæ simplicis usu. Si enim cum Axe in Peritrochio conjungitur, fœmina opus non est, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc in casu Machina composita prodit.*

DEFINITIO LXXXI.

Tab.V. Fig.64. 762. *Cuneus* est prisma triangulare, cujus bases sunt triangula æquicrura acutangula.

AXIOMA X.

763. *Potentia æqualis est ponderi quod, salvo effectu, in ejus locum substitui potest.*

SCHOLION.

764. *Patet ex ipsa æqualitatis definitione* (§. 15 Arithm.).

THEOREMA CLXXVIII.

765. *Si potentia* B, *Vecti sive homodromo, sive heterodromo applicata, sustentat pondus in* A *applicatum; rationem reciprocam distantiarum ab hypomochlio ad pondus habet.*

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Fig.58. Sit primum Vectis AB heterodromus. Quoniam supponitur horizonti parallelus; linea directionis utriusque ponderis erit ad ipsum perpendicularis, Centrumque gravitatis unius in A, alterius in B (§. 215.) Quodsi ergo pro potentia in B applicata substituatur pondus æquale; habebimus duo pondera, quorum Centra gravitatis recta AB connectuntur, eaque in æquilibrio, cum potentia pondus sustentet, *per hypoth.* Est igitur C centrum gravitatis commune (§. 122); consequenter pondus in B, hoc est potentia, ad pondus in A reciproce se habet, ut AC ad CB (§. 144). *Quod erat unum.* Tab.V. Fig.58.

Si Vectis fuerit homodromus CB, ponderis G non aliam partem sustentat potentia in B applicata, quam quæ ferenda est a fulcro ibi supposito. Est igitur ad pondus A, ut distantia ponderis ab hypomochlio AC, ad distantiam potentiæ CB (§. 231). *Quod erat secundum.* Tab.V. Fig.59.

Si Vectis fuerit inclinatus, hoc est, si linea directionis ponderis & potentiæ cum Vecte AB angulum efficiat obliquum, erunt CD & CE ad lineas directionis AF & EG perpendiculares distantiæ a centro motus C (*§. 229*); consequenter eodem, quo ante, modo demonstratur, potentiam sustentantem quæ in B applicatur esse ad pondus in A suspensum, ut DC ad CE (§. 272). *Quod erat tertium.* Tab.V. Fig.65.

COROLLARIUM.

766. Quodsi potentia, quæ pondus sustentat, augeatur; præpollebit, adeoque dato Vecte pondus movebit.

SCHOLION.

767. *Facile itaque ad Vectem ea omnia transferuntur, quæ superius de æquiponderantibus* (*§.* 144 & seqq. itemque *§.* 231 & seqq. §. 272 & seqq.) *demonstrata sunt.*

PROBLEMA CXVIII.

768. *Data gravitate Vectis heterodromi* AB, *distantia Centri gravitatis ab hypo-*

Tab.V. Fig.58. *hypomochlio* CV, *distantiis ponderis atque potentiæ* AC & CB, *una cum pondere* O; *invenire potentiam, qua ipsum sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiamus Vectem gravitatis expertem & ejus loco in V appensum pondus eidem æquale G. Quodsi fiat ut AC ad CV, ita gravitas Vectis ad quartum: reperietur pondus, quod Vectis sustentare valet (§. 765).

2. Subtrahatur id a pondere dato; residuum erit pondus a potentia sustentandum.

3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pondus residuum ad quartum: & reperietur potentia in B applicanda, ut dato Vecte datum pondus sustentet (§. 765).

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 — 2 — 10	5 — 1 — 280
10	1
20	280
300	3
20	280 (56. Potentia.
280	55

PROBLEMA CXIX.

769. *Datis gravitate Vectis heterodromi* AB, *distantia Centri gravitatis ab hypomochlio* CV, *distantiis potentiæ atque ponderis* BC & CA; *invenire pondus sustentandum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur, ut in Problemate præcedente, pars ponderis a Vecte solo sustentanda.

2. Quæratur eadem ratione pars altera ponderis, quam potentia in B applicata sustentare valet. Tab.V. Fig.58.

3. Jungantur partes sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit pondus quæsitum.

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10, potentia 56 librarum: invenietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

pondus integrum = 300

PROBLEMA CXX.

770. *Datis gravitate Vectis heterodromi* AB, *pondere sustentando* G, *potentia in* B *applicanda, longitudine ac Centro gravitatis Vectis* V; *invenire Centrum gravitatis commune seu centrum motus* C.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers, & ejus loco in Centro gravitatis V appensum pondus G. Quæratur Centrum gravitatis commune Z potentiæ in B applicatæ & ponderis G (§. 149.).

2. Subtrahatur ZB ex AB, relinquetur AZ.

3. Concipiatur denique in Z appensum pondus gravitati Vectis & potentiæ junctim sumptis æquale, & inveniatur hujus ponderis & ponderis dati O Centrum gravitatis commune C (§. 149); quod quærebatur.

Ex. gr. Sit potentia in B 56, gravitas vectis 10, pondus O 300 librarum, AB = 6, VB = 3. Fiat

Tab.V. Fig.58.

$66 — 10 — 3$

$\frac{3}{30}$

$ZB = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

$AB = \frac{66}{11}$

$AZ = \frac{61}{11}$

$366 — 66 — \frac{61}{11} \quad (1 = AC$

Problema CXXI.

Tab.V. Fig.59. 771. *Datis gravitate & Centro gravitatis* F *Vectis homodromi* CB, *pondere* G, *distantia ejus ab hypomochlio* CA, *una cum distantia potentiæ* CB; *invenire potentiam qua pondus sustentare valet.*

Resolutio.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers & ejus loco in F appensum pondus ei æquale, quæraturque potentia vectem solum sustentatura (§. 765).
2. Quæratur porro potentia requisita ad pondus datum G sustentandum (§. *cit.*).
3. Addantur potentiæ sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit potentia quæsita.

Sit ex. gr. CA = 1, CF = 3, CB = 6, pondus datum 300, gravitas Vectis 10 librarum. Reperietur potentia Vectem sustentatura 5, pondus vero solum sustentatura 50, adeoque potentia integra 55 librarum.

Theorema CLXXIX.

772. *Si potentia Vecte sive heterodromo sive homodromo, pondus attollit; spatium illius est ad spatium hujus, ut hoc ad potentiam qua idem pondus tantum sustentare valet.*

Demonstratio.

Dum pondus attollitur per arcum Aa, potentia movetur per arcum Bb. Sunt vero arcus Aa & Bb similes, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*); in homodromo, quia concentrici, consequenter Aa : Bb = AC : CB (§. 138 412 *Geom.*). Sed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod sustentare valet (§. 765). Ergo spatium potentiæ ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quæ idem sustentare valet (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab.V. Fig.58.59.

Corollarium.

773. Lucrum itaque virium cum temporis dispendio conjungitur & contra.

Problema CXXII.

774. *Stateram construere; hoc est, Instrumentum quo, unico pondere mediante, diversorum corporum gravitates explorare licet.*

Resolutio.

1. In virga ferrea, aut lignea, aut ex quacunque materia alia parata AB, assumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen seu lingula CD. Tab.V. Fig.66.
2. Jugum intra trutinam seu scapum GF suspendatur, &
3. Brachium minus AC unco AH & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquilibretur, aut non multum ab æquilibrio absit.

4. Pon-

Tab.V.4. Fig.66. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duabus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, & notentur puncta in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipsa constructio loquitur, hoc modo, unici ponderis I ope, pondera corporum admodum differentium explorari posse (§. 765).

SCHOLION I.

775. *Quodsi onera ingentia, quales sunt Currus fœno onusti, ponderanda; non opus est, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illæ Stateræ trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin sufficit, nudo oculo facile dignoscitur.*

SCHOLION II.

776. *Empirica Stateræ, qua utuntur artifices, divisio geometricæ præferenda est, qua brachium longius* BC *ejusdem ubique spissitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut constructio satis sit accurata.*

SCHOLION III.

777. *Cum pondera non ubivis locorum æqualia sint: Stateræ quoque empirico modo constructæ universales non sunt.*

SCHOLION IV.

778. *Utut autem commodissimus sit Stateræ usus, quia non multis opus est ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proscribi præstat, quoniam venditores fraudulenti fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu sit fallaciam retegere. Ad communem itaque usum construuntur Libræ æqualium brachiorum. Sed antequam earum constructionem tradamus; fundamenta quædam theoretica sunt præmittenda.*

THEOREMA CLXXX.

779. *Si Libra, cujus centrum motus* C *fuerit supra rectam e cujus extremis pendent pondera æqualia* H *&* I, *horizonti sit parallela; quiescit: sed si inclinatur; tamdiu movetur donec iterum horizonti sit parallela.* Tab.V. Fig.67.

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad id sunt perpendiculares, (§. 212), adeoque brachia AL & LB coincidunt cum distantiis a centro motus (§. 229). Quare cum sit AL=LB, erit in L Centrum gravitatis commune ponderum (§. 145). Ex hoc igitur suspensa quiescunt (§. 124). *Quod erat unum.*

Quodsi ex situ suo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt distantiæ GE & EF (§. 229), quæ cum inæquales sint, pondera non æquilibrantur (§. 765), sed alterum I præponderat (§. 152): quod cum descendat, redit Libra in statum horizonti parallelum. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CLXXXI.

780. *Si Libra æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus infra jugum* AB, *fuerit horizonti parallela; quiescit: si vero inclinatur; in situm horizontalem non revertitur, sed descendit pondus unum, donec Libra pervenerit in situm priori contrarium.* Tab.V. Fig.68.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Fig.68. Si jugum AB fuerit horizontale, erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), adeoque distantiæ a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Est vero AL=LB, ex natura Libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia sint, *per hypoth.* Centrum gravitatis commune eorundem est in C (§. 145), adeoque situm non mutat (§. 124). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis, & per E recta GF eidem parallela; erunt distantiæ GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori distantia EG (§. 152), adeoque continuo descendit, donec A, B & L sint in eadem recta horizontali. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CLXXXII.

Tab.V. Fig.69. 781. *Si Libra, æqualibus ponderibus utrimque onusta, cujus centrum motus* C *in ipso jugo* AB, *fuerit horizonti parallela; quiescit, nec quomodocunque inclinata situm mutat.*

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in Theoremate præcedente. Posterius ita demonstratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE distantiæ ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad E & D, atque verticales angulos ad C æquales (§. 156 *Geom.*), itemque AC=CB, ex natura Libræ, erit DC=CE (§. 252 *Geom.*). Quare cum pondera H & I æqualia sint *per hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Tab.V. Fig.69. Libra igitur quiescit. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXIII.

782. *Libram construere, hoc est, instrumentum, in cujus extremitatibus appensa gravia æqualia æquiponderant in situ horizontali.*

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, Tab.V. Fig.70. ita ut brachia AC & CB sint ejusdem longitudinis; sintque tum brachia cum uncis suis A & B, tum lances D & E ejusdem prorsus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appensum, tam lancibus instructum quam sine iisdem, situm tueatur horizontalem.
2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen, sive lingula CF.
3. Jugum denique intra trutinam HI ita suspendatur, ut centrum motus C sit paulo supra jugum seu rectam AB, quæ appensionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus sit in ipsa recta AB.

Dico, si, Libra ex trutina HI suspensa, examen intra eandem abscondatur, gravia lancibus imposita esse æqualia, seu gravitatem utriusque esse eandem.

DEMONSTRATIO.

Si Libra ex I suspendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215). Quodsi ergo

Tab.V. Fig.70. lingula intra eam absconditur, cum ea sit ad jugum AB perpendicularis, *per constructionem*, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C sit vel in jugo AB, vel supra jugum, *per construct.* pondera utrinque suspensa æqualia sunt (§. 779, 781). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

783. Si brachia sint inæqualia, Libra dolosa est.

SCHOLION I.

784. *Præstat brachia esse longiora, quam breviora, quia idem error in divisione brachiorum admissus minorem in ponderibus producit, si brachia longiora, quam si breviora. Fac enim brachium* AC *esse justo longius uno scrupulo quarto, seu una decima lineæ. Si brachium* $AB = 5''$, *erit* $BC : AC = 500 : 501$. *Si* $AB = 5'$; *erit* $BC : AC = 5000 : 5001$. *In casu itaque posteriori differentia brachiorum est* $\frac{1}{5000}$; *in priore* $\frac{1}{500}$ *brevioris. Hinc & pondus majus in casu posteriore excedere debet minus* $\frac{1}{5000}$ *sui, in priore autem* $\frac{1}{500}$ *sui.*

SCHOLION II.

785. *Vulgares Libræ ita construuntur, ut centrum motus sit paulo altius jugo, quo Libra ex situ horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appensis, non quiescat, nisi eidem restituta* (§. 779). *Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.*

SCHOLION III.

786. *Ne affrictus impediat jugi è situ horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inseritur, cylindricus sit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi pernicior evadit, si axis in aciem desinat, qua parte trutinam tangit. Unde & jugum leve ac tenue esse debet, quantum per materiam ponderandam fieri potest, ut minori vi e situ suo dimoveatur sicque accuratius indicet æquilibrium.*

PROBLEMA CXXIV.

787. *Libram propositam examinare, utrum accurata sit, necne.*

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quodsi enim maneat æquilibrium, Libra accurata est; sin minus, dolosa.

DEMONSTRATIO.

Si enim Libra dolosa est, brachia inæqualia sunt (§. 783), adeoque lanx ex majori brachio suspensa levior altera (§. 765). Quare si lancem leviorem e minori, graviorem e majori brachio suspendas: præponderabit e majori brachio suspensa, adeoque æquilibrium tollitur (§. 152). *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXV.

788. *Libra dolosa verum pondus mercis explorare.* Tab.V. Fig.70.

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collocata, notetur pondus in altera D ipsi æquilibratum.
2. Eadem translata in D, notetur pondus in E ipsi æquilibratum.
3. Pondera ista in se invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc esse verum mercis pondus.

Sit ex. gr. pondus in $E = 10$, in $D = 9$ librarum, reperietur verum mercis pondus $9\frac{48}{100}$.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Fig.70. Eſt enim ut AC ad BC, ita merx ad pondus in D poſitum; & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§. 765). Ergo mercis pondus eſt medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 167, 156 *Arithm.*); conſequenter æquale radici ex facto ponderum in ſe invicem extractæ (§. 501 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

789. Si verum mercis pondus inventum, ratio brachiorum non amplius latet. Eſt enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipſi æquilibratum (§. 765); ex. gr. in noſtro exemplo ut 948 ad 900, ſeu ut 237 ad 225 (§. 181 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

790. Data ratione brachiorum AC & CB, facile determinatur error in æquilibrio admiſſus (§. 765). Æquiponderentur ex. gr. in lance E 100 libræ merci in altera D collocatæ. Ut habeatur quæſitum, fiat 237 — 225 — 100

$$\frac{100}{22500} \quad 237\,)\,\frac{22500}{2133}\,(95 \text{ fere.}$$
$$1170$$
$$1185$$

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM III.

791. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, iiſdem datis. Sit enim jugum integrum 1000 partium. Fiat ut ſumma brachiorum 237 + 225 ſeu 462 ad majus 237, ita 1000 ad idem brachium in partibus jugi milleſimis 513 fere. Sed ex natura libræ eſſe debet 500: excedit ergo veram quantitatem particulis 13, qualium ſcilicet jugum eſt 1000.

THEOREMA CLXXXIII.

792. *Si potentia, ope Axis in Peritrochio, ſuſtentet pondus* G, *ſitque linea directionis* AL *ad peripheriam rotæ vel ad ſcytalam perpendicularis; erit ut radius axis* CE *ad radium rotæ* CA *ſeu longitudinem ſcytalæ, ita potentia ad pondus.* Tab. VI. Fig. 71.

DEMONSTRATIO.

Quodſi potentia in A applicata deprimit rotam vel ſcytalam, perinde eſt ac ſi vecte heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G ſuſtentaret. Si vero in *a* applicata eandem attollit, perinde eſt ac ſi vecte homodromo *a*EC pondus idem G ſuſtentaret. Omnes enim machinæ partes reliquæ ad ponderis ſuſtentationem nil conferunt, cum utrinque ſibi mutuo æquilibrentur, ut machina tanquam gravitatis expers conſiderari poſſit. Jam cum linea directionis potentiæ in A vel *a* ſit ad AC vel *a*C perpendicularis, *per hypoth.* & funis EG a pondere G extenſus ad EC horizontalem *per hypoth.* ſimiliter normalis (§. 215); erit ut CE ad CA, vel ut CE ad C*a*; ita potentia ad pondus (§. 765). *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXXIV.

793. *Si potentia in* F *deprimat rotam juxta lineam directionis* FD *ad radium rotæ obliquam ſed directioni perpendiculari parallelam; ad potentiam, quæ juxta directionem perpendicularem* AL *agit, eam habet rationem, quam ſinus totus ad ſinum anguli directionis* DFC.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 71. Quoniam FD perpendicularis ad AC, *per hypoth.* erit DC potentiæ in F applicatæ distantia a centro motus C (§. 229). Est ergo ut potentia in F ad pondus G, ita EC ad CD (§. 272): & ut potentia in A ad pondus G, ita EC ad CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 199 *Arithm.*). Sed si AC vel FC (§. 40 *Geom.*) sumatur pro sinu toto, erit DC sinus anguli DFC (§. 2 *Trigon.*). Potentia igitur in A est ad potentiam in F, ut sinus totus ad sinum anguli directionis DFC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

794. Quare cum distantia potentiæ in A sit radius CA; dato angulo directionis DFC, inveniri potest distantia DC.

Sit ex. gr. FC = 4″ & DFC = 48°: Calculus ita subducetur:

Log. sin. tot.	10000000
Log. FC	0.6020600
Log. sin. DFC	98710735
Log. DC	1.04731335

cui quam proxime respondent in Tabulis 2′ 9″ 7‴.

THEOREMA CLXXXV.

795. *Potentiæ in diversis punctis* F & K, *rotam juxta directiones* FD & KI *perpendiculari* AL *parallelas deprimentes, sunt inter se ut distantiæ a centro motus* CD & CI *reciproce.*

DEMONSTRATIO.

Est enim potentia in F ad pondus G, ut EC ad CD; & idem pondus G ad potentiam in K, ut IC ad CE (§. 793). Ergo potentia in F ad potentiam in K, ut IC ad CD (§. 198 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 71.

COROLLARIUM I.

796. Crescente adeo distantia a centro motus, potentia decrescit, & contra, pondere manente eodem.

COROLLARIUM II.

797. Quare cum radius AC sit distantia maxima, & potentiæ juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quæ datum pondus G sustentare valent juxta diversas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM III.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 256 *Geom.*). Quare si ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipsi AC parallela (§. *cit.*), consequenter FM = DC (§. 257 *Geom.*). Cum adeo FM sit distantia potentiæ in F applicata; in praxi facile definitur absque calculo.

THEOREMA CLXXXVI.

799. *Si potentia juxta perpendicularem* AL *deprimit rotam & pondus* G *attollit; erit spatium potentiæ ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quæ id sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum rota semel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per spatium peripheriæ axis æquale. Est itaque spatium potentiæ a.d

Tab. VI. Fig. 71. ad ſpatium ponderis, ut peripheria rotæ ad peripheriam axis; conſequenter ut radius rotæ AC ad radium axis CE (§. 412 *Geom.*). Sed ut AC ad CE, ita pondus ad potentiam quæ id ſuſtentare valet (§. 792). Ergo ſpatium potentiæ eſt ad ſpatium ponderis, ut pondus ad potentiam quæ id ſuſtentare valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXVI.

800. *Dato pondere, dataque potentia ipſum ſuſtentatura; Axem in Peritrochio conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur radius Axis ponderi ſuſtentando conveniens, ne ſcilicet axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus, ita radius axis ad radium rotæ, ſeu longitudinem ſcytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

801. Quodſi potentia fuerit pars ponderis exigua, radius rotæ enormis prodit. Ex. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 librarum; erit radius rotæ ad radium axis, ut 60 ad 1. Hinc ſi radius axis non excederet pedem dimidium, foret radius rotæ pedum 30.

SCHOLION.

802. *Huic malo medela affertur, rotas cum axibus multiplicando; &, ut una alteram circumagere valeat, dentibus vel etiam tympanum paxillis inſtruendo.*

THEOREMA CLXXXVII.

Tab. VI. Fig. 72. 803. *Si pluribus rotis dentatis potentia aliqua, cujus linea directionis KL peripheriam ultimæ tangit, pondus H ſuſtentat; erit ea in ratione compoſita omnium earum quas radii axium ad radios rotarum habent; nempe* CB : CD, EF : EG, HI : HK.

DEMONSTRATIO.

Quodſi concipiamus potentiam applicari in D: erit ea ad pondus A ut CB ad CD (§. 792); conſequenter = A. CB : CD (§. 297 *Arithm.*). Axis igitur DF tantopere gravatur, ac ſi pondus A. CB : CD appenderetur. Concipiamus itaque porro potentiam in G applicari, quæ hoc pondus, ope rotæ alterius ſolius, conſequenter pondus A ope duarum ſuſtentet. Cum ſit ad pondus A. CB:CD, ut EF ad EG (§. 792); reperietur = A. CB. EF : CD. EG (§. 297 *Arithm.*). Quare axis tertius GI tantopere gravatur, ac ſi pondus A. CB.EF:CD.EG appenderetur. Quoniam potentia in K eſt ad hoc pondus, ut HI ad HK (§. 792); reperietur ea = A. CB. EF. HI : CD. EG. HK (§. 297 *Arithm.*), & ita porro, ſi plures fuerint rotæ. Eſt igitur potentia in K applicata ad pondus A quod ope plurium rotarum ſuſtentat, ut A. CB. EF. HI : CD. EG. HK ad A; hoc eſt, ut A. CB. EF. HI ad A. CD. EG. HK (§. 178 *Arithm.*), adeoque & ut CB. EF. HI, ad CD. EG. HK (§. 181 *Arithm.*); conſequenter in ratione compoſita CB : CD, EF : EG & HI : HK (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

804. Quodſi pondus ducas in factum ex radiis axium, & productum dividas per factum ex radiis rotarum; potentia ipſum ſuſtentatura reperitur, quæ aucta idem attollet,

Tab. VI. Fig. 72. attollet. Sit ex. gr. A = *6000* librarum, BC = *6*″, CD = 34″, EF = 5″, EG = 35″, HI = 4″, HK = 27″; erit BC. EF. HI = 120. & CD. EG. IK = 32130 & hinc potentia = *6000*. 120 : 32130 = $22\frac{1314}{3213} = 22\frac{146}{357} = 22\frac{1}{3}$ quam proxime.

Corollarium II.

805. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum dividas per factum ex radiis axium; prodibit pondus quod sustentare valet. Sit ex. gr. potentia $22\frac{146}{357}$ librarum, reliqua omnia sint ut ante; reperietur pondus 6000.

Scholion.

Tab. VI. Fig. 73. 806. *Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur manubrium* ABCD, *ubi* AE *radio axis,* CD *radio rotæ respondet.*

Problema CXXVII.

807. *Data potentia, datoque pondere; invenire numerum rotarum, & in unaquaque rationem radii axis ad radium rotæ definire, ita ut potentia peripheriæ rotæ ultimæ applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum sustentet.*

Resolutio.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus dispergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium se habere ad radios rotarum ut unitatem ad radios singulos.

Sit ex. gr. pondus 3000 librarum & potentia *60*, erit quotus 500, qui resolvitur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur construi possunt rotæ, in quarum una radius axis est ad radium rotæ, ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

Demonstratio.

Si pondus per potentiam dividitur, unitas est ad quotum, ut potentia ad pondus (§. *69 Arithm.*). Est igitur potentia ad pondus in ratione composita unitatis ad singulos factores (§. 159 *Arithm.*). Quare si radii axium fiant ad radios rotarum, ut unitas ad eosdem factores; potentia erit ad pondus in ratione composita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus sustentare valet ope machinæ constructæ (§. 803). *Q. e. d.*

Scholion.

808. *Quoniam in excessu peccari nequit; consultum est, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem assumere. Similiter unam, immo aliquot unitates quoto addere licet, si in factores commode dispergi nequit.*

Theorema CLXXXVIII.

809. *Si ope duarum rotarum potentia movet pondus; revolutiones tardius* Tab. VI. Fig. 72.
motæ sunt ad revolutiones celerius motæ, ut peripheria axis celerius motæ ad peripheriam rotæ cui occurrit.

Demonstratio.

Interea dum rota tardius mota M unam revolutionem absolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, consequenter rota N, circumvolvitur, antequam rota M unam revolutionem absolvit, quoties peripheria axis FE in peripheria rotæ M continetur.

Sunt.

Tab. VI. Fig. 72. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ, ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

810. Eædem igitur revolutiones sunt ut radius axis FE, ad radium rotæ DC (§. 412 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

811. Cum numerus dentium in axe FD sit ad numerum dentium in peripheria rotæ M, ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium seu paxillorum in axe ad numerum dentium in rota M cui iste occurrit.

THEOREMA CLXXXIX.

812. *Si ope plurium rotarum* M, N, O *&c. potentia movet pondus* A; *erunt revolutiones rotæ celerrime motæ* O *ad revolutiones tardissime motæ* M, *in ratione composita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium* IG, FD *&c. & peripheriarum rotarum* N, M *&c. quibus illi occurrunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N m & n, peripheriæ axium DF & GI a & b; erit ut a ad m, ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) $= m:a$ (§. 302 *Arithm.*). Est vero porro ut b ad n, ita $m:a$ ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) $= mn:ab$ (§. 302 *Arithm.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O sunt ad revolutiones rotæ tardissime motæ M, ut $mn:ab$ ad 1, hoc est ut mn ad ab (§. 178 *Arithm.*), consequenter in ratione composita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI qui ipsis occurrunt (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM I.

813. Quoniam numeri dentium sunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM II.

814. Quia peripheriæ sunt ut radii, (§. 412 *Geom.*) revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM III.

815. Quare si factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardissime motæ M, & productum dividas per factum ex radiis axium qui ipsis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velocissime motæ O (§. 302 *Arithm.*). Ex. gr. sit $GE = 8$, $DC = 12$, $GH = 4$, $DE = 3$, & revolutio rotæ M una; erit numerus revolutionum rotæ $O = 96:12 = 8$.

PROBLEMA CXXVIII.

816. *Datis revolutionibus rotæ velocissime circumactæ* O *interea absolutis, dum tardissime mota* M *semel in orbem redit; invenire dentium in axibus & rotis numerum.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum dispergatur in factores.
2. Numerus dentium seu paxillorum in axibus pro arbitrio assumptus ducatur sigillatim in singulos factores.

Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum quibus totidem axes occurrunt.

Ex. gr. Si rota velocissime mota 40 revolutiones absolvat, dum tardissime mota semel circumagitur; resolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus esse rotis totidemque axibus dentatis qui istis occurrant. Quodsi axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis instruenda, figuram sortitura pro potentiæ applicandæ conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardissime motæ, sunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis quibus occurrunt (§. 811). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ resolvitur; sitque adeo unitas ad factores hosce, ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis quibus occurrunt (§. 66 *Arithm.*); revolutiones rotæ tardissime motæ erunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita unitatis ad factores numeri revolutionum posteriorum dati, consequenter ut unitas ad ipsum hunc numerum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA CXC.

817. *Si ope plurium rotarum potentia movet pondus; spatium ponderis est ad spatium potentiæ, ut potentia sustentans ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. *a*, *b*, *c*, &c. axium CB, DE, GH &c. *d*, *e*, *f* &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M semel in orbem redit $= ab : ef$ (§. 812). Jam si rota M semel circumagitur, spatium a pondere percursum æquatur peripheriæ axis BC; spatium vero potentiæ, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea absolutarum multiplicatæ. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentiæ, ut *d*, ad $abc : ef$; consequenter ut *def* ad *abc* (§. 178 *Arithm.*). Sed $d : a =$ CB : CD; $e : b =$ DE : EG; $f : c =$ GH : HK (§. 412 *Geom.*); adeoque $def : abc =$ CB. DE. GH : CD. EG. HK (§. 218 *Arithm.*). Ergo spatium ponderis ad spatium potentiæ, ut CB.DE.GH ad CD. EG. HK (§. 167 *Arithm.*); & ideo ut potentia sustentans ad pondus (§. 812). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA CXCI.

819. *Spatia ponderis atque potentiæ sunt in ratione composita revolutionum*

rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ, & peripheriæ axis istius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardissime motæ $= m$, numerus revolutionum velocissime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria posterioris $= b$. Cum in una revolutione spatium ponderis sit a, potentiæ b; erit spatium ponderis, durantibus revolutionibus m, $= ma$; spatium potentiæ, durantibus revolutionibus n, $= nb$. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentiæ, ut ma ad nb, hoc est, in ratione composita revolutionum m & n, atque peripheriæ axis rotæ tardissime motæ a & peripheriæ rotæ velocissime motæ b (§. 159 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

820. Cum spatia ponderis & potentiæ sint reciproce ut potentia sustentans, ad pondus (§. 817); potentia sustentans pondus erit ad pondus, in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones velocissime motæ, & peripheriæ axis istius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA CXXIX.

821. *Data peripheria axis rotæ tardissime motæ, cum peripheria rotæ velocissime motæ, & ratione revolutionum rotæ istius ad revolutiones hujus; invenire spatium quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur spatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardissime motæ in antecedentem, & peripheria rotæ velocissime motæ in consequentem rationis.
2. Quæratur ad hæc duo facta & spatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is spatium potentiæ quæsitum. (§. 819).

Sit ex. gr. ratio revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ $= 2 : 7$, & spatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardissime motæ sit ad peripheriam velocissime circumactæ, ut 3 ad 8. Reperietur spatium potentiæ $= 7. 8. 30 : 2. 3 = 7. 4. 10 = 280'$.

PROBLEMA CXXX.

822. *Data peripheria rotæ velocissime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem, & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardissime motæ quam revolutionum utriusque; invenire spatium ponderis.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velocissime motæ in numerum revolutionum ejusdem; factum erit potentiæ spatium.
2. Ducantur quoque in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
3. Quæratur ad hæc duo facta & spatium potentiæ modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is spatium ponderis quæsitum (§. 819).

Ex. gr. Sit peripheria rotæ velocissime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis ex quo pondus suspenditur $= 8 : 3$, numerus revolutionum $= 28$, ratio revolutionum $= 7 : 2$. Reperietur spatium ponderis $= 3. 2. 28. 10 : 8. 7 = 3. 10 = 30$.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

823. *Data ratione peripheriarum rotæ velocissime motæ atque axis rotæ tardissime motæ, itemque revolutionum utriusque, una cum pondere; invenire potentiam quæ id sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
2. Quæratur ad factum antecedentium, factum consequentium, & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæsita (§. 820).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperietur potentia = 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = $214\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

824. *Non absimili modo pondus invenitur, si potentia detur, & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardissime motæ & rotæ velocissime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA CXXXII.

825. *Datis revolutionibus rotæ velocissime motæ interea absolvendis, dum tardissime mota semel in orbem redit, una cum spatio per quod pondus elevari debet, & peripheria rotæ tardissime motæ; invenire tempus elevationi quæsitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat ut peripheria axis rotæ tardissime motæ ad spatium ponderis datum, ita numerus revolutionum rotæ velocissime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea absolvendarum dum pondus emetitur spatium datum.
2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ, intra unius horæ spatium aut tempus datum quodcunque, absolvendarum.
3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus.

Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXCII.

826. *Si potentia* P *ope Trochleæ simplicis* Q *pondus sustentat, ita ut lineæ directionis utriusque tangat peripheriam; erit huic æqualis.* Tab. V. Fig. 61.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam Trochleæ tangunt, *per hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares sunt (§. 304 *Geom.*). Jam cum ad sustentationem, præter rectam ACB, partes reliquæ nil conferant, sitque centrum motus in C (§. 759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 765). Sed CB = CA (§. 40 *Geom.*). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

827. Trochlea igitur simplex, si lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, sed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM II.

828. Utimur ergo Trochlea, quoties potentiæ trahentis directio verticalis in horizontalem, aut sursum tendens in tendentem deorsum, & contra mutari debet.

SCHOLION I.

Tab. VI. Fig. 74. 829. *Hoc ipso securitati trahentium sæpissime prospicitur. Fac enim pondus ingens esse ad insignem altitudinem attollendum ab Operariis funem trahentibus. Quodsi contingat funem* DE *abrumpi & Operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vitæ periculo constituuntur. Enimvero si ope Trochleæ* B *directio verticalis* AB *in horizontalem* BC *mutatur, rupto fune* DE *nihil metuendum periculi.*

SCHOLION II.

830. *Hæc ipsa mutatio lineæ directionis ope Trochlearum in horizontalem hunc etiam præstat usum, ut, si potentia aliqua secundum unam directionem plus virium impendere possit quam secundum alteram, vi maxima utamur; nec non ut potentiis uti liceat quæ juxta datam directionem agere non possent.* Ex. gr. *equus non trahit secundum directionem verticalem, trahit tamen secundum horizontalem. Verticalis igitur tractio si mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.*

THEOREMA CXCIII.

Tab. VI. Fig. 75. 831. *Si potentia in* E *applicata secundum lineam directionis* BE, *quæ Trochleam in* B *tangit & funi* AD *parallela est, pondus* F *ex centro Trochleæ* C *suspensum sustentet; ponderis subdupla est.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim, præter rectam AB, partes Trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F sustentationem. Cum vero Trochlea sit circa centrum C mobilis (§. 759), in eo erit centrum motus. Et quia, tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentiæ BE ad AB perpendicularis, *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F, ut AC ad AB (§. 765). Est vero AC $= \frac{1}{2}$ AB (§. 759). Ergo potentia ponderis F subdupla. *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 75.

SCHOLION.

832. *Cum Trochlea cum unco suo & loculamento, quod in usu abesse nequit, una attollatur a potentia sursum trahente secundum directionem* EB, *ejus gravitas ponderi* F *addenda est.*

THEOREMA CXCIV.

833. *Si potentia in* B *applicata ope Polyspasti sustentet pondus* F *ita ut omnes funes* AB, HI, GF, EL, CD *sint inter se paralleli; erit potentia ad pondus, ut unitas ad numerum funium* HI, GF, EL, CD, *qui a pondere* F *trahuntur.* Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes sunt inter se paralleli, adeoque a centris Trochlearum suarum intervallo radiorum utrinque distant; nulla est ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit, adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, si fuerint funes quatuor, perinde sit ac si tantum pars quarta ponderis ex fune CD suspenderetur. Potentia igitur in B applicata, cum æqualis sit ponderi ex fune CD suspenso (§. 826); quartam

Tab. VI. Fig. 76. quartam non nisi ponderis partem in præsenti casu sustentat, hoc est, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium quos pondus F extendit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

834. *Ne Polyspastorum altitudo in nimium excrescat, si ex pluribus Trochleis componantur; Trochleæ ita junguntur, ut tam omnes superiores, quam omnes inferiores circa communem axem versatiles existant. Tum vero omnes inter se æquales esse debent, ut funes sint paralleli.*

SCHOLION II.

835. *Usus Trochlearum insignis est in ponderibus elevandis; tum quod machina spatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod insigni virium compendio pondus satis ingens attolli possit.*

COROLLARIUM I.

836. Cum numerus Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum æqualis sit numero funium inferiores sustentantium; potentia pondus F ope Polyspasti sustentans est ad pondus, ut unitas ad numerum Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum.

COROLLARIUM II.

837. Datis igitur Trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus sustentandum; potentia nempe per pondus multiplicatur. Sit ex. gr. potentia 50 librarum, numerus Trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLION III.

838. DECHALES (a) *autor est, experientia constare, quod homo simpliciter solo insistens 150 libras elevare possit. Cum igitur 150 librarum potentia ope Polyspasti ex 6 Trochleis compositi 900 libras sustentare possit; evidens est, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere possit.* Tab. VI. Fig. 76.

(a) Mechanic. Lib. 4. prop. 4. *Mund. Math.* Tom. 2. f. m. 182.

SCHOLION IV.

839. *Mire multiplicantur Trochlearum vires, si polyspasti plures conjunguntur, tum enim potentia, in Polyspasto uno ad attollendum pondus Q applicanda, vicem subit ponderis F ex Polyspasto altero appensi. Ponamus igitur pondus Q esse 1000 librarum, & Trochleas in unoquoque Polyspasto quatuor; erit ergo pondus P ex altero Polyspasto suspensum nonnisi quarta illius pars, nempe 250, consequenter potentia quarta pars hujus, hoc est, decima sexta totius,* $62\frac{1}{2}$.

PROBLEMA CXXXIII.

840. *Datis pondere atque potentia; invenire numerum Trochlearum ex quibus componendus est Polyspastus.*

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quæsitus (§. 836).

Sit ex. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus Trochlearum 4: quarum omnium eadem diameter, si duæ in parte inferiore, duæ in superiore circa communem axem versatiles construantur (§. 834).

THEOREMA CXCV.

841. *Si potentia Trochlearum ope movet pondus; erit spatium potentiæ ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam sustentantem.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens est, funium omnium, ex quibus Trochleæ inferiores cum pondere sustentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui

debere. Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot sunt funes Trochleas inferiores sustentantes. Quare spatium ejus est ad spatium ponderis, ut numerus funium Trochleas inferiores sustentantium ad unitatem; consequenter ut pondus ad potentiam sustentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

842. Quo minor itaque potentia pondus ope Polyspasti attollit, eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis dispendio conjungatur.

THEOREMA CXCVI.

Tab. XVIII. Fig. 178. 843. *Si potentia in* F *applicata suspendit pondus* E *secundum directionem obliquam* BD, *& hujus directio sit itidem obliqua* ED, *linea vero directionis Trochleæ* DG *per centrum* C *transit; erit potentia ponderi æqualis, & tam ista quam hoc ad vim qua trochlea in* L *retinetur, ut sinus anguli* ADB *ad sinum anguli dimidii.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim funes DF & DE quomodocunque extensi Trochleam in B & A tangunt, si ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 308 *Geom.*) & AD=DB (§. 325 *Geom.*). Quare cum etiam sit AC=CB (§. 40 *Geom.*); erit angulus ADC ipsi CDB æqualis (§. 179 *Geom.*). Jam perinde est ac si mobile aliquod secundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus secundum directiones AD & DB trahentibus, illique æquipollentibus, propter statum æquilibrii, *ex hypothesi*. Est adeo vis in F applicata ad pondus E, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales *per demonstrata*, adeoque & sinus eorum (§. 142 *Geom.* & §. 2 *Trigon.*). Quamobrem pondus potentiæ æquale est. *Quod erat unum.* Tab. XVIII. Fig. 178.

Jam potentia est ad vim Trochleam secundum directionem DC sustinentem, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli ADB; & pondus E ad eandem vim, ut sinus anguli BDC ad sinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales sint, *per demonstrata*, adeoque dimidii anguli ADB; erit vis Trochleam sustentans, in statu æquilibrii ponderum E & F; ad horum alterutrum, ut sinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt, ad sinum anguli dimidii. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXCVII.

844. *Si ponderis* G *linea directionis* DC *per centrum Trochleæ transit, & Trochlea trahatur secundum directiones obliquas* ED *&* DF; *erunt hæ vires inter se æquales; earum vero alterutra ad pondus, ut sinus anguli a directionibus obliquis intercepti* ADB *ad sinum anguli dimidii* ADC. Tab. XVIII. Fig. 179.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata litera huc transcribi tota possit.

COROLLARIUM.

845. Quoniam finus anguli dimidii non eft dimidius totius, feu, quod perinde eft, fimpli anguli finus non eft dimidius dupli (§. 325 *Analyf. fin.*); in cafu directionum obliquarum, potentia pondus, cujus directio per centrum Trochleæ tranfit, fuftentans non eft ponderis dimidia.

SCHOLION.

846. *Ex duobus hifce Theorematis deduci poffunt, quæ de Trochleis in cafu directionum obliquarum præterea demonftranda funt; quemadmodum videre eft apud* VARIGNONIUM, *qui hanc Staticæ partem diffufe pertractat* (*a*).

THEOREMA CXCVIII.

Tab.V. Fig.62. 847. *Si pondus vel refiftentia Cochleæ fuperanda fuerit ad potentiam, ut peripheria a potentia percurrenda ad diftantiam binarum helicum* BI; *potentia ponderi æquipollet.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, funt ut fpatia eodem tempore defcripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad diftantiam helicum BI (§. 33). Sed vires mortuæ funt in ratione compofita celeritatum & maffarum (§. 278). Quare cum potentiæ pondus æquale fubftitui poffit (§. 763), fitque pondus potentiæ æquale ad pondus elevandum aut deprimendum, reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad diftantiam helicum BI, *per hypoth.* celeritates funt ut maffæ reciproce. Ergo vis potentiæ eft ad vim ponderis, ut factum ex maffa potentiæ in maffam ponderis ad factum ex maffa ponderis in maffam potentiæ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum hæc facta æqualia fint (§. 207 *Arithm.*); vires æquales funt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

848. Cum peripheria a potentia percurfa in una Cochleæ converfione fit fpatium ejus, diftantiæ autem duarum helicum BI refpondeat fpatium ponderis; erit hic quoque fpatium ponderis ad fpatium potentiæ, ut reciproce potentia fuftentans ad pondus.

COROLLARIUM II.

849. Virium itaque compendium cum temporis difpendio denuo conjungitur.

THEOREMA CXCIX.

850. *Si diftantia helicum* BI *minor fuerit, potentia ad eandem refiftentiam fuperandam applicata minor eft, quam fi illa major fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Eft enim ut fpatium potentiæ ad helicum diftantiam, ita pondus, ad potentiam (§. 847). Quod fi ergo helicum diftantia minuitur, fpatium potentiæ ad eandem (§. 205 *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Eft igitur potentia in cafu pofteriore minor, quam in priore (§. 206 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA CC.

851. *Si Cochlea mas intra fœminam quiefcentem convertitur; minor potentia ad eandem refiftentiam fuperandam requiritur, fi fcytala* CD *longior, quam fi brevior.* Tab. VI. Fig. 78.

DE-

(*a*) *Nouvelle Mécanique, ou Statique* Tom. I. Sect. 3. p. 283. & feqq.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 78. Ut peripheria, ſcytala CD tanquam radio deſcripta, ad helicum diſtantiam IK, ita reſiſtentia ſuperanda ad potentiam (§. 848). Sed ſi ſcytala longior, major peripheria deſcribitur quam ſi brevior (§. 412 *Geom.*). Ergo in illo caſu peripheria ad diſtantiam helicum IK (§. 203 *Arith.*), conſequenter & reſiſtentia ſuperanda ad potentiam majorem rationem habet, quam in hoc caſu. Quare cum reſiſtentia eadem maneat, *per hypoth.* potentia in caſu poſteriore major, quam in priore (§. 189 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXXIV.

852. *Data diſtantia potentiæ a centro Cochleæ* CD, *diſtantia helicum* IK, *& potentia in* D *applicata; determinare reſiſtentiam ſuperandam: vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio CD deſcribenda (§. 429 *Geom.*).
2. Quæratur porro ad diſtantiam helicum, peripheriam modo inventam, & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, diſtantiam helicum IK, & reſiſtentiam datam numerus quartus proportionalis; erit is in priore caſu reſiſtentia ſuperanda, in altero potentia qua ad reſiſtentiam datam vincendam utendum (§. 847).

Ex. gr. Sit diſtantia helicum 3''', diſtantia potentiæ a centro Cochleæ CD 25'', potentia 30 librarum. Fiat

100 — 314 — 50'''
— 50
157|00 Peripheria a potentia conficienda.

Fiat porro

3 — 157 — 30
1   10   10 (§. 316 *Arithm.*)
1570 pondus, cui reſiſtentia æqualis.

PROBLEMA CXXXV.

853. *Data reſiſtentia quæ data potentia ſuperari debet; Cochleæ diametrum, diſtantiam helicum* IK, *& longitudinem ſcytalæ* CD *definire.*

RESOLUTIO.

1. Diſtantia helicum & diameter Cochleæ pro arbitrio aſſumantur, ſi ope ſcytalæ convertenda eſt Cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad reſiſtentiam quam ſuperare debet, ita helicum diſtantia ad quartum: quæ erit peripheria a ſcytala CD in converſione Cochleæ deſcribenda (§. 847).
3. Quodſi ergo quæratur ſemidiameter hujus peripheriæ (§. 429 *Geom.*); habebitur longitudo ſcytalæ CD.
4. Quodſi vero Cochlea fœmina circa marem convertitur ſine ſcytala, peripheria *per n.* 2. inventa eadem fere eſt, quæ Cochleæ, adeoque ſemidiameter *per n.* 3 reperta Cochleæ ſemidiameter.

Ex. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, diſtantia helicum 1''. Repetietur peripheria a potentia percurrenda 6000 : 100 = 60, adeoque longitudo ſcytalæ, ſi qua utaris, 1' 9'': ſi nulla utaris, erit latus Cochleæ fœminæ 19''.

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 79. 854. Quodsi peripheria Cochleæ in rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BA erigatur altitudini Cochleæ æqualis, tandemque factis B 1, 1 2, 2 3 &c. distantiæ helicum æqualibus, ducantur rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogrammum circa cylindrum cujus peripheria rectæ BC æqualis circumvolutum helicem qua cylindrus sulcandus exhibebit.

DEFINITIO LXXXII.

Tab. VI. Fig. 80. 855. *Cochlea infinita*, seu *perpetua* vocatur, si rotam stellatam F circumagit.

COROLLARIUM.

856. Dum Cochlea semel circumvolvitur; rota nonnisi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLION.

857. *Dicitur autem ideo infinita, quia sine fine circumagi potest.*

THEOREMA CCI.

858. *Si potentia manubrio Cochleæ infinitæ* AB *applicata fuerit ad pondus, in ratione composita ex peripheria axis rotæ* EH *ad peripheriam manubrio versato a potentia descriptam, & revolutionum rotæ* F *ad revolutiones Cochleæ* CB; *ponderi æquivalebit.*

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ stellatæ F multiplices, prodibit spatium ponderis G. Sed si peripheria manubrio AB descripta multiplicetur per numerum revolutionum Cochleæ CB, factum est spatium potentiæ. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut ista spatia (§. 33). Quare cum pondus ad potentiam sit in ratione reciproca eorundem spatiorum (*per hypoth. &* §. 159 *Arithm.*); vires sunt in ratione composita earum, quas habet spatium ponderis ad spatium potentiæ, & spatium potentiæ ad spatium ponderis (§. 278), hoc est, ut factum ex spatio ponderis in spatium potentiæ ad factum ex spatio potentiæ in spatium ponderis (§. 159 *Arithm.*); adeoque æquales (§. 207 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 80.

COROLLARIUM I.

859. Quoniam rotæ motus tardissimus (§. 856); exigua potentia ingens pondus moveri potest ope Cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM II.

860. Utimur adeo Cochlea infinita, vel si ingens admodum pondus per exiguum spatium movendum, vel si motus tardissimus efficiendus.

SCHOLION.

861. *Commodus igitur ejus usus est in Horologiis. Unde* HUGENIUS *eadem utitur in Automato Planetario.*

PROBLEMA CXXXVI.

862. *Datis dentium numero, distantia potentiæ a centro Cochleæ* AB, *& radio axis* HE, *una cum potentia; invenire pondus.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur distantia potentiæ a centro Cochleæ AB in numerum dentium;

Tab. VI. Fig. 80. factum est ut spatium potentiæ interea absolutum dum pondus conficit spatium peripheriæ axis æquale (§. 413 *Geom.* & 858 *Mech.*).

2. Quæratur numerus quartus proportionalis ad radium axis, spatium potentiæ modo inventum, & potentiam; erit is pondus quod potentia sustentare valet (§. 858).

Ex. gr. Sit AB = 3, radius axis HE = 1, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ F = 48; erit pondus = 3.48.100:1.1 = 14400.

Scholion I.

863. *Apparet hinc, Cochleam infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.*

Scholion II.

864. *Solent etiam Cochleæ construi, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque Cochlea a singulis dentibus semel circumvolvatur, motus efficitur velocissimus. Hinc ejus usus est in Machinis, quæ ad poliendum corpora aspera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.*

Theorema CCII.

Tab. V. Fig. 64. 865. *Si potentia Cuneo ita applicata, ut linea directionis* CD *sit ad latus* AB *perpendicularis, fuerit ad resistentiam superandam, ut* AB *ad* CD*; resistentiæ æquipollet.*

Demonstratio.

Ponamus Cuneum detrudi usque ad rectam GF ipsi AB parallelam: erit DE spatium potentiæ, FG spatium ponderis. Tab. V. Fig. 64. Est vero DE : FG = DC : AB (§. 268 *Geom.*). Ergo celeritates potentiæ & ponderis sunt, ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiæ ac ponderis sunt in ratione composita ipsorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, *per hypoth.* Ergo vires sunt ut AB. DC ad DC. AB (§. 159 *Arithm.*); adeoque æquales (§. 207 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Corollarium I.

866. Potentia igitur dimidiæ resistentiæ æquivalens est ad eam, ut AC ad DC, hoc est, ut ad sinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7 *Trigon.*).

Corollarium II.

867. Cum tangens anguli minoris minor sit quam majoris (§. 7 *Trigon.*), potentia ad dimidiam resistentiam majorem rationem habet, si angulus major, quam si minor (§. 203 *Arithm.*). Unde in priori casu major est quam in posteriori (§. *cit.*), hoc est, Cunei acutiores magis potentiæ vires amplificant quam minus acuti.

Scholion.

868. *Ex natura Cunei reddenda est ratio omnium fere instrumentorum quibus ad scindendum aut dividendum utimur: qualia sunt cultri, enses, secures, scisfella, aliaque instrumenta celatoria.*

CAPUT

CAPUT XVI.

De Potentiarum ad Machinas Applicatione.

DEFINITIO LXXXIII.

869. PEr *Potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: per *inanimatas* vero, aërem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO LXXXIV.

870. Potentia dicitur *trudendo movere*, si linea directionis tendit in plagam moventi oppositam.

DEFINITIO LXXXV.

871. Potentia dicitur *deprimere*, si linea directionis tendit a movente deorsum.

DEFINITIO LXXXVI.

872. Potentia dicitur *trahere*, si linea directionis tendit ad moventem, seu si mobile sequitur moventem vel ad eum accedit.

DEFINITIO LXXXVII.

873. Potentia dicitur *elevare*, si linea directionis tendit sursum, seu si mobile ascendit.

DEFINITIO LXXXVIII.

874. Potentia animata dicitur *calcando* movere, si pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO LXXXIX.

875. Potentia animata *versando movere* dicitur, si eidem loco insistentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA CXXXVII.

876. *Machinam construere, quam Homo trudendo movere possit.* Tab. VII. *Fig.* 81.

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF versari possit.
2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

Quodsi enim Homo manibus continuo protrudat vectem GH, cylindrus EF circa axem suum circumagetur (§. 870).

SCHOLION.

877. *Si Machina ita simplex ad pondera attollenda adhibetur,* Ergata *appellari solet.*

COROLLARIUM I.

878. Quodsi GH fuerit temo cum libra; Equus vel Taurus *trahendo* Machinam movebit (§. 872). Tab. VII. *Fig.* 82.

COROLLARIUM II.

879. Si annulo L alligetur funis, quem manibus prehendat Homo, aut corpori suo circumplicet; Machinam *trahendo* movebit (§. 872). Tab. VII. *Fig.* 81.

PROBLEMA CXXXVIII.

880. *Machinam construere, quam Homo versando movere possit.*

Resolutio.

Tab. VI. Fig. 83. Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim Homo manu circa centrum radium BD circumducit; versando Machinam movet (§. 875 *Mech.* & §. 131 *Geom.*).

Scholion.

881. *Si duo manubria eidem Machinæ applicantur, necesse est, ut situm habeant contrarium, quia dum unus manubrium* ABDC *deprimit, alter alterum* EFGH *attollere debet.*

Problema CXXXIX.

882. *Machinam construere, quam Homo partim trahendo, partim deprimendo movere possit.*

Resolutio.

Tab. V. Fig. 60. Talis est Axis in Peritrochio EABF. Quodsi enim scytalam A manu prehendas & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): sed ubi ulterius eandem deorsum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 871).

Tab. VII. Fig. 84. Loco Peritrochii sufficiunt scytalæ solæ GH & KI: quæ si duobus in locis ad axem aptentur, duo Homines una eandem partim trahendo, partim deprimendo movebunt.

Scholion.

883. *Si Cylindrus horizontaliter positus & solis Scytalis instructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur,* Sucula *vocatur.*

Problema CXL.

884. *Machinam construere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere possit Homo.*

Resolutio.

1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur. Tab. VII. Fig. 85.
2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum transeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodsi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB semiperipheriam describet, sicque trahendo movebis Machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem sui BC tibi obvertit, in pristinum situm redigas; idem radius BA alteram semiperipheriam describet; sicque trudendo movebis Machinam (§. 870).

Aliter.

Idem præstabis, si vectis HFG solo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere possit: reliqua omnia eadem ratione se habeant, ut ante. Tab. VII. Fig. 86.

Scholion.

885. *Uncus interdum geminatur, ut alter sit altero superior & in contrarium positus: ita nimirum duo simul machinam agitare possunt motibus contrariis, uno scilicet trahente, dum alter trudit; & contra.*

Problema CXLI.

886. *Machinam construere, quam Homo calcando movere possit.*

Reso-

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 87. Conſtruatur Tympanum AB cum cylindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut Homo unus vel plures intra ejus ambitum ſtare poſſint. Hunc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874).

Aliter.

Tab. VII. Fig. 88. Conſtrui quoque poteſt rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior ſuperficies dentibus, ſuperior ſcalis inſtruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi ſua in eam agat (§. 261), major tamen diſtantia a centro motus eſſe poteſt, quam in verticaliter erectis.

Aliter.

Tab. VIII. Fig. 89. Si pondus movendum ſit exiguum & motus celer requiritur, vecte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum manubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, ſi pede deprimatur. Tab. VIII. Fig. 90. Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elaſticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, adeoque in minori diſtantia, applicatur; motus eſt celer, utut potentia major eſſe debeat reſiſtentia in H vincenda (§. 765. 772).

PROBLEMA CXLII.

887. *Machinam conſtruere, quam Equus vel Bos trahendo movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Utendum eſt cylindro verticaliter erecto ND cum temone HG 8 minimum pedum, ut ſupra (§. 775). Præ- Tab. VII. Fig. 82. ſtat autem temonem eſſe longiorem, quam breviorem, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA CXLIII.

888. *Machinam conſtruere, quam Equus vel Bos calcando movere poſſit.*

RESOLUTIO.

Conſtruendum eſt Tympanum AB Tab. VIII. Fig. 91. ſubſcudibus tranſverſis munitum, & ſuper eo ſtabulo includatur Equus vel Bos per ſolum pertuſum pedibus poſterioribus rotæ inſiſtens, ſubſcudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum aſſa, tympanum eum in modum conſtrui ſolet, quo majora (§. 885), ab Hominibus intra eorum ambitum conſiſtentibus impellenda; & Canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis ſui mole idem circumagens.

SCHOLION.

889. *Cum Machinæ hactenus deſcriptæ omnes, ad Axem in Peritrochio revocentur, niſi quod nonnullæ earum ſint ex Vecte & Axe in Peritrochio compoſitæ, ſi attendatur ad lineam directionis potentiæ & inde determinetur diſtantia a centro motus (§. 229), virium æſtimatio haud difficulter inſtituitur (§. 765, 792, 793).*

PROBLEMA CXLIV.

Tab. VIII. Fig. 92. 890. *Machinam construere, quæ a pondere descendente moveatur.*

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontaliter positum funis circumvolvatur, &
2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento distantia.
3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum descendit, cylindrum AB circumagit.

COROLLARIUM I.

891. Quo major est altitudo, per quam pondus Q descendit, eo diutius durat motus.

SCHOLION.

892. *Hinc Horologia, quæ a pondere descendente moventur, in editis Turribus collocantur, aut, si index circumagendus fuerit exiguus, in suprema conclavis parte.*

COROLLARIUM II.

893. Ut pondus Q lento gradu descendat, nec motus ejus acceleretur (§. 70); cylindri AB motus esse debet quam tardissimus; consequenter pondus ad movendam Machinam adhiberi nequit, nisi in Machinis compositis, ubi motus in principio tardus, sed per plures Machinæ partes propagatus fit celerior (§. 825).

COROLLARIUM III.

894. Cum adeo pondus in minori a centro distantia applicandum sit, ibi potissimum huic potentiæ est locus, ubi non magna est resistentia.

COROLLARIUM IV.

Tab. VIII. Fig. 93. 895. Quodsi pondus P ex Polyspasto FH suspendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere potest. Dum enim per spatium peripheriæ cylindri descendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum sine Polyspasto nonnisi semel circumageretur. Sed quia funis HI a quarta tantum ponderis Q parte trahitur (§. 833), vel etiam a minore (§. 843); perinde est ac si quarta tantum ejus pars, vel etiam quarta minor, sine Polyspasto ad Machinam agitandam adhiberetur. Utendum igitur est Polyspasto, ubi spatium non satis altum descensui ponderis conceditur. Tab. VIII. Fig. 93.

PROBLEMA CXLV.

896. *Pondere appenso adjuvare potentiam moventem.* Tab. VIII. Fig. 94.

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo E alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodsi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA CXLVI.

897. *Machinam elateris vi movere.* Tab. VIII.

RESOLUTIO.

1. Lamella chalybea AB altero sui extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur, & thecæ cylindricæ, cui altero sui extremo afferruminata, includatur. Fig. 95.
2. Huic affigatur catenula, altero suo extremo axi coniformi GH alligata.

Quoniam enim laminæ vis elastica continuo minuitur, sub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus distantia GL applicanda; sub finem vero, ubi segnius trahit, in majori IK (§. 792); quo obtinetur, ut potentia hæc, in se sat inæquabilis, ad motum tamen regularem qualis est horologiorum portatilium adhiberi possit.

SCHO-

SCHOLION.

898. *Equidem figura fusi* GH *non Conica, sed alia Conoidica esse debebat, & Celeberrimus* DE LA HIRE (*a*) *in ejus constructionem inquirit. Sed cum hypotheses assumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipsemet non diffitetur regulam quam invenit praxi non satis exacte respondere. Caeterum vi elastica animantur quoque automata culinaria.*

DEFINITIO XC.

899. *Rota directa* est quæ ab aqua desuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. *Rota* vero *retrograda* vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM I.

900. Quoniam aqua rarissime ea rapiditate fertur ut rotas molares circumagere possit; ex alto præcipitata impetum acquirat necesse est (§. 79, 543).

COROLLARIUM II.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorsum tendat, quamdiu centro Telluris propius fieri potest; locus, ubi rotæ collocantur, centro Telluris vicinior esse debet quam is unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM III.

902. Et cum aquæ fluentes successive cadant, a latice seu origine earundem nonnisi exigua declivitas, nempe quam sufficere experientia loquitur, ad distantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad summum dimidii, concedenda; reliqua autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM IV.

903. Inquirendum itaque quanto depressior sit locus, ubi rotæ molares constituuntur, quam origo aquarum.

DEFINITIO XCI.

904. *Ars libellandi* est ars determinandi declivitatem aquarum, seu generalius, quanto intervallo punctum aliquod sit Terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta singula a centro Telluris æqualiter distant (§. 207): aquæ libellantur si linea horizontalis in datorum locorum superiore inventa usque ad inferiorem continuetur, & ejus a superficie aquarum distantia utrobique investigetur. Distantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO XCII.

906. *Libella* est instrumentum, quo invenitur linea horizontalis, & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA CXLVII.

907. *Libellam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro semicirculi C suspendatur ponduscülum H. Tab. VIII.
2. Diametro AB infigantur unci E & F. *Fig. 96.*

Quodsi enim funis per uncos E & F ita extendatur, ut filum CD semicirculum appensum bifariam secet; lineam horizontalem apparentem repræsentabit.

(*a*) *Traité de Mécanique*, prop. 72. p. 233. & seqq.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 96. Quia pondusculum H filum CD extendit: erit CD linea directionis ejus (§. 17). Et quia semicirculum bifariam secat *per hyp.* ad AB perpendicularis est (§. 143, 78 *Geom.*). Ergo AB est linea horizontalis apparens (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VIII. Fig. 97. n. 1. 1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ, & inferius in C lamina cochlea E instructa.

2. Laminæ vero huic afferruminentur prisma excavatum FG cum stylo GHIK bifurcato.

3. Inferius afferruminetur annulus cum ansula, ut, si opus fuerit, pondus appendi possit.

n. 2. 4. Paretur denique fulcrum semicirculare aut semi-Ellipticum NO superius in P cochlea PQ instructum, ut instrumentum cruribus IK, in cuspides acutas desinentibus, in punctis S & T insistere queat.

Quodsi enim fulcimentum, mediante cochlea, ad arborem aut baculum erectum firmetur, instrumentum eidem insistens vi gravitatis in eum situm sese disponet, ut regula cum dioptris sit horizonti parallela (§. 215).

Aliter.

Tab. VIII. Fig. 98. RICCIOLUS propria experientia fretus hanc Libellam (*a*) commendat.

1. Super regula AB pedum 12 aut ad summum 20 canaliculo excavato inseratur tubus CABD ex laminis ferreis stanno obductis, vel cupreis paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis. Tab. VIII.

2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ fœminæ; quibus aliæ mares inserantur, ut tubus quam arctissime claudi possit. Fig. 98.

3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.

4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate molestus sit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque Libella moveri & in situ eodem, si necesse sit, immota servari possit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere possit inter transferendum.

Quodsi enim instrumentum aqua repleas, & tubum ita constituas ut aqua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens; cum fluidorum quiescentium partes omnes eandem a centro Telluris distantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent versus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Consultum quoque est, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem; quamvis etiam sine iisdem per utriusque aquæ superficiem collineatio in omni situ tubi fieri possit.

Aliter.

1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excrescere potest, Tab. IX. Fig. 9

(*a*) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 26. §. 8. f. 230.

Tab. IX. Fig. 99. poteſt, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, ſitque tubus in altero extremo L apertus, ſed obturaculo quodam ex ſubere parato & capite orichalceo inſtructo claudendus.

2. Tubus ita paratus firmetur ſuper regulam ST, ad quam etiam
3. Firmentur dioptræ M & N.
4. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.
5. Intra has regulas ſit lamina elaſtica H ex orichalco aut chalybe parata, ut inſtrumentum tanto accuratius ad ſitum horizontalem diſponi poſſit.
6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix ſeu cochlea fœmina, ut Libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari poſſit.

Quodſi tubum vel aqua, vel ſpiritu vini colorato repleas, ita tamen ut paululum aeris remaneat, bullulam in ſuperficie fluidi formaturum; aſcendet bullula in partem ſuperiorem, ſi tubus fuerit inclinatus, ſed datum ſitum e. gr. in F tuebitur, ſi horizontalis fuerit. Levia enim ſurſum aſcendunt, quantum datur.

S C H O L I O N I.

907. *Alia Libellarum genera a Viris celeberrimis* Philippo DE LA HIRE, ROEMERO, HUGENIO, PICARDO *inventa deſcribuntur a modo laudato* PICARDO (*a*). *Adhuc alia dederunt* Viri Cl. COUPLETUS (*b*) *&* HARTSOEKERUS (*c*). *Ego eas deſcripſi, quas mea inſtrumentorum ſuppellex mihi ſuppeditavit. Omnium fere, quæ paſſim proſtant, deſcriptionem dedit* Jacobus LEUPOLDUS (*d*).

S C H O L I O N II.

908. *Prima Libellarum, quam exhibui, non ſatis fida.* RICCIOLUS *enim jam obſervavit, facile aberrari 5 minutis, immo gradu dimidio, niſi ingens fuerit. Sed moles uſum moleſtum reddit. Facile tamen medela paratur, ſi ſcilicet loco ſemicirculi utamur regula* AB *trium pedum cum altera longiore* CD *quatuor pedum ad angulos rectos priori inſiſtente: quæ ſi dioptris inſtruatur & libere ſuſpendatur, fulcro conveniente adhibito, exactiſſimam Libellam conſtituit.* Tab. IX. Fig. 100.

S C H O L I O N III.

909. *Solent quoque a nonnullis in Libellationibus præſertim longioribus dioptrarum loco adhiberi Teleſcopia: ſed multa circumſpectione opus eſt, ut rite ad inſtrumenta applicentur. Enimvero ea de re in* Aſtronomia *ex principiis opticis dicetur.*

P R O B L E M A CXLVIII.

910. *Rectificare Libellam.*

R E S O L U T I O.

Ut certus ſis, Libellam eſſe revera in ſitu horizontali Tab. IX. Fig. 102.

1. Inſtrumento in G collocato, collineatio fiat in C centrum tabulæ in D*d* erectæ.

(*a*) *Traité du Nivellement*, c. 2. p. 37. & ſeqq.

(*b*) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* A. 1699. p. 172.

(*c*) In *Miſcellan. Berolinenſ.* p. 328. & in *Actis Eruditorum* A. 1712. p. 34.

(*d*) In *Theatro Horizontoſtatico ſive libellationis*, quod eſt pars quarta *Theatri Statici univerſalis*.

Tab. IX. Fig. 102. 2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris instrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam eandem.

3. Quodsi idem punctum C sit in linea visuali, Libella convenientem habet situm; sin in puncto altiori aut depressiori desinat, paulisper attollenda vel deprimenda est [quo spectant regulæ cum cochleis in Libellis paulo ante descriptis], donec linea visualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Ponamus instrumentum esse in linea horizontali AC, & visu attingi punctum C. Si situs instrumenti mutetur, ut B in A & A in B constituatur; cum linea horizontalis non sit nisi unica, adhuc linea visualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur. *Quod erat unum.*

Quodsi instrumentum non sit horizonti parallelum, linea visiva in centro ejus G secabit horizontalem AB, eritque HGB = AGF (§. 156 *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum altius D. Quodsi Libella invertatur, ut H in *h* & F in *f* constituatur; erit *h*GA = BG*f* (§. 156 *Geom.*). Est vero *h*GA = HGB, quia instrumentum, situ respectu lineæ horizontalis immutato, inversum. Ergo BG*f* = HGB. Quare cum porro, ob rectam D*d*, in quo sunt puncta D & *d*, ad lineam horizontalem perpendicularem anguli recti ad C æquales sint (§. 145 *Geom.*); erit CD = C*d* (§. 267 *Geom.*), hoc est, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & *d* medium. *Q. e. d.* Tab. IX. Fig. 102.

PROBLEMA CXLIX.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

1. Eo in loco, ubi origo declivitatis statuitur, ope ponderis ex fune suspensi exploretur, quanto intervallo superficies aquæ a ripa absit. Tab. IX. Fig. 101.
2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus statuitur.
3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus, cum tabulis D & C nigro colore tinctis, sed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocunque situ ad baculos firmandis, libella EF collocetur in P.
4. Tabula utraque D & C nunc attollatur, nunc deprimatur, donec per EF collineanti punctum medium, in quo lineæ albæ sese mutuo intersecant, occurrat.
5. Investigentur exactissime altitudines punctorum D & C, nempe AD & BC, atque in schedula notentur.
6. Tum instrumento in Q & baculo ex A in M translato, fiat ut ante collineatio in O & P, notenturque altitudines OB & PM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attigeris.
7. Addantur in unam summam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MP &c. & priori adjiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, posteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.

8. Quod-

Tab. IX. Fig. 101. 8. Quodsi enim aggregatum posterius e priori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A usque ad alterum M fluentium, respectu lineæ horizontalis apparentis.

9. Quare si tractus AM fuerit longus; quod ab ea subtrahendum est, ut habeatur declivitas respectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per Problema *39* (§. 2*16*): aut sine novo calculo in Tabula superius exhibita (§. 217). Sit ex. gr.

altit. ripæ AL	*64*	altit. ripæ MN	58
AD	34''	BC	57''
BO	*68*	PM	102
Summa	1*66*	Summa	217
			1*66*
		declivitas LI	51

Sit LK *9*00 pedum, erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5'0''7'''.

Demonstratio.

Ducantur IN & LK, itemque OQ parallelæ; erit DQ = OC, PN = QI, DL = BC, OB = QL (§. 22*6* *Geom.*). Ergo DA + AL + OB = QL + BC, & PM + MN + BC = QI + BC, consequenter QI + BC − QL − BC = LI *Q. e. d.*

Scholion.

912. *Quoniam in hac operatione facile aberrari potest, consultum est, ut libellatio bis instituatur; nempe primum a termino* A *usque ad terminum* M, *deinde retro a termino* M *usque ad terminum* A.

Definitio XCIII.

913. Sectio fluminis est planum ad angulos rectos secans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem inter se parallelæ.

Corollarium I.

914. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis est ad horizontalem perpendicularis (§. 215), & fundus alvei atque superficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter se parallelæ, *per hypoth.* latera plani secantis erunt ad basin perpendicularia & inter se parallela; consequenter opposita æqualia (§. 22*6*, 238 *Geom.*), adeoque sectio rectangulum est (§. 100 *Geom.*).

Corollarium II.

915. Invenitur adeo, si latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 375 *Geom.*).

Corollarium III.

916. Sunt etiam sectiones diversæ in ratione composita latitudinum, alveorum & profunditatum aquarum (§. 37*6*. *Geom.*).

Scholion I.

917. Cum aquæ fluentes nunc tabescant, nunc intumescant; eo potissimum tempore sectionem fluminis dimetiri debet molendina extructurus, quo mediocrem habet altitudinem.

Scholion II.

918. Quodsi aquæ copia non abundamus; consultum est, ut aqua in stagno colligatur inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam sunt fontes in vicinia siti, & aquæ ex iis in stagnum derivandæ.

Scholion III.

919. Cum ex superioribus constet, in conflictu corporum non modo habendam esse rationem massæ, sed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quiescens impingens movetur (§. 543) *; in Molendinis aquarum vi agitandis consideranda est & sectio earum &* *decli-*

declivitatis in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodsi declivitas fuerit insignis, plurimorum scilicet pedum, e. gr. 10 aut 12, & sectio aquæ exigua, rota construitur directa: ast si declivitas exigua & sectio ingens, rota utendum est retrograda.

PROBLEMA CL.

920. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari possit, aqua per alveum aut canalem ex ligno constructum deducatur ad rotam, & distantiæ 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis segniter fluat.
2. Rota ratione decente constructa sub canali ita constituatur, ut aqua deorsum ruens per planum declive in capsulam ab axe secundam irruat, ipsa vero aquæ effusæ superficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM I.

921. Quodsi a declivitate integra subducatur pars quæ aquæ concedenda, ut intra alveum suum fluere possit & in rotam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effusa defluat; diameter rotæ relinquitur.

COROLLARIUM II.

922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores esse præstat.

PROBLEMA CLI.

923. *Rotam directam construere.*

RESOLUTIO.

Totum artificium huc redit, ut situs palmularum determinetur; id quod sequentem in modum fieri solet.

1. Semidiametro rotæ (quæ est dimidia altitudo ejus) in scala modica sumta describatur circulus AIKA & semidiametro minore, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius. Tab. IX. Fig. 103.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE sit $\frac{1}{3}$ AE.
3. Ex centro per D describatur circulus, in tot partes æquales dividendus quot palmulis instruenda est rota.
4. Applicata regula ad duo divisionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI, &
5. in H excitetur perpendicularis HG.

Recta HI situm palmulæ unius; recta vero HG situm alterius determinat. Et eodem modo situs binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

PROBLEMA CLII.

924. *Aquam ad rotam retrogradam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ne aqua superflua in rotam incidat, & tota ejus declivitas, parte demta quæ ipsi ut fluere possit concedenda, in præcipitium mutari queat; fossa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo distans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumescens ripis fossæ atque molendino facile damnum inferat.

2. Ne

2. Ne autem aqua intumescens agros vicinos inundet, riparum sufficiens esse debet altitudo. Consultum quoque est, ut fundus fossæ arena complanetur.

3. Quo aquæ sufficiens copia in fossam deducatur, per transversum fluminis excitandus est agger, tantæ altitudinis quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu suo retardandam.

4. In fine fossæ trabs horizontaliter sternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen; ejus superficies cum fundo fossæ sit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari possit.

5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transversa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depressa, aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti possit.

6. Ut igitur aqua tabula depressa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorsum fluere possit, & ne aqua intumescens ripas fossæ egrediatur; alicubi fossæ molinariæ a latere jungenda est alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ superfluæ transitum concessura.

Tab. IX. Fig. 104. 7. Alveus denique declivis in fine fossæ excitetur profunditatis AB, quanta est declivitas in præcipitium mutanda, utque in rotam directe impingat aqua, superficies per quam delabitur sternenda est juxta arcum DC ex centro rotæ E, intervallo radio ejus paulo majore, descriptum.

8. Quodsi fossæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transversum fluminis prope rotam construendus, ut aqua in motu retardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM I.

925. Si ea fuerit fossæ latitudo, ut duabus rotis juxta se invicem constituendis locus concedatur; duo quoque construendi sunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere posito, per quem aqua superflua a molendino arcetur.

COROLLARIUM II.

926. Quodsi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel subtriplum &c. rotæ agitandæ sufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ constituuntur, declivitate inter eas divisa; ita tamen ut præcipitium majus sit ante posteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLION I.

927. *Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quorum anteriores altiores, posteriores humiliores, differentia altitudinis primorum & ultimorum existente æquali altitudini, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & sabulo replentur & superius stratum paratur vel ex asseribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum distantiam complanatur, ne aqua vim ipsi inferre possit.*

SCHOLION II.

928. *Rotarum retrogradarum constructio nihil habet difficultatis: palmularum enim situs determinatur per radios ex centro rotæ eductos, sive intra orbes collocentur, sive in fronte constituantur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aquæ sectio.*

Minoris altitudo (quam Germani ein Staber-Rad *appellant) est* 12 *pedum; majoris vero (quæ nobis* ein Panfter-Rad *nuncupatur) ordinarie 16 pedum. In illa distantia palmularum digitorum 12 & 13; in hac 16 vel ad summum 19. Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratorum; in hac pedum quinque. Quodsi palmulæ ad peripheriam rotæ sint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas* Straub-Ræder *dicimus); altitudo rotæ & distantia palmularum variat pro diversa fundi declivitate & sectionis magnitudine.*

PROBLEMA CLIII.

Tab. IX. *Fig.* 105. 929. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi infigantur virgæ AD & CB se mutuo ad angulos rectos in E secantes, quarum longitudo 32 pedum fieri solet.
2. Ad has virgas ex scandulis construantur alæ figuram trapezii parallelarum basium habentes, quarum latitudo HI sit *6* circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad I & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ sunt, ut FG cum axe FL efficiat angulum 54°.
4. Denique, ut alæ vento semper obverti possint, tota machina circa axem NK versatilis esse debet, ut ope vectis PQ huc illucque versari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus construunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato versatile existat. Eum scilicet in finem

1. Turricula annulo ligneo cingitur, & in eo canaliculus effoditur, in cujus fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum segmentum ultra eum promineat. Tab. IX. *Fig.* 106.
2. Intra canaliculum alius annulus reponitur, cui tectum superstructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G, &
4. cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum altera priorem tecto firmius affigit.
5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero sui extremo Axi in Peritrochio aut Suculæ alligandus.

Quodsi enim funis per uncum G ducatur & Sucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, consequenter alæ in plagam ipsi oppositam diriguntur.

SCHOLION I.

930. *Prior modus nostris in oris usitatus, posteriore in Batavia utuntur. Et posterior quidem priori præstat, quia alæ construi possunt majores, consequenter Machinæ a vento agitatæ, ubi major resistentia superanda. Quodsi vero ad hanc vincendam minores sufficiunt, prior ideo antefertur, quia sumtibus longe minoribus exstruitur.*

SCHOLION II.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt* Thomas SAVERY (*a*), AMONTONS (*b*), DIO-

(*a*) In *Transact. Anglican.* n. 252. p. 228.
(*b*) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences,* Anno *1699*, edit. Bat. p. 154.

Dionysius Papinus (*c*), *& deinceps alii* (*d*): *sed valde vereor, ne inventa ipsorum praxi parum respondeant. Hactenus cum successu eadem non usi sunt, nisi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis casibus vis motrix nimis sumtuosa.*

Scholion generale.

932. *Quæ hactenus de potentiarum ad Machinas applicatione diximus, eum unice in finem proposuimus, ut in Machinis inveniendis usui essent; quoniam earum structura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio & plus temporis requirit quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in desideratis habeantur, nec ad scopum nostrum apprime facere videtur. Neque operas manuarias hic exponere visum est, cum eædem ad Mathesin non spectent, sed ab eadem supponantur. Mathesis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ sub mensuram cadunt; manuarias vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a Theoria ad Praxin progressurus earum non sit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in Theoria pro veris habeantur, quæ non succedere in Praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc scopulum impingas, nihil assumendum est tanquam arte parabile, quod arte parari posse non jam ante experientia cognoveris, aut ex iis quæ experientia constant legitima consequentia deduxeris.*

(*c*) In *Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam.*

(*d*) Stephani Switzer *Introduction to a general systeme of Hydrostatiks and Hydrauliks* cap. 28. 29. p. 325. & seqq.

CAPUT XVII.

De Resistentia in Machinis, seu Frictione.

Definitio XCIV.

933. F*Rictio* est resistentia superficiei per quam inceditur.

Scholion.

934. *Ita perspicacissimus* Leibnitius (*a*) *frictionem definit, qui primus hanc materiam distincte evolvit.*

Definitio XCV.

935. *Corpus* dicitur *asperum*, in cujus superficie eminentiæ & cavitates alternantur.

Definitio XCVI.

936. *Superincessus radens* est, si punctum idem superincedentis lineam in superficie describit per quam inceditur.

E. gr. Talis est superincessus parallelepipedi super plano protrusi.

Definitio XCVII.

937. *Superincessus volvens* est, si punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis est rotæ in curru tam respectu axis, quam respectu soli.

Definitio XCVIII.

938. *Motus mixtus* est, si volutioni

(*a*) In *Miscellaneis Berolinens.* p. 307.

ni admiſcetur motus radens elementaris ſeu inſtantaneus.

SCHOLION.

939. *Hunc motum diſtinctius explicat* LEIBNITIUS (*b*); *ſed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA CCIII.

940. *Si ſuperficies per quam inceditur, & ſuperficies corporis quod per illam incedit, fuerint aſperæ; frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in ſuperficie corporis aſperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 935); ſi tam ſuperficies corporis incedentis, quam ea per quam inceditur, aſperæ fuerint; eminentiæ vel ſunt intra cavitates deprimendæ, vel prorſus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri poteſt ſine motu, nec motus produci ſine vi impreſſa. Vis igitur qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte, his effectibus impendenda; adeoque motui corporis reſiſtitur (§. 20); conſequenter frictio oritur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

941. Quo aſperiores itaque ſunt ſuperficies, eo reſiſtentia major.

SCHOLION I.

942. *Aſperitas æſtimanda eſt non modo ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque poteſt, ut eminentiæ aliæ minori vi abradantur, vel deprimantur; aliæ autem nonniſi majori vincantur.*

(*b*) In *Miſcellan. Berolinenſ.* p. 312, 313.

COROLLARIUM II.

943. Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.

SCHOLION II.

944. *Id ipſum Experientia clariſſime loquitur.*

COROLLARIUM III.

945. Superficies adeo partium in Machinis, quæ ſe mutuo tangunt, quantum fieri poteſt, poliri debent.

COROLLARIUM IV.

946. Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri poteſt, ut omnis aſperitas tollatur, microſcopiis teſtibus, conſultum eſt [quod & dudum in praxi receptum] ut partes ſe mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA CCIV.

947. *Dum pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus ad ſuperficiem per quam inceditur apprimit, frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis ſuperficiem ejus apprimit ad ſuperficiem per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius deſcendunt, adeoque majori vi inde rurſus attolluntur (§. 265), vel etiam deprimuntur, aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obſtacula vincenda, quam ſi non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appreſſio ex pondere ſuperincedentis augeat reſiſtentiam ſuperficiei,

ficiei, per quam inceditur (§. 20), hoc est, frictio augetur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

948. Crescente adeo pondere corporis incedentis aut insistentis, frictio crescit.

SCHOLION.

949. *Hinc Libra exiguis ponderibus onusta exigua vi ab æquilibrio dimovetur; pluribus autem onusta, majori vix dimovetur.*

THEOREMA CCV.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam incedit fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam inceditur obliqua; vis qua movetur versus superficiem per quam inceditur nititur; adeoque perinde est, ac si superficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appressio ex pondere incedentis frictionem intendit (§. 947). Ergo eadem intenditur, si linea directionis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

951. Quoniam ictus perpendicularis est ad obliquum; ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (*§.* 552): sinus autem anguli majoris major est, minoris contra minor (*§.* 2 *Trigon.*); nisus corporis superincedentis in superficiem per quam inceditur; consequenter frictio major est, quo propius ad perpendiculum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLION.

952. *Hæc denuo Experientiæ valde consona sunt & præcipue in dentibus rotarum observantur, ut sæpissime hac de causa prorsus frangantur.*

COROLLARIUM II.

953. Tollitur adeo hæc frictio, si linea directionis corporis incedentis fuerit parallela superficiei per quam inceditur: tum enim nisus superincedentis in eam nullus est.

THEOREMA CCVI.

954. *Si superincessus volvens, longe minor est frictio, quam si radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata AB, & super ea incedat rota DE cujus dentes sint ad peripheriam normales. Quodsi superincessus fuerit radens; dens F qui regulam tangit lineam rectam in superficie regulæ describere debet (§. 936). Cum adeo ipsi resistat dens regulæ H, progredi omnino nequit, nisi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorsus abradatur. Idem ergo cum contingat, si corporis cujuscunque alterius asperi super superficie aspera incedentis superincessus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab asperitate superficiei oriri potest. Enimvero si rota ED super regula provolvatur; tum dens regulæ H incessui ejus non amplius resistit, nisi quatenus ex cavitate F supra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, si corpus quodcunque asperum super aspera superficie volvitur; frictio minor est si superincessus volvens, quam si radens extiterit. *Q. e. d.*

Tab. IX. *Fig.* 107.

COROLLARIUM I.

955. Ne igitur in Machinis frictio magnam vis motricis partem absumat; cum cura dispiciendum est, ut, quantum fieri potest, nulla pars Machinæ alteram radat, quin potius una super altera volvatur.

COROLLARIUM II.

Tab. IX. Fig. 108. 956. Hinc consultum est, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri solet) matrici concavæ, sed rotulis A, B, C, D circa axiculos versatilibus imponantur.

SCHOLION I.

957. *Suasit hoc dudum* Paulus CASATUS (a), *& Experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodsi metuas, ne axiculus cylindri satis tuto duobus rotulis* A *&* B *incumbat, tertiam addere licet.*

SCHOLION II.

958. *Hinc etiam, si Trochlea circa centrum mobilis; tractioni minus resistitur quam si eadem fixa foret. Eadem est ratio, cur rotæ Curruum circa axem versatiles sint.*

SCHOLION III.

959. *Patet quoque ratio, cur Trabæ difficillime trahantur in plateis lapidibus stratis; facillime autem, si nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.*

SCHOLION IV.

960. *Ex eodem fonte* Olaus ROEMERUS, *cum Parisiis commoraretur, quamvis non sine subsidio Geometriæ sublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem esse debere: id quod post eum quoque ostendit* Philippus DE LA HIRE (b)*; sed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non est.*

(a) *Mechanicorum* Lib. 2. c. 1. p. 130.
(b) *Mémoires de Mathématique & de Physique*, p. 51. & seqq.

COROLLARIUM III.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum versatiles volvuntur, dum in superficie corporis alterius incedunt; earum ope superincessus radens in volventem transmutari potest, quotiescunque datur.

SCHOLION V.

962. *Ita in Machinis, quæ serrarum reciprocatione ligna secant, rectanguli lignei, cui serræ inseruntur, latera istiusmodi rotulis instrui deberent. Minuta enim frictione, plures serræ una secare possent. Similiter brachia pistillorum attollendorum* CD *rotulis instruere juvat, ut super pinnulis curvis* EF *axis* E *sine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam assignat Cl.* DE LA HIRE (c). Tab. V. Fig. 109.

COROLLARIUM IV.

963. Et quia axes curvati superincessum plane tollunt (§. 884); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur. Tab. VII. Fig. 85. 8.

SCHOLION VI.

964. *Equidem nec hic cessat frictio in* E *&* G. *Enimvero ea perexigua est, si comparetur cum frictione, quæ ex superincessu rotarum oriri solet.*

SCHOLION VII.

965. *Equidem* AMONTONS *regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam requisitam* (d)*: sed cum omnem frictionem a sola appressione ex pondere superincedentis derivet; ex antecedentibus satis apparet, quod proposito satisfacere nequeat.*

CAPUT

(c) Loc. cit. p. 72. & seqq.
(d) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* A. 1699. p. 260. & seqq. edit. Bat.

CAPUT XVIII.

De Machinis Compositis.

DEFINITIO XCIX.

966. Machina *composita* est, quæ ex pluribus simplicibus tanquam partibus constat.

SCHOLION.

967. *Machinarum compositarum nullus est numerus. Construuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in usum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a Machinis perfici possunt, ad quæ idem semper motus, vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua saxi molaris opus est: unde hæc opera Machinis demandatur. Similiter ad contusionem granorum ex quibus oleum exprimitur, pistillorum elevatione continuo iteranda opus est: hinc a Machinis contusio ista perficitur. Ut arbor prostrata in asseres dissecetur, continua serrarum reciprocatione opus est. Quare denuo Machinarum vires ad hunc usum transferuntur. Nostrum equidem non est, Theatrum quoddam Machinarum in præsenti aperire; sed ut compositionis earundem quandam ideam animo comprehendant Tyrones, unum saltem alterumque exemplum in medium afferemus; additis regulis quibusdam generalibus, quibus de Machinis inveniendis solliciti juvantur.*

PROBLEMA CLIV.

968. *Dato opere perficiendo, Machinam componere.*

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus est, ut operis perficiendi notionem distinctam, &, quantum licet, adæquatam habeamus: ad quam quomodo perveniatur, ex Commentatione de Methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi distinctius explicavi (*a*). Scilicet singula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione distingui possunt, tum sigillatim expendenda, tum inter se conferenda.
2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus sit ad id præstandum, quod requiritur: qui est effectus a Machina producendus.
3. Ex eadem quoque constabit quantitas virium ad resistentiam in motu superandam requisitarum: ubi
4. Inprimis consideranda est frictio ex superincessu mobilis oriunda, & de remediis mechanicis Capite superiori expositis deliberandum.
5. Antequam vero consilium ineatur, quibusnam Machinis simplicibus combinatis motus desideratus produci queat; de potentia Machinam agitatura cogitandum est, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque Machinæ structura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad Machinam applicanda: externa ejus structura statim constabit ex Capite decimo quarto.
6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expensa, vi Capitis undecimi non difficulter determinantur

(*a*) In *Philos. ration.* seu *Logica* §. 678.

tur Machinæ ſimplices in compoſita combinandæ.

Tab. X. *Fig.* 110. E. gr. Sit conſtruenda Machina, qua onus ingens O in altum attolli poſſit, & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum ſit corpus grave; ſtatim apparet lineam directionis eſſe ad horizontem perpendicularem. Talis ergo conſtruenda eſt Machina, quæ pondus ſurſum trahat ſecundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, ſed ſaltem ingens ſupponitur; Machinam conſtruere ſufficit, qua homo pondus aliquod viribus ſuis longe ſuperius elevare poſſit, tempore tamen non nimis longo. Et quia Machina compendioſa eſſe debet, ut commode huc illucque transferri poſſit; moveri optime poterit verſando, adeoque axe incurvato ABC inſtruenda (§. 875). Enimvero ut pondus ingens moveri poſſit, axis curvatus ſolus non ſufficit, ſed cum rota dentata GF axi horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus ſurſum trahens circa cylindrum inferiore loco conſtitutum circumvolvi queat, ſupra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Conſtat ergo Machina ex axe GH cum rota ſtellata GF, & axe dentato LC, atque incurvato CBA duabuſque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, ſed ſola rota FG & axis incurvatus CBA. Eſt nimirum ſepoſita frictione potentia ſuſtentans ad pondus, in ratione compoſita radii axis dentati LC ad BC, & radii axis GH ad ſemidiametrum rotæ F (§. 812).

PROBLEMA CLV.

969. *Machinam conſtruere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

Tab. X. *Fig.* 111. *n.* 1. 1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D infigatur uncus, cui onus attollendum G alligari poſſit.

2. Alteri vectis extremo B affigatur annulus E, qui cochleæ fœminæ F ſeu matrici afferruminetur. Tab. X. Fig. 111. n. 1.

3. Matrici inſeratur cochlea HI, quæ Ergatæ IL circa axem ſuum in L mobili firmiter inſiſtat.

Quodſi enim mediantibus ſcytalis M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF deſcendit & vectem AB deprimit, conſequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli poſſit, patet ex Theor. 178 (§. 765) & Theor. 198 (§. 847). Eſt nimirum potentia ad pondus in ratione compoſita AC ad CB, ſi AB fuerit horizontalis, & diſtantiæ duarum helicum in cochlea ad peripheriam ſcytala deſcriptam. Sit ex. gr. diſtantia helicum 3‴, longitudo ſcytalæ 3′, erit peripheria, quæ eadem deſcribitur 942‴, adeoque potentia in N eſt ad reſiſtentiam in E ut 3 ad 942, hoc eſt, ut 1 ad 314. Sit jam AC : CB = 1 : 3; erit ergo reſiſtentia in E $\frac{1}{3}$ ponderis G, conſequenter potentia ad ſcytalam N applicata $\frac{1}{942}$ ponderis. Quodſi ſingulis ſcytalis ſingulæ potentiæ applicentur; erit una earumdem $\frac{1}{3768}$ ponderis.

COROLLARIUM.

970. Si cochlea cum Ergata remota funis ET alligetur in B, pondus G ſimiliter cum virium compendio, attolletur, quamvis multo minore (§. 765).

SCHOLION.

971. *Machina poſteriore utuntur ad onera ex Navi una in alteram contiguam tranſponenda.*

PROBLE-

PROBLEMA CLVI.

972. *Molam acuminariam construere, hoc est, Machinam qua instrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 111. 1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F instructo insigantur ad acuendum.

2. Axi alteri EG insigantur duo orbes lignei H & I, super quorum primo H arena politura inchoatur, super altero vero I smyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio superinducti, super quibus smyridis pulvere subtiliori politura perficitur.

3. Utrique axi DC & GE insigatur etiam rotula M in peripheria crena instructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere possit.

4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota stellata N, quæ communem cum rota molari PQ, ex. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverso aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus instruitur, ut motus cotium sit satis celer.

5. Denique cum cotes continuo madidæ esse debeant; ad rotam molarem applicanda sunt duo haustra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in cotes delabentem.

SCHOLION.

973. *Solent quoque molæ unice ad poliendum construi, tumque orbes axi* GE *infixi aptantur ad primarium* DC, *ipsi vero* GE, *alii minores inseruntur.*

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas sufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris insigere licet.

PROBLEMA CLVII.

975. *Molam frumentariam ab aqua agitandam construere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur rota molaris sive directa, sive retrograda, prout casus tulerit, nunc major, nunc minor, prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit ex. gr. rota retrograda AB 18 pedum, eaque 33 palmulis instructa. Tab. X. Fig. 112.

2. Ejusdem axi insigatur rota DE, cujus diameter illius subdupla, vel etiam major, pro diversa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in nostro casu numero 48, in plano gerat.

3. Per curriculum FI, 6, 7, 8, immo 9 bacillis instruendum, pro diversa celeritate, qua rota molaris movetur, virga transeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura sua referenti incumbat *meta* (seu lapis molaris superior), *catinum* (seu lapidem inferiorem) fixum 4 fere digitis circumcirca superans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli possit.

4. Ex scala suspendatur infundibulum *pq*, mediante Axe in Peritrochio *st*, pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

Tab.X. Fig. 112. 5. Bacillus propendeat in foramen metæ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere insistat capsa H pyramidem truncatam referens & tam superius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.

7. Lapides cingantur cista cylindrica, spatio inter eam & metam nonnisi duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in facculum tremulum ex peculiari linteo (nostrates *Beuteltuch* appellant) confectum devolvatur, & farina furfure separetur.

9. Sacci, cujus latera loris assuta, extremis vero P & Q annuli ferrei insuti sunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ assuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui infigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *hf* alteri *ik*, cylindrulo *lm* circa axem suum versatili infixæ, in *i* incumbens.

11. Curriculo FI sub angulo obliquo infigantur tres bacilli æqualiter a se invicem distantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *hf* protrudunt & sic saccum attollunt, mox iterum relapsurum, regula *ik* in situm pristinum recidente.

12. Quodsi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere possit; axi rotæ molaris infigitur rota stellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit, quarum saltem unam ab uno latere in schemate exprimere libuit: reliqua omnia sunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB sit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem stricte inhærendum non sit, si aliæ circumstantiæ aliam suadeant. Tab. XI. Fig. 113.

SCHOLION I.

976. *Rotarum dimensiones dentiumque numeri variant, pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, quæ partim ab ejus sectione, partim a declivitate per quam ad illam delabitur, pendet. Constat vero ex superioribus (§. 792), rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis; minores vero, ubi hæc major.* BOECKLERUS (*a*) *diametrum rotæ vel solo impetu fluminis sine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declive delapsa agitandæ fieri præcipit* 48 *pedum, numerum palmularum* 86; *diametrum rotæ stellatæ* LM 18 *pedum, numerum dentium* 180, *numerum bacillorum in rota* DE 60. CASATUS (*b*) *annotat in Pado communiter longitudinem rotæ molaris* AB *esse cubitorum* 10, *diametrum totam cubitorum* 6, *inferiorem rotam* DE *diametrum habere cubitorum* $5\frac{1}{2}$, *dentes* 108 *plano infixos, & curriculum* FI *in fusos* 9 *distingui; lapidem molarem in crassitudine numerare uncias* 6 *aut* 7, *in diametro cubitos* $2\frac{1}{2}$. Franciscus Philippus FLORINUS (*c*) *rotæ retro-* Tab. XI. Fig. 113.

(*a*) *In der Haus- und Feld-Schule* part. 3. Class. 6. p. 500. & 501.
(*b*) *Mechan.* lib. 5. c. 7. p. 560.
(*c*) *Im klugen Haus-Vater* lib. 2. c. 42. f. 308. & seq.

Tab. XI. Fig. 113. *retrogradæ ab aqua rivuli* 4 *vel* 5 *pedum declivitatis agitandæ diametrum constituit* 18 *pedum, numerum palmularum* 30 *vel* 36, *latitudinem palmularum* 10 *vel* 14 *digitorum, altitudinem unius pedis. Rotæ dentatæ* DE *dentes assignat* 72, *curriculo bacillos* 6, 8 *vel* 9, *prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum alluente, rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit* 16 *pedes.*

COROLLARIUM.

977. Quodsi situs rotæ verticalis LM mutetur in horizontalem & dentes in plano infigantur; rotæ vero molari substituatur vectis veluti in Ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante: Molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco superiore deambulantibus commode agitandum. Est vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in posteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLION II.

978. *Multis adhuc modis aliis molæ manuariæ construi possunt. Eminet vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri potest, superincessu rotarum penitus sublato: Id igitur ut describatur, e re nostra judicamus.*

PROBLEMA CLVIII.

979. *Molam manuariam construere.*

RESOLUTIO.

Tab. XI. Fig. 114. 1. Construantur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6 pedum, & inferior ad conservandum impetum plumbo infuso oneretur.

2. Per centrum utriusque desigatur axis incurvatus HG per vectes IK & IL convertendus, ut supra docuimus (§. 884). Tab. XI.

3. In rotæ superioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis ceratus commode circumduci queat: qui idem Fig. 114.

4. circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixi virgæ ferreæ PQ, cui eidem

5. infigatur crux ex brachiis ferreis constans RSTV, quibus singulis affixum est pondus plumbeum, ad impetum conservandum.

6. Reliqua fiant, ut in Problemate præcedente (§. 975).

SCHOLION.

980. *Axiculi rotarum ferrei sustentaculo orichalceo incumbere debent, quod & affrictum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem Molarum genere, sustentaculum virgæ ferreæ cui lapis molaris incumbit ita construendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi possit, prout usus postulaverit. Major enim lapidum distantia requiritur, si grana integra conterenda, quam si jam contrita in farinam convertenda.*

PROBLEMA CLIX.

981. *Molam jumentariam construere.* Tab. VII. Fig. 82.

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN, cujus diameter 14 digitorum, cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando. Immo temo geminari potest.

2. Circa eundem cylindrum construatur rota stellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transversis (quale IL) quorum latitudo 7, crassities 2 digitorum, connectenda, & adhuc

Tab. VII. Fig. 82. huc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & crassities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe sicco parati ita infigendi, ut axes eorundem distent $4\frac{1}{2}$ digitis.
4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fusorum seu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.
5. Reliqua fiant ut in Probl. 157 (§. 975).

Aliter.

Tab. XI. Fig. 113. Quodsi rota adeo ingens non commoda visa fuerit, construere licet minorem, cujus diameter nonnisi 7 pedum, $1\frac{1}{7}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut superius (§. 975) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{3}$ digitorum, numerus bacillorum 16. Cum eadem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens, & curriculum FE 6 fusis instructum circumagens. In rota priore crassities dentis 2, in posteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

PROBLEMA CLX.

982. *Molam allatam construere.*

RESOLUTIO.

Structuram externam docuimus supra (§. 929). Interna constat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis quæ ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota dentata est 72, vel 80; numerus fusorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala est pedum 30 vel 32.

PROBLEMA CLXI.

983. *Molam oleariam construere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita construenda, ut tum materiam contundere, tum ex contusa atque tosta oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præstetur, Tab. XI. Fig. 115.

1. Axi rotæ molaris infigatur rota stellata AB, quæ circumagat
2. rotam radiatam AE axi EF insertam, cui hinc inde pinnulæ G infiguntur pistilla HI attollentes.
3. Pistillorum bases, itemque fundi vasorum K in trunco LM excavatorum, lamina ferrea obducantur, ut semina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, pistillis proprio pondere relabentibus.
4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum basis inferior sit perforata, ut oleum expressum inde in vasa subjecta distillare possit. Intra ea reponitur materia contusa & in aheno super igne tosta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemisphærium cavum, in altera convexum, comprehensa. A parte postica intruditur cuneus acie sua prominens in H & ab antica infigitur alius N.
5. Ut cuneus alter N vi adigi, sicque oleum exprimi possit, malleus P cum vecte PQ cylindro RS circa axem suum mobili affigatur, mediante ligno transverso TV ad cuneum dirigendus.

6. Ad

Tab. XI. Fig. 115. 6. Ad eundem cylindrum RS, in opposito latere, aptetur forceps *a b*, intra quem continetur contus *b d* cum pinnula *e f*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum P attollit, proprio pondere cum impetu in cuneum N mox relabentem.

Corollarium I.

984. Quoniam rota radiata AE cum ſtellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; ſi aquæ ſufficiens copia atque declivitas, vel numerus piſtillorum exiguus fuerit: ipſi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi poteſt. Et tales ſunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum piſtillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

Corollarium II.

985. Si vis aquæ ſufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis ſuis piſtilla elevantes a rota ſtellata circumagi ſolent.

Corollarium III.

986. Et quia perinde eſt, quæcunque materia contundatur; eadem manet ſtructura ſi mola conſtruatur, ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint ex. gr. piſtilla 16 in duas ſeries diſtributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum 48, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius; diameter rotæ AB 7′ 3″, numerus dentium 60; longitudo cylindri EF 15′ 10″, diameter 14″; diameter rotæ radiatæ 3′ 2″, numerus fuſorum 24; integra piſtilli altitudo 9′ 2″, craſſities & latitudo 4″. Sed ſi rota externa calcando movetur (§. 886), diameter ejus eſſe poteſt 16 pedum, rotæ ſtellatæ AB 5 ½, numerus dentium 60, numerus fuſorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus piſtillorum 9.

Scholion I.

987. *Structura molarum chartariarum eadem eſt, quam in Corollario primo* (§. 984) *expoſuimus, niſi quod tudiculæ* AB, *ferro obductæ in B, vecti homodromo* DC *circa baculum* EF *mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rotæ molaris infixis in* C *impellendo, & per canalem, vel ope antliæ, vel ope hauſtrorum ad rotam molarem applicatorum, aqua continuo in linamenta contundenda deduci debeat.* Tab. XI. Fig. 116.

Scholion II.

988. *Cum ſtructura molæ oleariæ prorſus convenit ſtructura trituratoriæ, quæ anno* 1700. Erzæ *in ditione Electorali Brunſwicenſi inventa & cum inſigni fructu ad frumenta ſtraminibus ejicienda adhibetur, niſi quod peculiari artificio opus ſit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Deſcribitur in* Miſcellaneis Berolinenſibus (*a*).

Problema CLXII.

989. *Machinam conſtruere, quæ materiam pulveris pyrii ſine piſtillis conterat.*

Resolutio.

1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem Tab. XI. Fig. 117.
2. aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti, aut (quod melius judicatur) marmorei DE quorum diameter 6, 7, vel 8 pedum, craſſities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacto, vel in vaſe cylindrico orichalceo, ſi plumbei fuerint, vel ſuper ſaxo marmoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, ſi marmorei fuerint, incedant.

(*a*) pag. 315.

SCHOLION I.

990. *Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina construitur, quia ex hac materia per frictionem nullæ scintillulæ eliciuntur, unde non sine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere solet.*

SCHOLION II.

991. *Cæterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.*

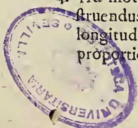
PROBLEMA CLXIII.

992. *Molam serrariam construere.*

RESOLUTIO.

Tab. XII. Fig. 118. In molis serrariis duplex motus considerandus, quorum altero serra reciprocatur, altero vero lignum ad serram continuo promovetur. Ad motum serrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota stellata AB, cujus diameter sine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. incedat super rota radiata CD 12 vel 8 (pro diversa vi aquarum) bacillis instructa, & communem axem habente cum rota verticulari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.
3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum serra HL, intra duas pilas ita constricta, ut nonnisi sursum protrudi ac deorsum trahi possit.
4. Ad motum ligni efficiendum construendus est currus *a b c d*, cujus longitudo longitudini ligni secandi proportionata, e. gr. 18 pedibus major, latus vero alterum dentibus instructum. Tab. XII. Fig. 118.
5. Ut ergo lignum, uncis ferreis ad currum firmatum, ad serram continuo promoveatur, axi *g h* infigatur baculus *i k*, cujus alterum extremum *k* inditum est annulo ad tendiculam IK firmato, & prope alterum extremum forceps *m* contineat furcam *m l* usque ad dentes rotæ serratæ *l n* extensam, cujus diameter duorum pedum.
6. Porro axi rotæ serratæ, ferreæ infigenda est alia radiata *p q* 6 bacillis instructa, qua circumagitur rota stellata *r s*, dentes 36 & axem communem cum alia radiata *t v* habens, quæ 6 bacillis instructa currum propellit.



SCHOLION.

993. *Dantur & adhuc alii modi Currum propellendi, quos repræsentat* BOEKLERUS (*a*). *Nos eum descripsimus, quo ordinarie utuntur. Cæterum idem* BOEKLERUS (*b*) *molam serrariam manuariam accurate delineat.*

PROBLEMA CLXIV.

994. *Horologium oscillatorium* Hugenianum *construere.* Tab. XII. Fig. 119.

RESOLUTIO.

1. Fiant laminæ AA & BB semipedali longitudine, pollices duos & semis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inserantur.
2. Rota infima CC 80 dentibus incidatur in convexo, & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD, ex quo pondera suspendantur.

3. Rota

(*a*) In *Theatro Machinarum* f. 60. & seqq.
(*b*) *In der Haus- und Feld-Schule* Tom. I. class. 6. p. 512. & 513.

Tab. XII. *Fig.* 119. 3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo, & una rotam stellatam F dentium 48.

4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8, & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.

5. Hæc agitet tympanum I dentium 24, & rotam serratam K dentium 15.

Tab. XII. *Fig.* 120. 6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima sui parte reflexa, ac foramine oblongo penduli intra duas laminas Cycloidicas duplici filo suspensi virgam ferream, cum appenso pondere plumbeo X, complexa.

Tab. XII. *Fig.* 119. 7. A lamina AA quarta digiti parte distet alia YY, in qua describantur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas, exterior in 60 scrupula prima dividatur.

8. Axi rotæ C aptetur rota *bb* tubulo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, sine eodem tamen converti possit, ubi e re fuerit.

9. In tubuli prædicti extremo *e* applicetur Index horæ spatio circuitum absoluturus, atque ita minuta horaria indicaturus.

10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum sex dentium *d*: quod tandem

11. Convertat rotam dentium 72 Indicem horarium minutario breviorem circumferentem.

12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll*, & in eo circulus in 60 partes æquales divisus describatur, qui per incisum in lamina YY foramen minuta secunda monstret.

13. Longitudinem penduli, ut jam supra notatum est, Hugenius (*a*) inventor experimentis factis deprehendit esse partium trium, quarum una est ad pedem Parisinum ut 864 ad 881 (§. 470). Tab. XII. *Fig.* 119.

14. Pondus perpendiculi X trilibre esse debet; & ne occursu aëris motus impediatur, optima ejus forma est lenticularis. Ponderis *b*, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri nequit, sed per experientiam determinanda. Hugenius pondere 6 librarum usus est, diametro orbiculi D unius digiti existente, longitudine autem penduli ea, quam diximus. Tab. XII. *Fig.* 120.

15. Ceterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus sursum trahitur, peculiari hoc artificio suspendendum, quod a laudato Hugenio repertum. Funis scilicet in se rediens orbiculum D amplectatur, & inde descendens altera sui parte trochleam *c* subeat, cui pondus *b* appensum. Hinc super orbiculum D extrinsecus horologio affixum ascendit, iterumque ad trochleam alteram F descendit, cui pondus G appensum majus *b* retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto descendat. Hic autem serratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat.

Scholion.

995. *Horologia hæc oscillatoria* Hugeniana *adeo accurate construi possunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus*

(*a*) In Horologio oscillatorio f. 7.

motus Solis diurnus inæqualis, ceu in Chronologicis *ostendetur. Unde in Astronomia, ubi accurata temporis mensura requiritur, ingens eorum est usus. Sane Vir* Cl. Philippus DE LA HIRE *(a) testatur, se sæpius expertum esse, quod intra octiduum a medio Solis motu vel minuto secundo non aberrent.*

SCHOLION II.

996. Cum pleræque Machinæ ex ligno construi soleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum constructionem edocere.

PROBLEMA CLXV.

Tab. XII. Fig. 121. n. 1. 2. 3. *997. Rotas dentatas & radiatas ligneas construere.*

RESOLUTIO.

1. Orbes rotarum, quibus dentes infiguntur, ex diversis partibus componuntur. Si dentes in plano infiguntur, aliæ partes sunt segmenta circuli A, aliæ segmenta annulorum circularium B. Posteriores ita superimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B, & contra juncturæ C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transversis FF firmantur. Quodsi dentes in convexo infigendi, partes in utroque plano sunt segmenta annularia B.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum existunt, in tot partes æquales divisa, quot dentes rota habere debet; intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, quales 7 tribuuntur denti, 9 vero interstitio inter binos relinquuntur, quarum 8 cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes æquales, quarum 3 spissitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ spissitudini seu diametro bacilli tribuuntur. Tab. XII. Fig. 121. n. 3.

3. Idem intervallum dividitur in 3 partes æquales, & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{3}{4}$ faciunt.

4. Anguli dentium secundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati resecantur, ut superincessus super bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes infiguntur, esse debent quadrata, & axiculi ferrei in centris rotarum exacte constituendi, eo meliores quo minores, quia minorum minor est frictio: eadem de causa imponendi concavo orichalceo, aut saltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, nisi bacilli exiguæ fuerint longitudinis, & si numerus bacillorum exiguus & resistentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri consuevit.

SCHOLION I.

998. Distantia dentium in rotis, quarum usus in Molendinis est, intra spatium 4 & 5 digitorum fere continetur.

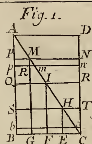
SCHOLION II.

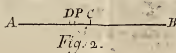
999. Rotæ horologiorum metallicæ accuratam imprimis exigunt divisionem; ad quam absolvendam peculiaribus instrumentis opus est a LEUPOLDO *(b) descriptis.*

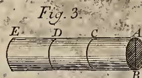
(a) In Epistola *Tabulis Astronomicis* præmissa.

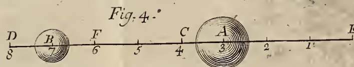
(b) In *Theatro Machinarum generali* c. 5. §. 93. 94.

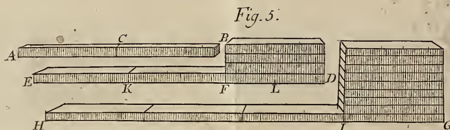
FINIS MECHANICÆ.

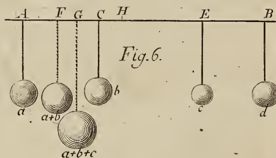

Fig. 1.
A
D
P
M
N
p
n
R
m
Q
I
R
S
H
T
b
B
G
F
E
C

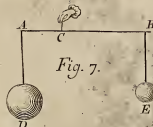

A
DP C
B
Fig. 2.

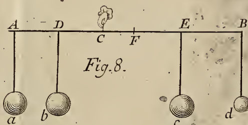

Fig. 3.
E
D
C
A
B

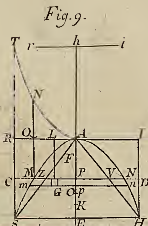

Fig. 4.
D
B
F
C
A
E
8
7
6
5
4
3
2
1

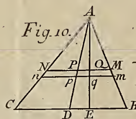

Fig. 5.
A
C
B
E
K
F
L
D
H
I
G

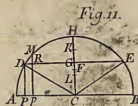

A
F
G
C
H
E
B
Fig. 6.
a
a+b
b
c
d
a+b+c

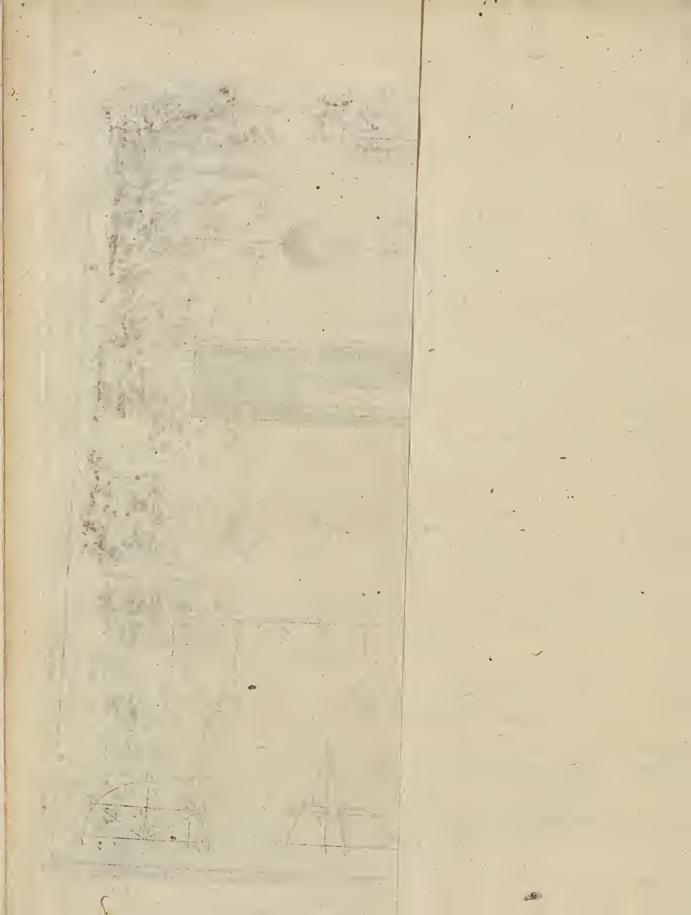

A
C
B
Fig. 7.
D
E

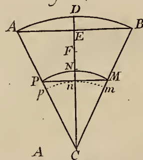

A
D
C
F
E
B
Fig. 8.
a
b
c
d

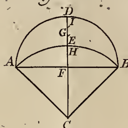

Fig. 9.
T
r
h
i
N
R
O
L
A
I
F
C
M
Z
P
V
N
m
n
D
G
O
p
K
S
E
H

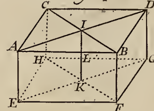

A
Fig. 10.
N
P
Q
M
n
p
q
m
C
D
E
B

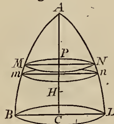

Fig. 11.
H
M
K
D
R
G
F
E
L
A
P
p
C
B

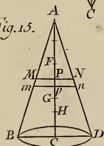


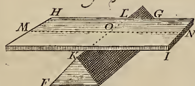

Fig. 12.
D
A
B
E
F
N
P
M
p
n
m
C

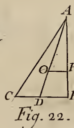

Fig. 13.
D
I
G
E
H
A
B
F
C

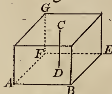

Fig. 14.
C
D
I
A
B
H
L
G
K
E
F

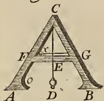

Fig. 16.
A
P
M
N
m
n
H
B
C
D

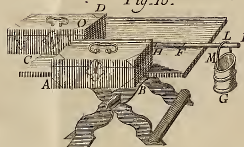

Fig. 15.
A
F
M
P
N
m
p
n
G
H
B
C
D

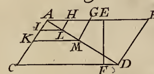

Fig. 17.
H
L
G
M
O
N
K
I
F

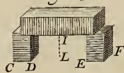

A
O
P
C
D
B
Fig. 22.

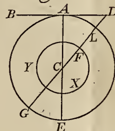

Fig. 25.
G
C
F
E
D
A
B

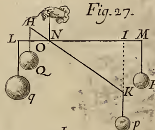

Fig. 23.
C
F
x
G
E
o
A
D
B

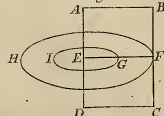

Fig. 18.
D
O
L
I
C
H
F
M
A
B
G

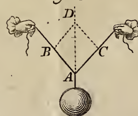

Fig. 19.
A
H
GE
B
I
K
L
M
C
F
D


Fig. 24.
I
L
C
D
E
F

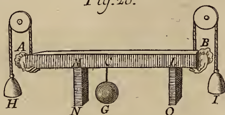

Fig. 20.
B
A
D
L
F
Y
C
X
G
E

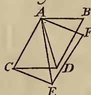

Fig. 27.
H
N
I
M
L
O
Q
P
K
q
p

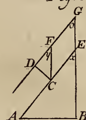

Fig. 21.
A
B
H
I
E
G
F
D
C

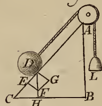

Fig. 29.
D
B
C
A

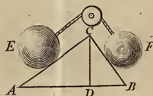

L
Fig. 26.
C
I
M

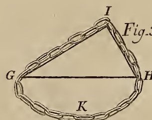

Fig. 28.
A
B
H
N
G
O
I

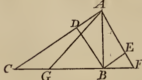

Fig. 30.
A
B
F
C
D
E

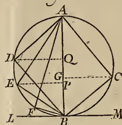

Fig. 32.
G
F
E
D
C
A
B

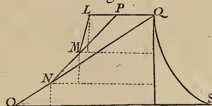

Fig. 31.
A
D
L
E
G
F
C
H
B

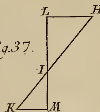

Fig. 33.
E
C
F
A
D
B

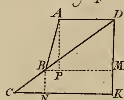

I
Fig. 34.
G
H
K

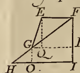

Fig. 35.
A
D
E
C
G
B
F

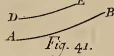

Fig. 36.
A
D
Q
G
C
E
P
L
F
B
M

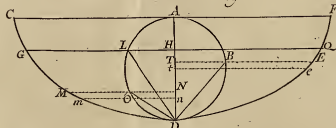

Fig. 38.
L
P
Q
M
N
O
R
S

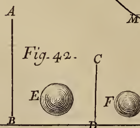

L
H
Fig. 37.
I
K
M

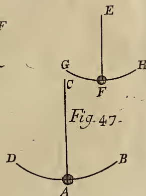

Fig. 40.
A
D
B
M
P
C
N
K

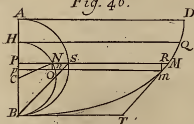

Fig. 40.
E
F
G
L
Q
H
O
I

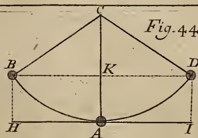

D
E
B
A
Fig. 41.

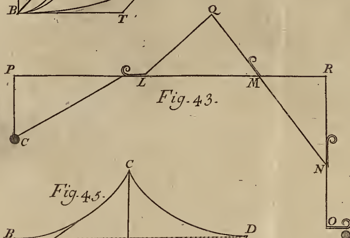

Fig. 39.
C
A
F
G
L
H
Q
T
B
E
t
e
N
M
O
n
m
D

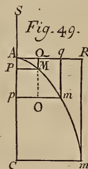

A
Fig. 42.
C
E
F
B
D

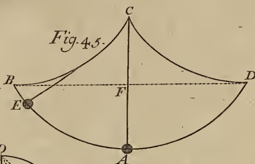

E
G
H
F
C
Fig. 47.
D
B
A

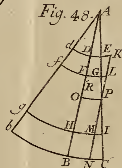

Fig. 46.
A
D
H
Q
P
N
S.
R
M
p
n
C
O
m
B
T

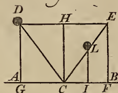

C
Fig. 44.
B
K
D
H
A
I

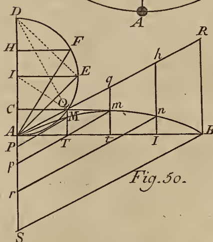

Q
P
L
M
R
Fig. 43.
C
N
O

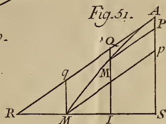

S
Fig. 49.
A
Q
q
R
P
M
p
m
O
C
m

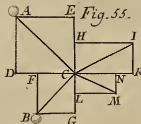

C
Fig. 45.
B
D
F
E
A


Fig. 48.
A
d
D
E
K
f
F
G
L
R
O
P
g
b
H
M
I
B
N
C


Fig. 52.
D
H
E
L
A
B
G
C
I
F


D
H
F
R
h
I
E
q
C
Q
m
n
M
A
B
P
T
t
I
p
Fig. 50.
r
S


Fig. 51.
A
P
Q
p
q
M
R
M
I
S


A
E
Fig. 55.
H
I
D
C
K
F
N
L
M
B
G

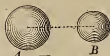

A
B
Fig. 53.


Fig. 54.
E
D
C
B
A

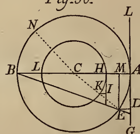


Fig. 56.



Fig. 57.

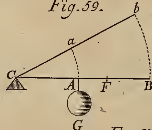


Fig. 59.

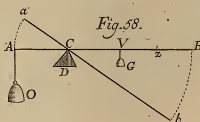


Fig. 58.

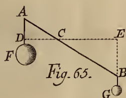


Fig. 65.

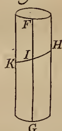


Fig. 63.

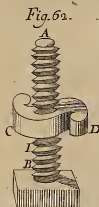


Fig. 62.

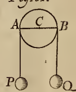


Fig. 61.

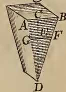


Fig. 64.

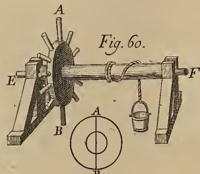


Fig. 60.

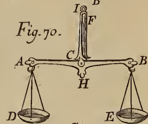


Fig. 70.

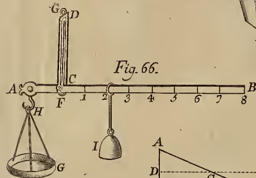


Fig. 66.

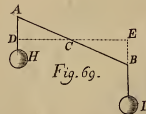


Fig. 69.

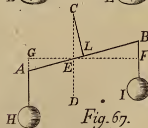


Fig. 67.

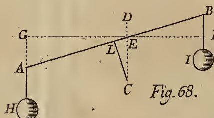


Fig. 68.

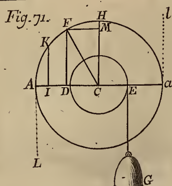

Fig. 71.
H
l
F
M
K
A
I
D
C
E
a
L
G


Fig. 74.
D
A
E
B
C

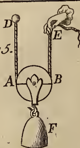
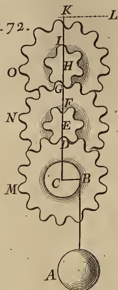
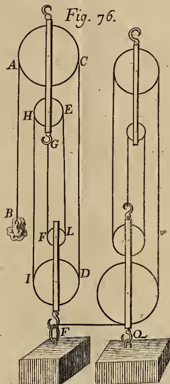
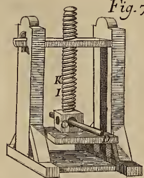
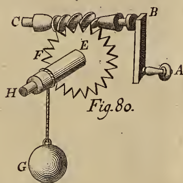

Fig. 75.
D
E
A
B
F

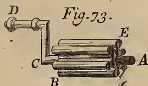

Fig. 77.

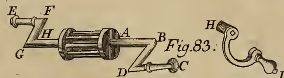

Fig. 72.
K
L
I
O
H
G
F
N
E
D
M
C
B
A


Fig. 76.
A
C
H
E
G
B
F
L
I
D
F
O


Fig. 78.
K
I


C
B
F
E
A
H
Fig. 80.
G


D
Fig. 73.
E
C
A
B


E
F
H
A
B
G
Fig. 83.
D
C
H
I

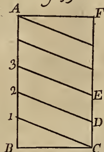
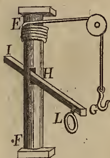
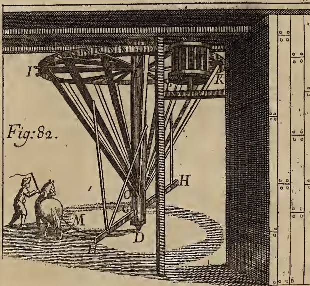
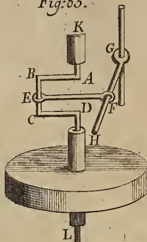
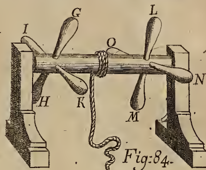

Fig. 79.
A
F
3
2
E
1
D
B
C

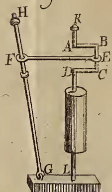
Fig: Mechan: Tab: VII.

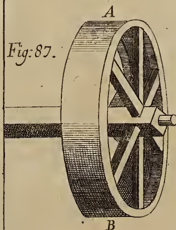












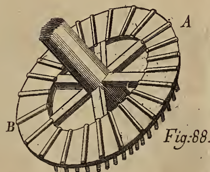
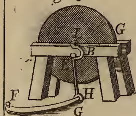
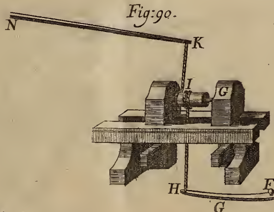
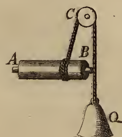
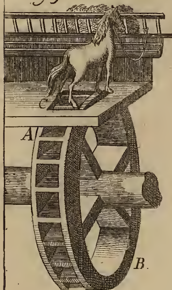


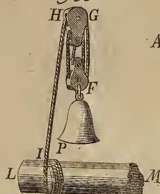
Fig: Mech: Tab: VIII.

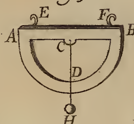




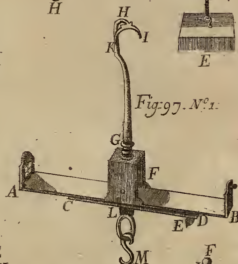


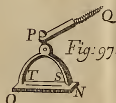


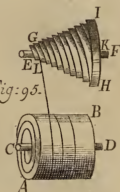


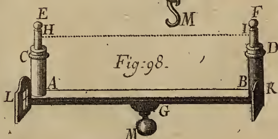


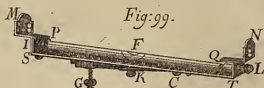


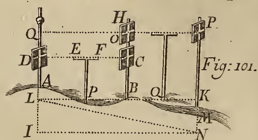


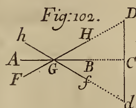


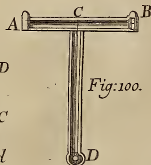


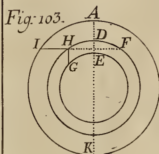


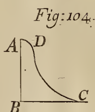

Fig: 99.
M
N
P
I
F
Q
S
L
G
K
C
T

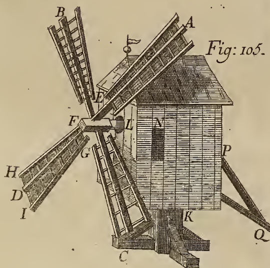

Fig: 101.
H
P
Q
O
E
F
D
C
A
L
P
B
Q
K
M
I
N

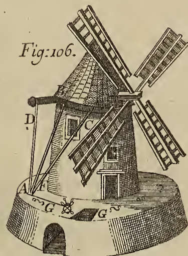

Fig: 102.
D
h
H
A
G
B
C
F
f
d

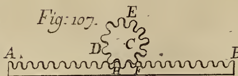

Fig: 100.
A
C
B
D

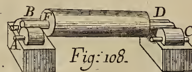

Fig: 103.
A
I
H
D
F
G
E
K

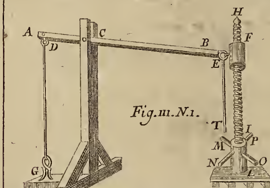

Fig: 104.
A
D
B
C

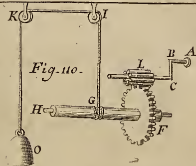

Fig: 105.
B
A
E
F
L
N
G
P
H
D
I
K
C
Q

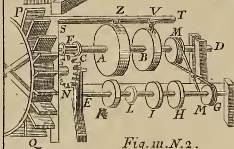

Fig: 106.
B
D
C
A
F
G
G

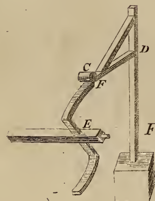

Fig: 107.
E
D
C
A
B
F

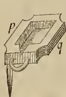

B
F
D
C
A
Fig: 108.


A
D
C
B
H
F
E
Fig. 111. N. 1.
T
I
M
P
N
O
L
G


K
I
Fig. 110.
L
B
A
C
H
G
F
O


P
Z
V
T
S
F
A
B
M
D
C
N
E
K
L
I
H
M
G
Q
Fig. 111. N. 2.


D
C
F
E
Fig. 109.


p
q

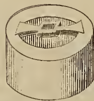
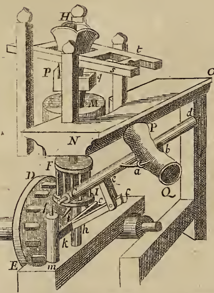
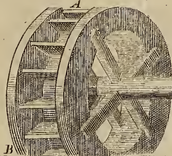


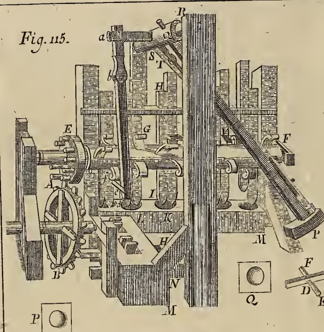


Fig. 112.


h
f
i
l
k
m


H
t
P
q
s
O
M
N
d
P
b
F
a
D
c
Q
I
f
h
k
E
m


A
B


Fig. 115.
a
b
R
S
T
H
E
G
F
A
I
K
H
B
N
M
P
Q
P

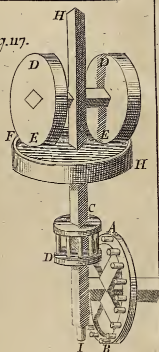
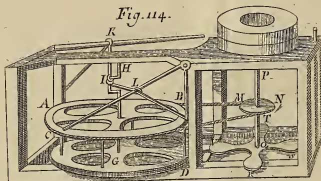
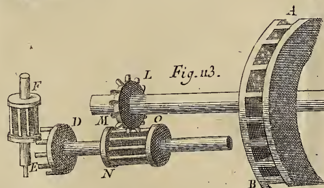
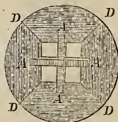
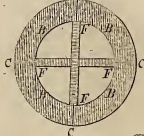

Fig. 117.
H
D
D
F
E
E
H
C
A
D
I
B

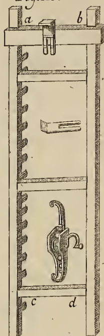

Fig. 116.
A
F
C
D
E
B

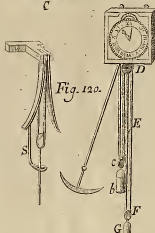

Fig. 114.
K
H
I
L
A
B
C
G
D
P
M
N
T

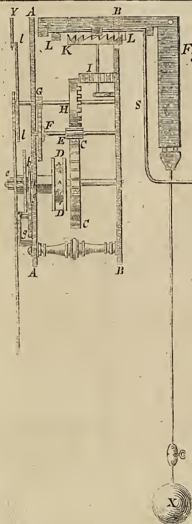

Fig. 113.
A
L
F
D
M
O
E
N
B

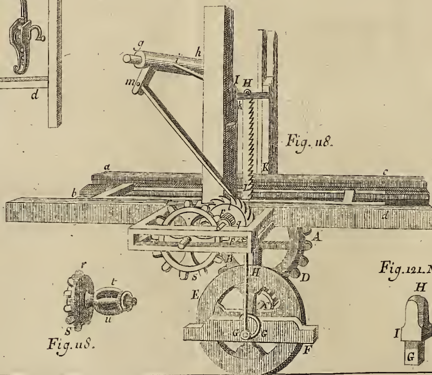

Fig. 121. N. 1.
D
D
A
A
A
A
D
D


Fig. 121. N. 2.
C
B
F
B
C
F
F
C
B
F
B
C


Fig. 118.
a
b
c
d


Fig. 120.
S
D
E
c
b
F
G


Y
A
B
Fig. 119.
L
K
L
I
G
H
S
F
E
C
D
e
b
g
C
A
B
X


g
h
m
I
H
k
Fig. 118.
a
c
b
K
d
A
B
D
H
E
F
G
G

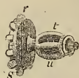
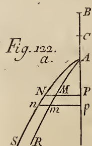
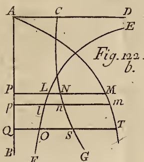
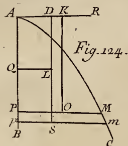
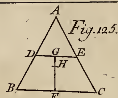

r
t
S
u
Fig. 118.

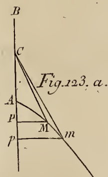

Fig. 121. N. 3.
H
I
K
G

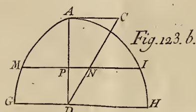

Fig. 122. a.
B
c
A
N
M
P
n
m
p
S
R

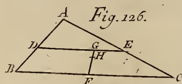

A
C
D
E
Fig. 122. b.
P
L
N
M
p
l
n
m
Q
O
S
T
B
F
G

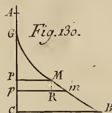

A
D
K
R
Fig. 124.
Q
L
P
O
M
p
m
B
S
C

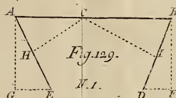

A
Fig. 125.
D
G
E
H
B
F
C

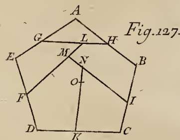

B
C
Fig. 123. a.
A
P
M
p
m

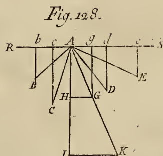

A
C
Fig. 123. b.
M
P
N
I
G
D
H

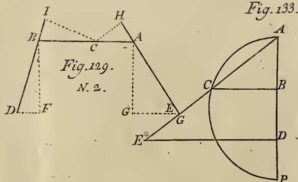

A
Fig. 126.
D
G
E
H
B
F
C


A
G
Fig. 130.
P
M
p
m
R
C
B


A
C
B
H
Fig. 129.
I
N. 1.
G
E
D
F


A
G
L
H
Fig. 127.
E
M
N
B
O
F
I
D
K
C


Fig. 128.
R
b
c
A
g
d
e
S
B
E
H
G
D
C
I
K


I
H
B
C
A
Fig. 129.
N. 2.
D
F
G
E
Fig. 133.
A
C
B
G
E
D
P

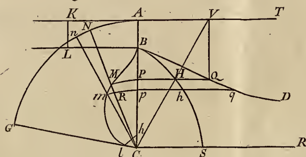


Fig. 131.

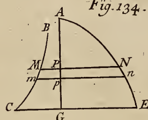


Fig. 134.

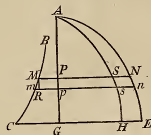


Fig. 136.

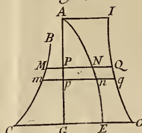


Fig. 135.

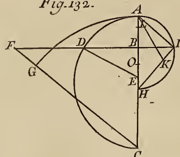


Fig. 132.

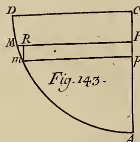


Fig. 143.

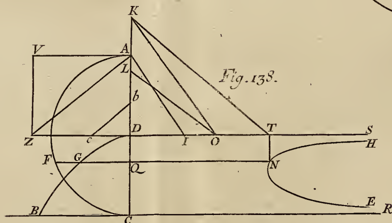


Fig. 138.

Fig. 137.

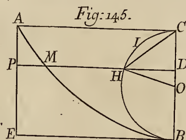
Fig. 139.

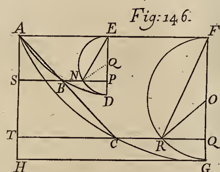
Fig. 140.

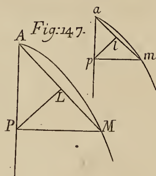
Fig. 141.

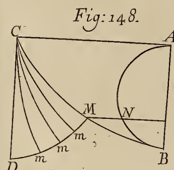
Fig. 142.

Fig. 144.


Fig: 145.
A
C
I
P
M
D
H
O
E
B


Fig: 146.
A
E
F
Q
S
N
P
B
D
O
T
C
R
Q
H
G


Fig: 147.
a
A
l
p
m
L
P
M


Fig: 148.
C
A
M
N
m
m
m
D
B

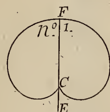
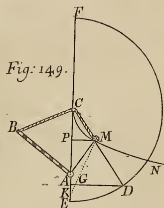
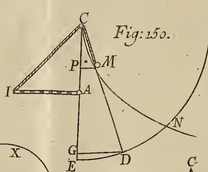
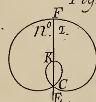
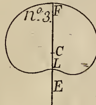

F
n.° 1.
C
E

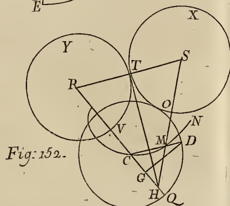
Fig: 151.

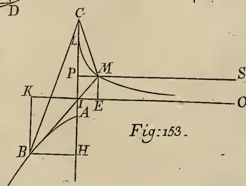

F
Fig: 149.
C
B
P
M
A
G
K
E
D
N

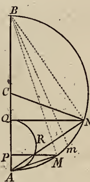

C
Fig: 150.
P
M
I
A
N
G
E
D

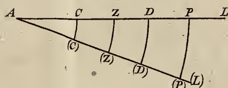

F
n.° 2.
K
C
E

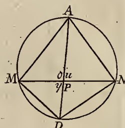

n.° 3.
F
C
L
E

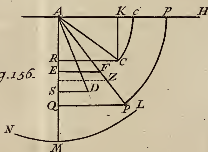

X
Y
T
S
R
O
N
V
M
D
C
G
H
Q
Fig: 152.

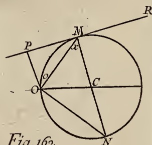

C
L
P
M
S
K
I
E
O
A
Fig: 153.
B
H

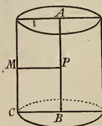

Fig. 154.
B
C
Q
N
R
m
P
M
A

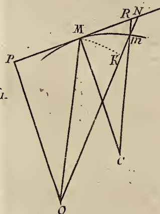

Fig. 155.
A
C
Z
D
P
L
(C)
(Z)
(D)
(P)
(L)

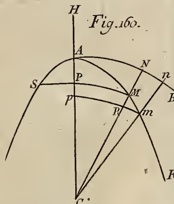

Fig. 157.
A
M
N
D

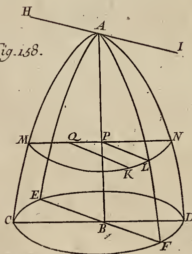

A
K
c
P
H
R
C
E
F
Z
Fig. 156.
S
D
Q
L
N
M

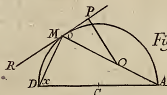

R
M
P
x
o
O
C
Fig. 162.
N

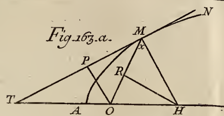

A
M
P
Fig. 159.
C
B

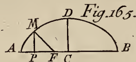

R
N
M
m
P
K
Fig. 161.
C
O

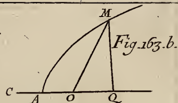

H
Fig. 160.
A
N
n
S
P
M
B
p
m
C
R

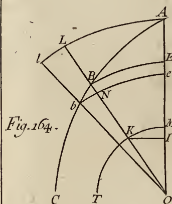

H
A
I
Fig. 158.
M
Q
P
N
K
L
E
C
D
B
F

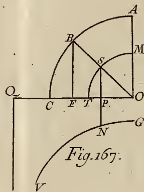

P
M
Fig. 163.
R
O
D
x
A
C

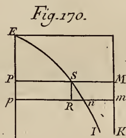

Fig. 163. a.
M
N
x
P
R
T
A
O
H

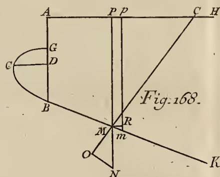

Fig. 165.
D
M
A
P
F
C
B

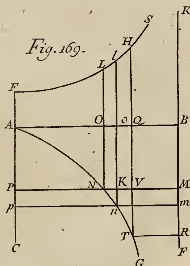

Fig. 163. b.
M
C
A
O
Q


Fig. 164.
A
L
l
E
B
e
N
b
K
M
I
C
T
O


Fig. 167.
A
B
M
S
Q
C
F
T
P
O
N
G
R
V


Fig. 170.
E
P
S
M
p
R
n
m
I
K


Fig. 168.
A
P
p
C
H
G
G
D
B
M
R
m
O
N
K


Fig. 169.
K
S
H
l
L
F
A
O
o
Q
B
P
N
K
V
M
p
n
m
T
R
C
G
F

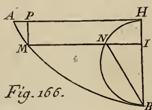
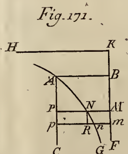
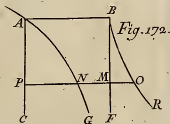
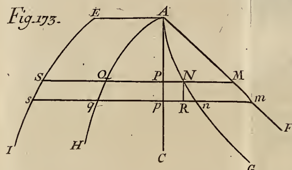
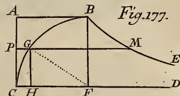

Fig. 166.
A
P
H
N
M
I
B

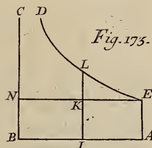
Fig. 171.

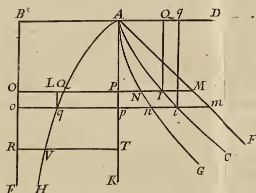

H
K
A
B
P
N
M
p
R
n
m
C
G
F

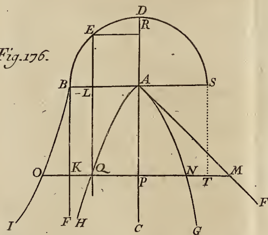

Fig. 172.
B
A
P
N
M
O
C
G
F
R

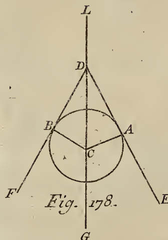

Fig. 173.
E
A
S
Q
P
N
M
s
q
p
R
n
m
F
I
H
C
G

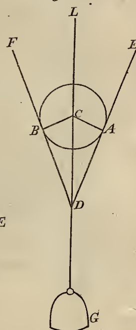

A
B
Fig. 177.
P
G
M
E
C
H
F
D


C
D
Fig. 175.
L
N
K
E
B
I
A


Fig. 174.
B
A
Q
q
D
O
L
Q
P
N
I
M
o
q
p
n
i
m
F
R
V
T
C
G
F
H
K


Fig. 176.
D
R
E
B
L
A
S
O
K
Q
P
N
T
M
F
I
F
H
C
G


L
D
B
A
C
F
E
Fig. 178.
G


Fig. 179.
L
F
E
C
B
A
D
G

ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

PRÆFATIO.



ON dubito fore multos, quibus Leges Hydroſtaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim Gravitatem ſibi imaginentur tanquam Vim in materia perſiſtentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato: fluida vero, quamdiu intra eoſdem terminos concluſa quieſcunt, omnis actionis in corpora alia prorſus expertia judicent; rationem ſane non capiunt, cur partem Gravitatis corpori demerſo veluti adimant, vel etiam totum ingenti ſæpius impetu ſurſum propellant. Enimvero quemadmodum Leges Hydroſtaticæ admodum evidenter demonſtrantur, ita non minus Experientia ſingulæ confirmantur. Hinc diſcant velim, qui in rebus naturalibus cognoſcendis ſenſui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane eſſe in intellectu quam in ſenſu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica ſperanda. Quodſi hunc ſolum ſui uſum Hydroſtatica præberet, digna profecto foret, quam meditarentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipſa quoque clavem

continet, qua multa abdita reſerantur. Non exiguus eſt Phæ-nomenorum numerus, quorum ratio in Hydroſtatica contin-tur, & quæ nec ſine ea intelligi, nedum comprehendi po-ſunt. Hydroſtaticæ uſum in examinanda bonitate metallo-rum, mineralium, aliorumque corporum ſolidorum, in pri-mis autem fluidorum, in *Medicina Hydroſtatica* oſtendit Ce-leberrimus BOYLIUS. Varios, eoſque præclaros in vita huma-na uſus in ipſa pertractatione paſſim indicavi. Sine ea nec Aërometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi poteſt. Sa-ergo rationis apparet, cur Hydroſtaticæ Elementa inter Elementa Matheſeos præcipuum quendam locum ſibi vendicent, & cur digna ſint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita hu-mana uſus applicentur. Agite itaque, quotquot Natura melio-ris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucran-do ſolum cogitent; evolvite hæc Hydroſtaticæ Elementa, legi-te, relegite, meditamini, ut genuinam Phyſicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.



ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Corporum Specifica Gravitate & Levitate.

DEFINITIO I.

1. HYdroſtatica eſt Scientia Gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2. *Docetur nempe in* Hydroſtatica *non modo ratio gravitatis fluidorum, ſed & inprimis actio eorum in ſolida demerſa.*

DEFINITIO II.

3. *Corpus fluidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet ſunt inconnexæ, mutua cohæſione a cauſa quacunque impedita.

DEFINITIO III.

4. *Corpus ſolidum* eſt, cujus maſſulæ quantælibet ſunt connexæ.

DEFINITIO IV.

5. *Corpus ſpecifice levius* eſt, quod ſub eodem volumine minus pondus continet quam alterum.

DEFINITIO V.

6. *Corpus ſpecifice gravius* eſt, quod ſub eodem volumine majus pondus continet quam alterum.

SCHOLION.

7. *Sint duo globi æquales, quorum ſcilicet diameter unius pedis; alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo, dicetur ſpecifice gravior; ligneus autem ſpecifice levior.*

DEFINITIO VI.

8. *Corpus denſius* eſt, quod plus maſſæ ſub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum maſſa ſit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus ſpecifice gravius denſius eſt ſpecifice leviori, & corpus denſius ſpecifice gravius eſt rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO VII.

10. *Corpus rarius* eſt, quod minus maſſæ ſub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum maſſa ſit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus rarius eſt ſpecifice levius denſiori, & ſpecifice levius rarius ſpecifice graviori (§. 5, 6).

AXIOMA I.

12. *Corpora ejuſdem denſitatis ſub eodem volumine æqualem maſſam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare ſi volumina eorundem æqualia fuerint, ejuſdem quoque ponderis erunt, ſeu gravitatem eandem habebunt (§. 112 *Mechan.*)

AXIO-

AXIOMA II.

14. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia; densitates sunt ut massæ.*

SCHOLION.

15. *Nempe, vi defin.* (§. 8) *corpus dicendum est duplo densius, si duplum massæ sub eodem volumine continet; triplo densius, si triplum; & ita porro.*

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur densitates corporum æqualium ut pondera, seu ut gravitates (§. 112 *Mechan.*).

THEOREMA I.

17. *Si duo corpora eandem densitatem habuerint, massæ sunt ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem massam continent (§. 12); adeoque in volumine duplo continetur massa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla, & ita porro. Sunt igitur massæ ut volumina. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

18. Quoniam etiam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); corporum ejusdem densitatis gravitates sunt in ratione voluminum (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Ergo corpora ejusdem densitatis sunt etiam ejusdem gravitatis specificæ; & contra (§. 6).

COROLLARIUM III.

20. Quare corpora diversæ densitatis sunt diversæ gravitatis specificæ; & contra.

THEOREMA II.

21. *Massæ duorum corporum sunt in ratione composita densitatum atque voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum massæ $a, b, c,$ volumina primi & secundi d, tertii e, densitas primi f, secundi & tertii g; sint nempe primum & secundum ejusdem voluminis, secundum & tertium ejusdem densitatis. Quoniam

$$a : b = f : g \quad (\text{§. } 14)$$
$$b : c = d : e \quad (\text{§. } 17).$$

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 213 *Arithm.*) consequenter $a : c = fd : ge$ (§. 18[illegible] *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM III.

22. Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); eædem etiam sunt in ratione composita densitatum & voluminum (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA III.

23. *Si duorum corporum massæ vel gravitates fuerint æquales; densitates sunt reciproce ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in Theorematis præcedentis demonstratione, erit $a : c = fd : ge$ (§. 21). Jam $a = c$ *per hypoth.* adeoque $fd = ge$. Est igitur $f : g = e : d$ (§. 299 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*), si massæ æquales sunt, etiam gravitates æquales sunt. Sed si massæ æquales sunt, densitates sunt reciproce ut volumina, *per demonstrata.* Ergo etiam, si gravitates æquales sunt, densitates reciproce sunt ut volumina. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

24. *Duorum corporum quorumcunque densitates sunt in ratione composita ex directa massarum & voluminum reciproca.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione Theorematis ſecundi, erit

$a : c = fd : ge$ (§. 21).

Ergo $age = cfd$ (§. 297 *Arithm.*) conſequenter $f : g = ae : cd$ (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum ſunt ut maſſæ eorundem (§. 112 *Mechan.*); denſitates corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum & reciproca voluminum (§. 15 *Arithm.*).

AXIOMA III.

26. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia; gravitates ſpecificæ ſunt ut gravitates abſolutæ.*

SCHOLION.

27. *Corpus enim duplo gravius ſpecifice dicitur altero, ſi duplam gravitatem ſub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, ſi triplam, &c.* (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates abſolutæ ſunt ut maſſæ (§. 112 *Mech.*); corporum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut maſſæ (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA V.

29. *Corporum ejuſdem ponderis gravitates ſpecificæ ſunt in ratione voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis A $= a$, volumen alterius B $= b$. Quoniam B ſupponitur eſſe homogeneum; gravitates voluminibus proportionales ſunt (§. 130 *Mechan.*), adeoque gravitas ipſius B ſub volumine a, reperitur $ag : b$ (§. 301 *Arithm.*). Sunt igitur gravitates ſpecificæ corporum A & B ut g, ad $ag : b$ (§. 26), hoc eſt, ut bg, ad ag (§. 181 *Arithm.*); conſequenter ut b ad a (§. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

30. Quod ſi ergo volumina fuerint æqualia; etiam gravitates ſpecificæ æquales erunt, hoc eſt, corpora ejuſdem ponderis & voluminis eandem gravitatem ſpecificam habent.

THEOREMA VI.

31. *Gravitates abſolutæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita voluminum & gravitatum ſpecificarum (hoc eſt, gravitatum ſub eodem volumine).*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejuſdem voluminis c gravitates abſolutæ a & b, ſpecificæ f & g; corporum ejuſdem ponderis a volumina c & d, gravitates ſpecificæ f & e. Erit

$a : b = f : g$ (§. 26)

$f : e = d : c$ (§. 29).

Ergo $af : be = fd : gc$ (§. 213 *Arith.*

Unde $a : b = d : \frac{gc}{e}$ (§. 185 *Arithm.*)

& $a : b = ed : gc$ (§. 178 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

32. *Gravitates ſpecificæ duorum corporum ſunt in ratione compoſita ex directa gravitatum abſolutarum & reciproca voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonſtratione Theorematis præcedentis; erit

$a : b = ed : gc$ (§. 31).

Ergo $\frac{a}{d} : \frac{b}{c} = e : g$ (§. 185 *Arithm.*)

conſequenter $ac : bd = e : g$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

33. Quoniam densitates sunt in ratione composita ex directa gravitatum absolutarum & reciproca voluminum (§. 25); erunt etiam gravitates specificæ ut densitates (§. 167 *Arithm.*)

CAPUT II.

De Æquilibrio & Pressione Fluidorum.

THEOREMA VIII.

34. *Si in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit; fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem basin & altitudinem habent, adeoque æquales sunt (§. 535 *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales sint (§. 131 *Mechan.*); fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, qua idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quiescunt & neutrum alterum movet (§. 75 *Mechan.*). *Quod erat unum.*

Fig. 2. II. Quodsi basis tubi GI fuerit quadrupla basis alterius HK, & aqua descenderet ex L usque ad O, ex. gr. per intervallum unius digiti, in tubo altero NK ascenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 580 *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK, est ad celeritatem, qua idem moveretur in GI; ut basis tubi GI, ad basin alterius HK (§. 33 *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo, ipsumque fluidum homogeneum *per hypoth.* massa fluidi in tubo GI est ad massam fluidi in altero HK, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 573 *Geom.*). Est ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK, ut factum ex basi tubi GI in basin alterius HK ad factum ex basi tubi HK in basin alterius GI (§. 278 *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arithm.*); vires etiam æquales sunt; adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§. 75 *Mech.*). *Quod erat secundum.*

III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas absoluta fluidi in tubo inclinato SR est ad gravitatem respectivam ejusdem qua nititur juxta directionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261 *Mechan.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem basin & altitudinem habente cum inclinato TR; consequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per cas.* 1. *Quod erat tertium.*

IV. Eodem modo ostenditur fluida æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, si ad eandem

eandem altitudinem conſtituantur. *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major eſt altitudo.

THEOREMA IX.

36. *In tubis communicantibus quibuſcunque fluida diverſæ gravitatis ſpecificæ æquiponderant, ſi altitudines habuerint rationem gravitatum ſpecificarum reciprocam.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. E. g. Sint tuborum AB & DC diametri æquales; & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas ſpecifica aquæ eſt ad gravitatem ſpecificam argenti vivi ut 1 ad 14; ſit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero mercurii in tubo DC digiti unius.

Quoniam baſes cylindrorum aquei & mercurialis æquales ſunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (*§.* 573 *Geom.*); conſequenter cum tam aqua, quam mercurius ſit fluidum homogeneum, licet inter ſe heterogenea, gravitates abſolutæ eorundem erunt in ratione compoſita ex directa tam gravitatum ſpecificarum 1 : 4, quam altitudinum EB & DH, 4 : 1 (§. 31), hoc eſt æquales ſunt (*§.* 159 *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro ſubſtituere licet aqueum, cujus altitudo eſt altitudinis ipſius quadrupla (§. 15 *Arithm.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquiponderat (§. 34.). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non abſimili modo oſtenditur, ſi tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM I.

37. Inveniri adeo poteſt fluidorum duorum quorumcunque gravitas ſpecifica, ſi in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum; & altitudines BG & DH, ad quas ſubſiſtunt æquilibrata, ex eadem menſura accurate æſtimentur. Eſt enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. *36*). *Fig.* 1.

SCHOLION.

38. *Quodſi fluida facile commiſceantur, tubum horizontalem* BD *mercurio replere debemus, commixtionem impedituro. Etſi autem fluida non facile commiſceri ſoleant, ſpecifice tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.*

COROLLARIUM II.

39. Quoniam denſitates fluidorum ſunt ut gravitates ſpecificæ (§. *33*); eædem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM III.

40. Eadem ergo methodo, quam in *Cor.* 1 (*§.* 37) expoſuimus, ratio denſitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA X.

41. *In vaſis perpendicularibus* ABDC *&* EGHF *æquales baſes* BD *&* GH *habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum* AB *&* EG. *Fig.* 5.

 De-

DEMONSTRATIO.

Quoniam vaſa ſunt perpendicularia, hoc eſt, baſes eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hypoth.* fluida adverſus fundos nituntur ſecundum lineas perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), adeoque tota gravitate ſua, cum nihil reſiſtat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates ſunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ſunt ut altitudines (§. 573 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Quodſi ergo etiam altitudines æquales ſunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM II.

43. In vaſe igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam conſiſtente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales ſunt ſuper parte qualibet fundi.

COROLLARIUM III.

44. In uno eodemque vaſe, fluidum ad diverſas altitudines ſucceſſive conſtitutum fundum premit in ratione altitudinum ad quas conſiſtit.

COROLLARIUM IV.

45. Decreſcente adeo altitudine, decreſcit preſſio, ſuntque hujus decrementa in ratione decrementorum altitudinis.

THEOREMA XI.

Fig. 6. 46. *In vaſis perpendicularibus* ABDC *&* EGHF, *baſes* BD *&* GH *utcunque inæquales habentibus; fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione compoſita baſium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonſtratione Theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum ſunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 572 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione compoſita baſium & altitudinum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

47. *Si vas inclinatum* ABDC *eandem altitudinem & baſin habuerit cum perpendiculari* BEFG; *fundus utriuſque æqualiter premitur.* Fig.

DEMONSTRATIO.

In vaſe inclinato ABCD fundus CD premitur ſecundum directionem BD. Eſt autem vis gravitatis ſecundum BD ad gravitatem abſolutam, ut BE ad BD (§. 261 *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac ſi a fluido ad altitudinem BE conſiſtente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vaſis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

48. *Si baſes vaſis* ABDC *inæquales fuerint; fundus eodem modo premitur, ac ſi ſuperior inferiori æqualis exiſteret.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit baſis inferior CD minor ſuperiore AB. Quoniam fluidum fundum CD, Fig. quem

Fig. 8. quem in plano horizontali ſupponimus, ſecundum lineas perpendiculares EC, FD premit (§. 215 *Mechan.*), nonniſi fluidum intra cylindrum ECDF comprehenſum adverſus eum nititur, reliqua maſſa contra latera vaſis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac ſi baſis ſuperior inferiori æqualis eſſet. *Quod erat unum.*

Fig. 9. II. Sit vaſis inferior baſis CD multo major ſuperiore FG. Nempe ut Demonſtratio facilior evadat, cylindro ABDC infixus intelligatur tubus FE. Quodſi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per intervallum CL: in tubo FE per altitudinem EM aſcendet, quæ eſt ad CL ut baſis CD ad baſin GF (§. 580 *Geom.*). Eſt vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vaſe AD, ut EM ad CL (§. 33 *Mechan.*); conſequenter ut baſis CD ad baſin FG (§. 167 *Arithm.*). Vis ergo, qua aqua in tubo deorſum nititur, prodit ſi baſis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*). Summando ſcilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95 *Analyſ. infin.*); conſequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a Cylindro HCDI premeretur (§. 541 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vaſorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem conſiſtente, quæcunque ſit figura vaſis.

SCHOLION I.

Fig. 10. 51. *Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus ſuperior dolii* AB *attollatur ab aqua in tubo* CD *plurium pedum contenta. Ipſemet experimentum aliquoties iteravi in vaſe* Fig. 10. *ligneo* AB *intus pice probe obducto & tubo* CD *ex lamina ferrea ſtanno obducta parato altitudinis* 14 *fere pedum, nec* 800 *libræ baſi ſuperiori impoſitæ impedire potuerunt, quominus attolleretur.*

SCHOLION II.

52. *Ab hoc principio derivavi* Siphonem Fig. 11. *meum* Anatomicum, *ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri ſcilicet curavi ex lamina ferrea ſtanno obducta vas cylindricum* DEGF, *& eidem afferruminari juſſi tubum* FIH. *Quodſi jam veſica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut aliæ quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inverſæ baſi ſuperiori ſuperinducantur; eas non modo ingenti vi in hemiſphæricam figuram expandit, ſed & poros ſubintrans omnes membranas & vaſa ita dividit, ut, levi inciſura facta, ſolis digitis multo accuratius ſeparentur, quam cultro anatomico. Jucundum ſane eſt ſpectaculum, dum non modo ſubſtantia membranacea mire intumeſcit, ſed & vaſorum per eam diſperſorum ramificationes & inſertiones minimas diſtincte ſpectare, tunicaſque, quæ vulgo pro una habentur, in plures diſcerpere licet. Probe autem notandum eſt, quod ſi interior veſicæ aut reliquarum partium corporis animalis ſuper vaſe* DG *expenſarum ſuperficies aquam lambat, aqua per ſubſtantiam earum penetrare nequeat. Cæterum ſi veſicæ ingens pondus imponas, ab aqua in tubo* HI *vix duarum librarum attollitur.*

SCHOLION III.

53. *Veritatem hujus doctrinæ de preſſione* Fig. 9. *fluidorum in ratione baſis ac altitudinis exploraturus, vas metallicum* ACDB *ita conſtrui curet, ut fundus* CD *ſit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & baſi ſuperiori* AB *ſucceſſive tubi æque-alti, ſed diverſarum diametrorum applicari poſſint. Quodſi enim funiculi per tubum* FE *trajecti alterius extremum annulo* K *baſi mobili afferruminato, alte-*

Fig. 9. *alterum vero brachio alicujus libræ alliges, & in lance alteri appensa pondus colloces, idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus* CD *attollatur; non modo hinc disces, eodem semper pondere opus esse ad fundum attollendum, quæcunque sit tubi* EF *amplitudo, modo aqua constanter ad eandem altitudinem consistat, sed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vase basin* CD, *sed altitudinem* FK *habentis.*

Scholion IV.

54. *Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonstrata sunt, non consentire videtur, quod in tubis capillaribus, seu fistulis gracilioribus utrinque patulis, unaque sua extremitate sub aquam demersis, aqua ultra libellam assurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, Phænomenen hoc alteri cuidam causæ adscribendum esse, licet sine principiis Aërometricis definiri nequeat.*

CAPUT III.

De Gravitatione Corporum specifice Graviorum in Fluidis Levioribus.

Theorema XIV.

55. *Corpus specifice gravius in fluido leviori eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.*

Demonstratio.

Fig. 12. Ponamus ex. gr. cubum pollicarem plumbeum F sub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo quem occupat loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a resistentia ambientis sustentabatur. Ergo a resistentia aquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plombei pars sustentari debet, quantum est pondus aquæ expulsæ. Hac igitur parte gravitas corporis demersi deprehendetur imminuta. *Q. e. d.*

Corollarium I.

56. Cum fluidum specifice gravius sub eodem volumine majus pondus possideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido specifice graviori majorem ponderis sui partem amittit, quam in leviori; adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

Scholion.

57. *Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in spiritu vini.*

Corollarium II.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, si unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

Corollarium III.

59. Cum gravitates specificæ sint ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi solido immerso mole æqualis sit ad gravitatem solidi, ut pars ponderis in fluido amissa ad pondus ipsius integrum (§. 55);

(§. 55); erit gravitas fluidi ſpecifica ad gravitatem ſolidi demerſi, ut pars ponderis a ſolido amiſſa ad pondus ejus integrum (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

60. Duo ſolida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed ſpecifice gravioris pondus majus eſt, quam ſpecifice levioris (§. 6). Ergo majorem ſui ponderis partem amittit ſpecifice levius quam gravius (§. 205 *Arithm.*).

COROLLARIUM V.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina ſunt reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29); ſpecifice levius ejuſdem cum graviori ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare ſi in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, ſed ſpecifice gravius præponderabit, eo magis quo fluidum denſius.

PROBLEMA I.

62. *Invenire pondus fluidi cujuſcunque, ex. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur volumen fluidi per regulas Stereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino ſuſpenſus fluido immergatur, & ope bilancis exacte notetur pondus amiſſum: quod erit pondus fluidi ſub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus ſit volumini proportionale (§. 130 *Mechan.*); pondus fluidi quæſitum per regulam trium (§. 302 *Arithm.*) invenietur.

Ex. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68 : 1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari poteſt pondus unius pedis cubici fluidi cujuſcunque, & in uſus futuros annotari.

SCHOLION.

64. *Pondus pedis cubici aquæ inveſtigarunt multi; ſed cum in diverſis fluviis ac fontibus non eadem ſit gravitas ſpecifica aquæ, immo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio, mirum non eſt, obſervationes diverſorum Autorum inter ſe admodum diſcrepare.* MORLANDUS (a) *experimentis ſæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum juxta menſuram Pariſinam eſſe 70 librarum cum duabus unciis.*

THEOREMA XV.

65. *Gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in utroque amiſſa.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates ſpecificæ ſunt ut abſolutæ ſub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem ſolido in diverſis fluidis amiſſa ſunt gravitates abſolutæ fluidorum ſub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates ſpecificæ fluidorum ſunt ut pondera ab eodem ſolido in iis amiſſa. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

66. *Invenire gravitatem ſpecificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ ſuſpendatur globus plumbeus, & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipſo in aëre æquilibrium ſervet.

2. Glo-

(a) *Elevations des Eaux* p. 7.

2. Globus ſucceſſive immittatur diverſis fluidis quorum ſpecifica gravitas determinanda, noteturque pondus quod in ſingulis fluidis demerſo æquiponderat.

3. Singula hæc pondera ſubducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amiſſæ, & una ratio gravitatis ſpecificæ fluidorum conſtabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum denſitates ſint ut gravitates ſpecificæ (§. 33); eodem modo invenitur ratio denſitatis fluidorum.

SCHOLION I.

68. *Maximi uſus eſt hoc Problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum inveſtigantur: quod ſcire non ſolum in Scientia naturali excolenda, ſed & in vita civili ac praxi medica proficuum exiſtit.*

SCHOLION II.

69. *Quodſi diverſo tempore gravitatem ſpecifieam fluidorum inveſtiges; hieme majorem, quam æſtate deprehendes.* Joan. Caſp. EISENSCHMIDIUS (*a*) *experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc Tabulam referre libet.*

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Pariſino.

Pollex cubicus Pariſ.	Æſtate Unc.	Æſtate Groſſ.	Æſtate Gran.	Hieme Unc.	Hieme Groſſ.	Hieme Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus ſalis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti deſtillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cereviſiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cereviſiæ fuſcæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur.		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ deſtillatæ	-	5	8	-	5	11

(*a*) In *Diſquiſitione Nova de ponderibus & menſuris*, p. 174. & 175.

SCHO-

SCHOLION III.

70. *Ut accuratissime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum constituti subtrahenda est a pondere solidi in aëre; vis vero quæ requiritur ad filum sub fluido demergendum, si specifice levius, addenda est ponderi amisso. Quodsi vero filum ex quo pendet solidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aëre subtrahendum est a pondere solidi in aëre, & pondus quod filum amittit a pondere in fluido amisso. Enimvero quoniam filum cum solido immerso idem totum constituit, hac cautione opus non est, si in omnibus fluidis quorum gravitates specificas inter se conferre volueris, eandem fili portionem una cum solido immergas. Quia crinis equinus eandem fere cum aqua gravitatem specificam habet; Experimenta Hydrostatica in aqua instituturi ex eodem solida suspendunt.*

PROBLEMA III.

71. *Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a superioribus, nec ne.*

RESOLUTIO.

Exploretur *per Probl.* 2 (§. *66*), quamnam ponderis sui partem amittat idem solidum in diversis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodsi enim pondus a solido solo in diversis profunditatibus amissum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi specifica in partibus inferioribus, quæ in superioribus (§. 55), consequenter eadem densitas (§. 33). Quodsi vero in profunditate majore pondus majus amittitur quam in minore; in priore casu gravitas specifica (§. *6*), consequenter & densitas (§. 33), major erit quam in altero. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

72. *Tentavit hoc in aqua* Franciscus Tertius DE LANIS (*a*). *Accepto autem vase duorum pedum altitudine, cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ* 18 *granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio* 18 *granorum perfectissimum facere æquilibrium expertus est. Cum eundem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem descendere permitteret, ponderi ejus dimidium insuper granum decedere observavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immersum conjici debet, quippe extra aquam grani semissi æquiponderantem; aquæ partes inferiores a superioribus nullam pati compressionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus instituere.*

PROBLEMA IV.

73. *Determinare rationem quam habet gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi quod fluido specifice gravius existit.*

RESOLUTIO.

Ponderetur massa quantalibet solidi in fluido, & notetur accurate pondus in eodem amissum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi in ipso demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. *59*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Si fluidum specifice gravius solido, proposito satisfiet per ea quæ in Capite subsequente traduntur.*

(*a*) In *Magisterio Naturæ & Artis*. Tom. 3. lib. 25. c. 1. exper. 7. f. 492.

THEOREMA XVI.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amissæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ corporum pondere æqualium sunt reciproce ut volumina (§. 29.). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amissæ voluminum rationem habeant (§. 55, 18); gravitates corporum specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amissæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio quam habent gravitates specificæ solidorum, si massæ in aëre æquiponderantes in eodem fluido ponderentur, & pondera a singulis amissa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem specificam plurimorum Corporum solidorum investigarunt multi. Imprimis prolixæ sunt Tabulæ, quæ in hanc rem exhibeantur in* Transactionibus Anglicanis (a). *Variorum quoque corporum, præsertim metallorum, gravitatem specificam jam ante dedit* Marinus GHETALDUS (b) *& ex eo* Guilielmus OUGHTREDUS (c), *dederunt postea alii. Nobis suffecerit annotasse metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem specificam a* PETITO *multa solertia investigatam, prout eam exhibuit* MERSENNUS (d) *& ex ipso postea alii. Nempe si fuerit gravitas*

— Auri *librarum* 100.

erit sub eodem volumine gravitas

Mercurii	*lib.* $71\frac{1}{2}$	Stanni puri	$38\frac{1}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Argenti	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{3}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{3}$

(a) N. 169. p. 926. & seqq. it. n. 199. p. 994. Conf. *Epitome Transact. Angl.* Cl. LOWTHORPII, vol. I. cap. 6. p. 60. & seqq.
(b) In *Archimede promoto.*
(c) In *Opusculis Mathematicis*, p. 61.
(d) In *Phænomenis Hydraulicis*, cor. prop. 47. *Cogitatorum Physico-Mathem.* p. 192.

PROBLEMA V.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem solidi mole ipsi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur ratio gravitatis specificæ fluidi ac solidi (§. 73).
2. Hac data, per Regulam trium invenietur gravitas solidi sub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi sub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas specifica aquæ ad gravitatem plumbi, ut $5\frac{1}{3}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 32 ad 363 (§. 178 *Arithm.*); reperitur gravitas plumbi $363 . 200 : 32 = 2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur, data gravitate solidi unius, gravitas alterius, si ratio gravitatis specificæ investigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas stanni sub eodem volumine cum plumbo 30 librarum. Quia gravitas stanni ad gravitatem plumbi, ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 78 ad 121 (§. 178. *Arithm.*); reperietur gravitas stanni quæsita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA VI.

80. *Dato corporis solidi volumine, invenire volumen solidi alterius pondere æqualis.*

RESO-

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium ſint reciproce ut gravitates ſpecificæ (§. 29), Problema præſens eodem modo reſolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum, ut 21 ad 42, hoc eſt, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PROBLEMA VII.

81. *Dato pondere corporis ex duobus miſcibilibus compoſiti, una cum pondere quod in fluido aliquo amittit; invenire pondera miſcibilium ſigillatim.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur (§. *66*), quantum ponderis in dato fluido maſſa quædam determinata utriuſque miſcibilis amittat.
2. Hinc per Regulam trium porro eruatur, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriuſque maſſa, ſi pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus ſubtrahatur e majori, ut conſtet exceſſus quo pondus a ſpecifice leviori amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
4. Porro pondus a ſpecifice graviori amiſſum ſubtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut conſtet exceſſus quo pondus a mixto amiſſum ſuperat pondus a graviori amiſſum.
5. Quodſi ad exceſſum primum, exceſſum alterum, & pondus mixti quæratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miſcibilis ſpecifice levioris: quod
6. a pondere mixti ſubductum relinquit pondus maſſæ ſpecifice gravioris.

Ex. gr. Maſſa 120 librarum, ex ſtanno & plumbo commixtis compoſita, in aqua 14 libras amittit: quæruntur pondera ſtanni & plumbi ſigillatim. Quoniam experimentando reperitur, ſtannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

37 — 5 — 120
5
$\frac{600}{37}$ lib.

23 — 2 — 120
2
$\frac{240}{23}$ lib.

$$\frac{500}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

4920 — 3034 — 120
41 1 (120
~~16~~
~~3034~~ (74 lib. Pondus ſpecif. lev.
~~411~~ 120 Pondus mixti
~~4~~
46 Pondus ſpecifice gravioris.

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum $= p$, quod in fluido amittit $= a$, pondus amiſſum a ſpecifice graviori ejuſdem cum mixto ponderis $= b$, amiſſum a ſpecifice leviori ejuſdem itidem cum mixto ponderis $= c$, pondus ſpecifice levioris quod

mixtum ingreditur $= x$; erit pondus ſpecifice gravioris quod mixtum ingreditur $= p - x$, pondus a miſcibili x in fluido amiſſum $= cx : p$, amiſſum a miſcibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$
$$cx - bx = (a - b)p$$
$$x = (a - b)p : (c - b).$$ *Q. e. d.*

SCHOLION.

82. *Eodem modo ſolvi poteſt Problema ab* HIERONE *Rege Syracuſarum olim* ARCHIMEDI *propoſitum, quantum ſcilicet argenti coronæ aureæ admiſcuerit doloſus Artifex* (*a*).

PROBLEMA VIII.

83. *Determinare bonitatem maſſarum, maſſaſque adulteratas diſtinguere a genuinis.*

RESOLUTIO.

Præſupponendum hic eſt, bonitatem maſſæ æſtimari ex ratione ipſius ad volumen, ex. gr. frumentum eo melius, quo gravitas ſpecifica major. Quare non alia re opus eſt, quam ut inveſtigetur decrementum ponderis in aqua.

Quodſi, eodem mediante, gravitatis ſpecificæ maſſarum ratio ad fluidum aliquod determinetur (§. 73); maſſæ adulteratæ facile dignoſcuntur, ſi facta ponderatione in eodem fluido, diverſa ab hac gravitatis ſpecificæ ratio reperitur (§. *cit.*).

SCHOLION I.

84. *Cum aqua non ſemper ejuſdem ſit gravitatis ſpecificæ, diverſitas prius per ponderationem ejuſdem ſolidi in eadem detegenda.*

(*a*) Vid. VITRUVIUS Lib. 9. c. 3. f. 273.

SCHOLION II.

85. *Notandum præterea, fieri nonnunquam poſſe, ut Hydroſtaticum examen ſolum adulterationem factam non prodat.* Ex. gr. *Cum ſtannum argento ſit ſpecifice levius, plumbum ſpecifice gravius; duo hæc metalla (quod inferius expreſſius docetur) ita miſceri poſſunt, ut eandem cum argento gravitatem ſpecificam nanciſcantur: quæ maſſa poſtmodum cum argento permixta examen Hydroſtaticum non verebitur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miſcibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur (§. 81).*

SCHOLION III.

86. *Notandum denique, per varia experimenta addiſcendam eſſe diverſitatem, quæ in gravitate ſpecifica corporum ejuſdem ſpeciei ad idem fluidum occurrere poteſt, antequam de adulteratione facta judicium feratur.*

PROBLEMA IX.

87. *Fluidum ſpecifice gravius ponderare in ſpecifice leviori.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. mercurius in aqua ponderandus.

1. Aſſumatur vas vitreum, v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amiſſum 36: quod erit pondus aquæ ejuſdem cum vitri maſſa voluminis.
2. Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amiſſum 43; quod erit æquale ponderi aquæ ejuſdem cum vitro & mercurio ſimul ſumto voluminis.

4. Qua-

4. Quare si pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde subtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc est, pondus ab argento vivo in aqua amissum 7.

THEOREMA XVII.

88. *Corpus specifice gravius in fluido specifice leviori ea vi descendit, quæ est excessui ponderis ejusdem supra pondus fluidi sub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonnisi ea vi descendit quæ ipsi relinquitur, demta parte in resistentiam fluidi vincendam impensa. Quamobrem cum hæc æqualis sit ponderi fluidi sub eodem volumine (§. 55); nonnisi excessu ponderis sui supra pondus fluidi sub eodem volumine descendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

89. Quoniam vis ad sustentandum corpus in fluido requisita æqualis est vi qua nititur deorsum in eodem; vis, quæ corpus specifice gravius in fluido sustentat, æqualis est excessui gravitatis absolutæ supra gravitatem fluidi sub eodem volumine. Ex. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{3}$ in aqua amittit de pondere suo $5\frac{1}{3}$ libras: vis ergo 42 librarum id sustentare valet.

COROLLARIUM II.

90. Quare cum excessus ponderis solidi supra pondus fluidi specifice gravioris minor sit, quam supra pondus specifice levioris sub eodem volumine; in specifice graviore vi minore descendit, quam in leviore; consequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius descendit.

COROLLARIUM III.

91. Quamobrem in specifice graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod sustentandum, ne fundum petat, quam in specifice leviori (§. 89).

PROBLEMA X.

92. *Data solidi submersi gravitate absoluta, datoque volumine; determinare vim qua in fluido attolli potest.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63); unde,
2. Ob datum solidi submersi volumen, per Regulam trium inveniri potest pondus aquæ idem cum ipso volumen habentis.
3. Hæc ergo si subducatur a gravitate corporis submersi data, relinquetur vis quæ ipsum in aqua sustentare valet (§. 89); adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis submersi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ sit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum submerso volumen habentis 2800: quod ex 3000 subductum relinquit vim sustentantem 200 librarum.

SCHOLION.

93. *Hinc patet ratio, cur corpora quædam, quæ scilicet ad gravitatem specificam fluidi propius accedunt* (§. 90), *in fluido isto exigua vi sustententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aëre superant.*

CAPUT IV.

De Gravitatione Corporum specifice Leviorum in Fluido Graviori.

THEOREMA XVIII.

94. *Corpus specifice levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi sub volumine partis immersæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur divisum, æquiponderent (§. 34); si corpus solidum eidem imponitur, perinde est ac si columnæ uni tantum ponderis accessisset, quantum est fluidi sub eodem volumine; consequenter columna ista præponderat (§. 35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§. 75 *Mechan.*), corpusque solidum immergitur. Quam primum vero corpus ea sui parte immersum est, ut fluidum ejectum ex spatio quod occupat pondere æquale sit gravitati totius corporis; columna ista non amplius præponderat. Corpus itaque ita immersum ab aqua sustentatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

95. Quia gravitates specificæ corporum ejusdem ponderis sunt reciproce ut volumina (§. 29); volumina vero fluidorum pondere æqualium sunt ut partes immersæ ejusdem solidi (§. 59); gravitates specificæ fluidorum reciproce sunt ut partes immersæ ejusdem corporis.

COROLLARIUM II.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviori.

COROLLARIUM III.

97. Quo majorem rationem solidi gravitas specifica ad fluidi specifice levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur (§. 203 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

98. Si solidum fuerit ejusdem gravitatis specificæ cum fluido, corpus totum submergitur, & datum intra fluidum locum servat.

COROLLARIUM V.

99. Si corpus specifice levius in fluido graviori totum submergitur, a columnis collateralibus ea vi ad ascensum urgetur, quæ æqualis est excessui fluidi volumine solido æqualis, supra pondus solidi (§. 75 *Mechan.*).

COROLLARIUM VI.

100. Corpus adeo specifice levius fundo vasis incumbens non attollitur, nisi fluidum gravius affusum ultra partem assurgat quæ volumine æqualis est fluido ejusdem cum solido toto ponderis.

THEOREMA XIX.

101. *Gravitas specifica solidi est ad gravitatem specificam fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi solido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immersæ (§. 94). Cum adeo gravitates specificæ æquiponderantium sint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immersæ ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA XX.

102. *Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immersæ sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Etenim pars immersa solidi A æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore A ponderis; & pars immersa solidi B æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Est vero gravitas solidi A æqualis gravitati solidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* consequenter gravitas fluidi expulsi eadem. Ergo pars immersa ipsius A est æqualis parti immersæ ipsius B. *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

103. *Solidorum æqualium gravitates specificæ sunt ut partes eorundem in eodem fluido demersæ.*

DEMONSTRATIO.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demersæ sunt ut gravitates fluidi expulsi (§. 130 *Mechan.*), adeoque ut gravitates absolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates specificæ sunt ut absolutæ (§. 26); consequenter gravitates specificæ solidorum æqualium A & B sunt ut partes immersæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

104. *Data gravitate pedis cubici fluidi, ex. gr. aquæ, una cum volumine partis immersæ solidi; invenire pondus totius corporis.*

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis solidi æquale est ponderi fluidi quod idem cum parte immersa volumen habet (§. 94); ad pedem cubicum, volumen partis immersæ, & gravitatem pedis cubici unius fluidi quærendus est numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

Ex. gr. Pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64). Si itaque fuerit volumen partis immersæ 40 pedum cubicorum: reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA XII.

105. *Data gravitate ex. gr. unius pedis cubici aquæ, & gravitate solidi; invenire volumen partis immergendæ.*

RESOLUTIO.

Cum sit ut gravitas unius pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis, ita pes.

pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per Regulam trium invenitur.

Ex. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ eſt librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XIII.

106. *Datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris, una cum gravitate fluidi ſpecifice gravioris; invenire vim qua illud ſub hoc demerſum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis iſta æqualis eſt exceſſui ponderis fluidi ſub eodem volumine, quod habet ſolidum ſubmerſum, ſupra pondus hujus (§. 99).

1. Ex datis volumine ſolidi, & gravitate unius pedis cubici aquæ, quæratur per Regulam trium gravitas fluidi ſub æquali volumine.

2. Inde ſubtrahatur pondus ſolidi: ita nimirum vis quæſita relinquetur.

Ex. gr. Quæritur, qua vi opus ſit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, ſub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ eſt 70 librarum (§. 64); pondus aquæ ſub volumine 8 pedum eſt 560. Unde ſi ſubducatur pondus ſolidi 100, relinquitur vis ad detinendum ſolidum ſub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus ſpecifice levius eadem vi aſcendit in fluido graviori, qua ad aſcenſum ejus impediendum opus eſt (§. 75 *Mechan.*); per præſens Problema invenitur quoque vis, qua ſolidum ſpecifice levius in fluido graviori aſcendit.

PROBLEMA XIV.

108. *Inſtrumentum conſtruere, quo explorare licet quantum ſalis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.

1. Ex tenui lamina cuprea conſtruatur globus AB cum tubo BC ejus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur. Fig.

2. Granula plumbea globo AB indantur, donec inſtrumentum in D uſque immergatur.

3. Pondus totius aquæ, in qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum ſalis ſit in ea diſſolvendum, ut partem ponderis centeſimam abſolvat.

4. Poſtquam igitur tantum ſalis in aqua fuerit diſſolutum, inſtrumentum denuo in ea mergatur, noteturque punctum E, quod hæret in ſuperficie aquæ ſalſæ. Ita nimirum conſtabit terminus immerſionis in aqua, quæ ſub volumine 100 librarum ſalis libram unam comprehendit.

5. Quodſi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immerſionis in aqua, ſub volumine 100 librarum, duas, tres,

quæ

quatuor &c. libras ſalis continente; inſtrumento hoc explorare poteris, quantum ſalis in aqua data contineatur.

Demonstratio.

Quodſi enim inſtrumentum in aqua ſalſa mergatur, ſtatim apparebit quot libræ ſalis in aqua ſalſa centum librarum contineantur. Quamobrem ſi pondus aquæ ſalſæ exploretur, per Regulam trium invenitur quantitas ſalis in ea diſſoluti. *Q. e. d.*

Scholion I.

109. *Ut Problema præſens rectius intelligatur, exemplo ſequente id illuſtrare libet. Sit gravitas aquæ puræ* 2000 *ſcrupulorum. Divide* 2000 *per* 99, *quotus* $20\frac{20}{99}$ *indicabit, quot ſcrupula ſalis in aqua diſſolvenda, ut ponderis centeſimam partem conſtituat. Divide ulterius* 2000 *per* 98, *quoti* $20\frac{40}{98}$ *duplum* $40\frac{80}{98}$ *indicat, quantum ſalis in aqua ſit diſſolvendum, ut ſit* $\frac{2}{100}$ *totius ponderis. Divide ſimiliter* 2000 *per* 97, *quoti* $20\frac{60}{97}$ *triplum* $61\frac{83}{97}$ *indicat, quantum ſalis in aqua diſſolvi debeat, ut ſi* $\frac{3}{100}$ *totius ponderis* &c. *Enimvero cum non ſine tædio, ad ſingula diviſionum puncta invenienda, aqua pura uti liceat; numerum ſequentem continuo ſubduc a proxime præcedente; reſiduum enim indicabit quantum adhuc ſalis ſit addendum ad inveniendum punctum proxime ſequens.* Ex. gr. *ubi in aqua diſſolveris ſalis* $20\frac{20}{99}$ *pro inveniendo puncto* E: *ut alterum* F *reperias addenda ſunt inſuper ſcrupula* $20\frac{2}{9}$ *fere, quæ eſt differentia inter* $20\frac{20}{99}$ *&* $40\frac{80}{98}$.

Scholion II.

110. *Similia inſtrumenta ex vitro conſtrui ſolent; tubo* BC *in partes æquales diviſo, & hermetice in* C *ſigillato, globo vero geminato, ad examinandam fluidorum gravitatem ſpecificam* (*§.* 101). Fig. 14.

Problema XV.

111. *Data gravitate vaſis ex materia ſpecifice graviori parandi, & gravitate fluidi ſpecifice levioris; determinare cavitatem quam habere debet, ut fluido ſupernatet.*

Resolutio.

Cum detur pondus fluidi ſub volumine unius pedis cubici, *per hypoth.* volumen fluidi vaſi pondere æqualis per Regulam trium inveniri poteſt. Quodſi ergo cavitas paulo major fiat, vas ſub eodem volumine minus ponderis continebit quam fluidum; adeoque eodem ſpecifice levius erit (§. 5); conſequenter ipſi ſupernatabit (§. 94).

Ex. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ ſupernatans, cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici eſt 70 librarum; reperietur volumen aquæ 30 librarum 428'' 571''', adeoque cubus diametri ſphæræ 818924 (*§.* 552 *Geom.*): unde radix cubica extracta 9'' 3''' eſt diameter ſphæræ aqueæ 30 librarum. Quodſi ergo diameter cavitatis fiat paulo major ex. gr. unius pedis, eo minor ipſius pars mergetur, quo major fuerit diameter.

PROBLEMA XVI.

112. *Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam specifice leviori volumen habentis, cujus pondus datur.*

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque solidum specifice gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi sub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero specifice leviori quam fluidum, & massa utriusque simul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque massa volumen habentis (§. *cit.*).
3. Quodsi itaque ab hoc pondere subducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore specifice leviori volumen habentis.

Ex. gr. Sit in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{3}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{3}$; reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis 16 librarum.

THEOREMA XXII.

Fig. 15. 113. *Vis quæ requiritur ad vas vacuum* DFEG *ad lineam* AC *in aquam immergendum, ad quam aqua plenum immergitur, æquatur vi tantundem aquæ in aëre sustentanti.*

DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aëre sustentans gravitati ejus æqualis est. Sed vis vas vacuum DFEG ad lineam AC in aquam immergens æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eadem ad eandem lineam AC vas immergit, *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vase contentam in aëre sustentare valet.

THEOREMA XXIII.

114. *Vis, quæ impenditur in solidum specifice levius sub fluido graviori detinendum, itemque pondus a solido graviori in fluido leviori amissum, gravitati fluidi accrescit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in solidum specifice levius sub fluido graviori detinendum, premit fluidum subjectum, adeoque perinde est ac si massa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc massa, utpote unum grave cum fluido constituens, una cum eodem ponderaret. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a solido specifice graviori in fluido leviori amissum a fluido sustentatur, ceu patet ex demonstratione Theorem. 14 (§. 55). Sed pondus quod fluido incumbit unum cum eodem totum constituit; adeo-

que perinde cum eo g[illegible]itare debet, ac si massa fluidi tantundem p[illegible] [illegible]ans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

115. Hinc Problema 13 (§. 106) etiam experimentando resolvere licet.

COROLLARIUM II.

116. Liquet etiam, vim nullam perdi; sed tantum aliorsum impendi in corporum gravitatione.

SCHOLION.

117. *Præsens Theorema, si volupe fuerit, non minus ac præcedentia omnia Experimentis facile comprobantur. Respondent Experimenta in istiusmodi materiis Examinibus arithmeticis, uti jam innuimus in* Arithmeticæ Elementis (§. 125).

THEOREMA XXIV.

118. *Si corpus specifice levius quodam fluido, cum corpore quod eodem specifice gravius est quomodocunque conjungatur, ut unum absque altero moveri non possit; fueritque excessus fluidi istius supra pondus specifice levioris in eodem demersi æqualis excessui ponderis specifice gravioris supra pondus fluidi sub eodem volumine; corpora ista simul sumpta eandem cum fluido gravitatem specificam habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim gravitas corporis specifice gravioris, tantum excedit gravitatem fluidi sub eodem volumine, [illegible]tantum gravitas fluidi excedit gravitatem [illegible]oris specifice [illegible] eodem volumin[illegible], *per hypoth.* in volumine fluidi, quod voluminibus utriusque corporis simul sumptis æquale est, tantundem præcise gravitatis inest, quanta est gravitas utriusque corporis simul. Quamobrem cum corpora ista ita conjuncta, ut unum absque altero moveri non possit, *per hypoth.* adeoque vi gravitatis suæ simul deorsum nitantur (§. 4 *Mechan.*), consequenter quoad gravitationem pro uno eodemque corpore haberi debeant; simul sumpta eandem cum fluido isto gravitatem specificam habent (§. 5, 6). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

119. Quia solidum ejusdem gravitatis specificæ cum fluido in eodem totum submergitur, & datum intra fluidum locum servat (§. 98); corpora diversæ gravitatis specificæ inter se & cum fluido, in hypothesi Theorematis, tota simul in fluido demerguntur, datumque intra ipsum locum servant; consequenter nec ascendunt nec descendunt.

THEOREMA XXV.

120. *Vis corpus solidum in fluido specifice leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis, ut excessus voluminis supra partem qua in fluido isto mergitur ad hanc partem.*

DEMONSTRATIO.

Quodſi in volumine corporis tantun- [illegible] gravitatis contineretur [illegible] in æquali volumine flu[illegible] ineſt, totum in eodem ſubmergeretur, & datum in eodem locum ſervaret, vi nulla extrinſecus accedente (§. 98). Quare cum ſub volumine fluidi quod parti immerſæ ſolidi æquale eſt tantum gravitatis inſit quantum per totum corpus diffunditur (§. 94); vis, quæ extrinſecus ſuperaccedere debet, ut ſolidum in dato loco intra fluidum detineatur, æqualis eſt gravitati fluidi per volumen diffuſæ, quod æquale eſt exceſſui corporis ſolidi integri ſupra partem qua in fluido mergitur vi gravitatis propriæ. Enimvero in fluido tanquam gravi homogeneo gravitas eſt volumini proportionalis (§. 130 *Mechan.*). Ergo vis ad corpus ſolidum in fluido ſpecifice leviori detinendum requiſita eſt ad gravitatem totius ſolidi, uti exceſſus voluminis ſupra partem in eodem vi gravitatis propriæ immerſam ad hanc partem immerſam. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVI.

121. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice leviori demerſum detinens eſt ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum ſpecificarum ſolidi atque fluidi, ad gravitatem ſpecificam ſolidi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim gravitas ſpecifica fluidi ad gravitatem ſpecif[illegible] ſolidi, ut volumen to[illegible] ſolidi ad partem ejus qua [illegible] fluido vi gravitatis propriæ demergitur (§. 101). Ergo differentia gravitatum ſpecificarum fluidi & ſolidi eſt ad gravitatem ſpecificam ſolidi, ut exceſſus voluminis ſolidi ſupra partem immerſam ad hanc ipſam partem (§. 193 *Arithm.*). Quoniam itaque vis in fluido corpus ſpecifice levius ſuſpenſum detinens eſt ad gravitatem ejus, ut exceſſus voluminis ſupra partem qua vi gravitatis ſuæ in eodem demergitur ad hanc partem (§. 120); erit etiam eadem vis ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum ſpecificarum ſolidi ac fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

122. *Dato pondere corporis fluido ſpecifice gravioris, una cum parte ejuſdem in fluido amiſſa; dataque ratione gravitatis ſpecificæ fluidi ac corporis alicujus ſpecifice levioris: invenire pondus ejuſdem quod requiritur, ut ſpecifice graviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Subtrahatur pars ponderis, quam corpus ſolidum ſpecifice gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato; ut relinquatur vis quæ ſolidum intra fluidum in dato loco detinere poteſt (§. 75 *Mechan.*).

2. Ex

2. Ex data gravitate ſpecifica fluidi & corporis ſpecifice levioris, atque vi ad ſuſtentandum ſpecifice gravius intra fluidum modo reperta, ſeu, quod perinde eſt, ad detinendum ſpecifice levius a graviori requiſita; inveſtigetur gravitas totius corporis ſpecifice levioris: quod vi Theorematis præcedentis (§. 121) per Regulam trium, (§. 302 *Arithm.*) reperiri poteſt. *Q. e. i. & d.*

Corollarium I.

123. Quoniam ſolidum ejuſdem gravitatis ſpecificæ eſt cum fluido quod datum intra fluidum locum ſervat (§. 98), cum ſpecifice gravius in eodem deſcendat (§. 88), ſpecifice levius aliqua tantum ſui parte mergatur (§. 94); per præſens Problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido ſpecifice levius, alterum ſpecifice gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem ſpecificam habens.

Corollarium II.

124. Si pondus corporis ſpecifice levioris tantiſper augeatur; ſpecifice gravius ad ſuperficiem fluidi attollet.

Scholion.

125. *Theorema præſens cum ejus Corollariis etiam per Theorema 24 (§. 118) demonſtrari poterat.*

Theorema XXVII.

126. *Vis corpus ſolidum in fluido ſpecifice leviori ſuſtentans eſt ad pondus ejuſdem, ut differentia gravitatum ſpecificarum illius ac fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi.*

Demonstratio.

Eſt enim gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi, ut pondus integrum ſolidi ad partem ejus in fluido amiſſam (§. 59). Quamobrem convertendo erit, ut differentia gravitatum ſpecificarum ad gravitatem ſolidi, ita exceſſus ſolidi ſupra fluidum ad pondus ſolidi integrum (§. 193 *Arithm.*). Eſt vero exceſſus ſolidi ſupra fluidum æqualis vi ad ſolidum intra fluidum ſuſtentandum requiſitæ (§. 89). Ergo hæc vis eſt ad pondus integrum ſolidi ſuſtendandi, ut differentia gravitatum ſpecificarum ad gravitatem ſolidi. *Q. e. d.*

Problema XVIII.

127. *Datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi ſpecifice gravioris, nec non gravitate ſpecifica ejuſdem fluidi & corporis ſolidi eodem ſpecifice gravioris; invenire quantum hujus pondus eſſe debeat, ut ſpecifice leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Ex datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi ſpecifice gravioris; inveniatur vis ad ſolidum in fluido detinendum requiſita

ſita (§. 106): quæ erit exceſſus ſolidi ſpecifice gravioris ſupra pondus fluidi mole æqualis (§. 89). Unde

2. ex data ratione gravitatum ſpecificarum ſolidi ſpecifice gravioris & fluidi, atque vi iſta, ſeu exceſſu prædicto; invenitur pondus ſolidi ſpecifice gravioris cum leviori conjungendum, ut idem in fluido ſuſtentet (§. 118). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quodſi ſolidi ſpecifice gravioris pondus tantiſper augeatur, cum ſpecifice leviori una deſcendet, ſeu ſpecifice levius ad fundum ſecum abripiet.

SCHOLION.

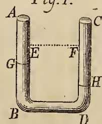
129. *Non abſimili modo plura alia Problemata ſolvi poſſunt, quæ in Philoſophia Experimentali, & Vita communi, ac Arte, uſum ſuum habere poſſint.*

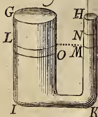
FINIS HYDROSTATICÆ.

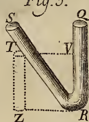


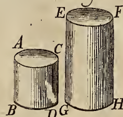
ELEMEN-

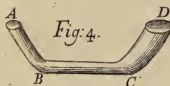
Fig Hydrost.

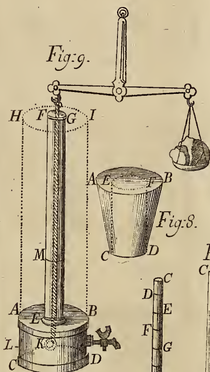

Fig:1.
A
C
E
F
G
H
B
D

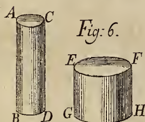

Fig:2.
G
H
L
N
O
M
I
K


Fig:3.
S
Q
T
V
Z
R


Fig:5.
E
F
A
C
B
D
G
H


Fig:4.
A
D
B
C


Fig:9.
H
F
G
I
A
E
B
Fig:8.
C
D
M
A
E
B
L
K
C
D


Fig:6.
A
C
E
F
B
D
G
H

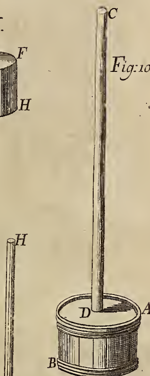
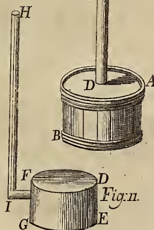
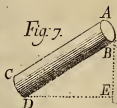

Fig:10.
C
D
A
B

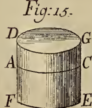

Fig:13.
C
D
E
F
G
B
A


Fig:14.
C
B
A


Fig:12.
D
F


Fig:11.
H
F
D
I
G
E


Fig:7.
A
B
G
C
D
E
F


Fig:15.
D
G
A
C
F
E



ELEMENTA AEROMETRIÆ.

PRÆFATIO.



MULTO jam tempore in more poſitum, ut Phyſicæ quædam capita in numerum diſciplinarum mathematicarum relata fuerint, poſtquam, facta ad Experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ, & Analyſeos, hoc eſt, Matheſeos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia ſane de cauſa Hydroſtatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Aſtronomia in numero iſto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus Aëris more Geometrarum & ex principiis Matheſeos puræ demonſtrari, demonſtrata ad varios uſus dextre applicari poſſint; Anno 1709, numerum Diſciplinarum mathematicarum augere animum induxi, editis *Aërometriæ Elementis*, quæ anno ſequente 1710, in Tomo ſecundo Elementorum Matheſeos Germanicorum, Hydroſtaticæ ſubjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto majori jure locum ſemel adeptum tuetur, quod Hydraulica, dudum in Matheſin recepta, in multis opem ejus imploret.

ploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydroſtatica; ita Aërometria Hydraulicam illuſtrat. Antequam igitur ad Aërometriam animum appellas, Hydroſtaticæ dogmatibus eundem imbuas opus eſt. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriam tibi ſociam jungas e re tua omnino eſſe deprehendes. Jucundum vero eſt Aërometriæ ſtudium, idemque utiliſſimum; tum quod inde ratio plurimorum Naturæ Phænomenorum deſumitur, tum quod variarum Machinarum ac Inſtrumentorum ſtructura in ea continetur. Ut brevitati conſulatur & ſequentia antecedentibus reſpondeant, non integra exhibeo Aërometriæ Elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita eſſe modo memini, ſed quæ digniora reliquis viſa ſunt in compendio exhibere & nonnullis augere conſtitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris conſentientibus, iis potiſſimum commendo, quibus curæ cordique fuerit ad Experimenta applicare Matheſin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem conſequantur ex animo apprecor.



ELE-

ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Aërometriæ.

DEFINITIO I.

1. A*Erometria* est Scientia metiendi Aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem sit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam investigare (§. 23 *Geom.*); in Aërometria tradendæ sunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia, & extensionis terminos vel intensitatis gradus habentia, accurate determinari possunt.

DEFINITIO II.

3. *Aër* est corpus fluidum Telluri circumfusum, & spatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, nisi impediatur.

SCHOLION.

4. *Definitionem Aëris nonnisi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuisse notam aëre præsente semper obviam, ex qua ejus præsentia certo colligi potest.*

DEFINITIO III.

5. *Compressio* est coarctatio massæ in minus volumen per impulsum aut pressuram alterius corporis facta.

DEFINITIO IV.

6. *Condensatio* est coarctatio massæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO V.

7. *Dilatatio* est expansio massæ in majus volumen quam facta compressione habuerat.

DEFINITIO VI.

8. *Rarefactio* est expansio massæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO VII.

9. *Elater aëris* est vis qua vi comprimente sublata dilatatur.

AXIOMA I.

10. *Quo corpus est gravius, eo magis premit alia sibi subjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione Gravitatis* (§. 4 Mechan.). *Corpus scilicet vi gravitatis nititur deorsum, adeoque premit alterum descensui resistens. Quo majore itaque vi deorsum nititur, eo magis quoque premit alterum sibi subjectum.*

Axioma II.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem est; elater quoque immutatus sit necesse est: quodsi vero elater majorem dilatationem produxerit, crevisse; sin minorem, decrevisse censendus est.*

Experientia I.

13. *Promove celeriter manum per spatia quæ vacua esse videntur, faciem versus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipsam non contingat.*

Corollarium.

14. Necesse est adeo, ut interstitia inter corpora terrestria quæ vacua esse videntur, materia quadam repleantur, cujus partes sint admodum subtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod subtilissimum occupat (§. 3 *Hydrostat.*), hoc est, aër datur (§. 3).

Experientia II.

15. *Globo cupreo aut orichalceo satis capaci afferruminetur epistomium cum cochlea fœmina, ita ut syrinx, mediante cochlea mari, ad arbitrium ei adaptari rursusque removeri possit. Quodsi ope syringis plus aëris in globum intrudas, eumque clauso epistomio bilanci imponas; pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epistomium rursus aperies; aërem erumpere animadvertes, & globus metallicus recuperabit pondus quod ante intrusionem aëris habuerat.*

Scholion.

16. *Experimentum hoc excogitavit* Galilæus Galilæi, *lagena vitrea usus* (a); *sed cum vasa vitrea ab aëre compresso facile nec sine periculo adstantium frangantur, ego metallico uti soleo, in gratiam curiosorum idem repetens.*

Corollarium I.

17. Quoniam in globum metallicum plus aëris intrudi potest quam ordinarie capit; evidens est, aërem in minus volumen coarctari posse quam ordinarie occupat. Comprimi ergo potest (§. 5).

Corollarium II.

18. Cum epistomio aperto aër rursus egrediatur, ipsoque egresso pondus pristinum recuperet globus quod ante compressionem aëris in ipso factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præcise aëris rursus egressum quantum intrusum fuerat. Aër itaque compressus ad pristinam expansionem redit, si vis comprimens aut expansioni resistens removeatur; adeoque elatere gaudet (§. 9).

Corollarium III.

19. Certum itaque compressionis indicium est, quod aër intra vas quoddam magis compressus sit quam externus, si orificio ejus aperto, cæteris paribus, aëris quædam portio egredi observetur.

Corollarium IV.

20. Denique quia pondus vasis augetur, si aër intra ipsum comprimitur; massa aërea nisum exerceat opus est deorsum juxta lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 *Mechan.*). Gravis ergo existit (§. 4 *Mechan.*).

Corollarium V.

21. Premit ergo corpora subjecta secundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215 *Mechan.*).

Ex-

(a) *Mechan.* Dialog. 1. p. m. 71.

EXPERIENTIA III.

22. *Quodsi veſicam aëre mediocriter repletam firmiterque conſtrictam ad ignem admoveas; ea non ſolum diſtenditur, ſed & ingenti prorſus fragore tandem diſrumpitur. Quodſi vero eam ab igne removeas antequam diſrumpatur, ſtatim flaccida evadit.*

COROLLARIUM I.

23. Cum intra veſicam nil niſi pauculum aëris contentum fuerit; expanſio veſicæ expanſionem aëris incluſi arguit. Aër itaque rareſit (*§. 8*).

COROLLARIUM II.

24. Quia calore exſpirato veſica diſtenta rurſus flaccida fit; frigore in volumen minus rurſus coarctatur, adeoque condenſatur (*§. 6*).

EXPERIENTIA IV.

25. *Si aër in vaſe comprimatur, ejus quandam portionem aperto orificio ex ipſo iterum exſpirare notabis in quacunque orificii directione.*

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aëris nititur quaquaverſum ſecundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA V.

Tab. I. Fig. I. 27. *Si tubum oblongum* AB, *cujus altitudo 32 pedibus Rhenanis major, in* C *epiſtomio inſtructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius* A *in aquam immergas, & aperto orificio* B *epiſtomium aperias; aqua tota cum impetu effluit: ſi vero obturato orificio* B *epiſtomium* C *recludas; aqua uſque ad* D *deſcendit, ac in altitudine 31 pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vaſe* GH *contentæ pendula hæret.* Tab. I. Fig. I.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendulæ aquam in vaſculo ſibi ſubjectam premit, nec tamen deſcendit; neceſſe eſt, ut, ſi aqua in vaſculo contenta in iſtiuſmodi columnas diviſa concipiatur, qualis eſt quæ tubo AB ſubjacet, ſingulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum ſuperficiei aquæ incumbit aër (*§. 3*), eamque premit (§. 21). Columna igitur aërea a ſuperficie aquæ in vaſculo contentæ uſque ad extremitatem atmoſphæræ extenſa, eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo ſuper eadem baſi, ſed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. *36 Hydroſt.*).

SCHOLION.

29. *Hoc æquilibrium aëris cum aqua primus obſervavit Hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra* 18 *cubitos attolli non poſſe miratus, atque cum* GALILÆO *Phænomenon inſperatum communicavit, ipſe cauſam ejus ignorans* (*a*). *Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter* MARIOTTUS (*b*) *altitudinem aquæ in tubo pendulæ reperit 32 pedum Pariſienſium.* Evangeliſta TORRICELLUS, *diſcipulus* GALILÆI, *aquæ ſubſtituit mercurium, cujus altitudo, utpote quatuordecies gravioris aqua, reperitur 28 circiter digitorum Rhenanorum* (§. *36* Hydroſt.).

Nn 2 CAPUT

(*a*) *Mechan.* Dial. 1. p. m. 15. 16.
(*b*) *Traité du mouvement des Eaux.* part. 2. Diſc. 1. p. 9.

CAPUT II.

De Elatere & Gravitate Aëris.

THEOREMA I.

30. *Elater aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis.*

DEMONSTRATIO.

Aër enim superior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

31. Quoniam pondus aëris superioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aëris basis, sed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aëris inferioris eidem columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHOLION.

32. *Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus in posterum, brevitatis gratia*, Pondus Atmosphæricum.

COROLLARIUM II.

33. Elater aëris inclusi, si cætera cum ambiente externo paria sint, æquatur similiter ponderi totius superioris incumbentis.

COROLLARIUM III.

34. Inclusus adeo aër eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM IV.

35. Ergo etiam hic mercurium ad altitudinem 28 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo suspendit (§. 28. 29).

THEOREMA II.

36. *Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur; aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet, eamque replebit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim aër in statu compressionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expansionem nititur (§. 9) & quidem quaquaversum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum nisui huic nihil resistat, expansio per cavitatem vasis actu sequetur (§. 75 *Mechan.*). Et quia, si aliquod spatium vacuum intra cavitatem vasis ab aëre irruente non occupatum supponamus, illud instar vasis vacui intra aërem aperti considerari potest; aër in vas irruens etiam hoc spatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit, eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo syrinx orificio alicujus vasis firmiter infigatur, & embolus postea extrahatur, aër in vase contentus per siphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO VIII.

38. *Antlia Pneumatica* est Machina, qua mediante aër ex vasis educi potest.

SCHOLION.

39. *Primus Antliæ Pneumaticæ inventor est* Otto de Guericke, *Consul* Magdeburgicus, qui

qui Experimenta sua jam sub finem Comitiorum Imperialium, anno 1654 Ratisbonæ *celebratorum, in præsentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit* (*a*). *Utut vero inter exteros non desint, qui laudem inventionis* Roberto BOYLIO, *Experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis* Robertus HOOKIUS, *recensente* Cl. WALLERO (*b*), *& ex Gallis*, Joannes Baptista DU HAMEL *variis scriptis celebris* (*c*); *ipse tamen* BOYLIUS, *pro eo qui decet virum doctum candore* (*d*), *agnoscit quod* Otto DE GUERICKE *ipsum prævenerit, quodque ipse ab iis quæ* Casparus SCHOTTUS, *in* Mechanica Hydraulico-pneumatica *A.* 1657 *edita, de vasis vitreis a* GUERICKIO *ab aëre evacuatis publicaverat, ad sua Experimenta, & Antliæ Pneumaticæ constructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipse* GUERICKIUS (*e*): *aliud artificium embolum extrahendi applicuit* BOYLIUS, *quo nunc ordinarie utuntur. Recentius structuram Antliæ Pneumaticæ immutavit* HAUKSBEIUS, *Mechanicus Anglus, cujus formam describit* Cel. s'GRAVESANDIUS (*f*), *ipseque inventor delineat* (*g*).

PROBLEMA I.

40. *Antliam Pneumaticam construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. 1. Paretur cylindrus AB ex orichalco, intus cavus & satis capax, cujus interior superficies optime polita, ut embolus DE arctissime ipsam undiquaque contingat, ne ulli moleculæ aëreæ inter eam & embolum locus relinquatur. Tab. I. Fig. 2.

2. Embolus constare debet ex orbibus coriaceis firmiter sibi mutuo appressis, mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum est bubulum, ex quo succingula militum parari solent. Probe autem notandum est, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis suillæ excoctæ permixtum, ne successu temporis indurescat.

3. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ, manubrio NO versato, commode extrahi ac intrudi possit.

4. In B afferruminetur basi cylindri tubulus BFKL cum epistomio GHI, ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico solido I composito.

5. Denique tubulus KL in L instruatur cochlea, ut vasa quorum orificia cochleis fœminis seu matricibus instructa, ad eundem firmari possint. Eodem modo adaptandus est, quoties usus postulat, catinus orichalceus PQ, cui vitra campaniformia commode imponere liceat.

Dico ex vasis ad hanc Machinam firmatis aërem educi posse.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur, epistomio versus antliam AB & tubulum KL aperto, aër in vase contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavi-

(*a*) Vid. Præfatio ad *Experimenta nova Magdeburgica.*
(*b*) In Vita HOOKII *Operibus* ejus *posthumis* præmissa f. 3.
(*c*) In *Philos. Vet. & Nov.* Tom. 4. Phys. gener. Tract. 2. dissert. 3. c. 10. p. m. 234.
(*d*) In Præf. ad *Nova Experim. Phys. Mech. de vi aëris elastica*, p. m. 3.
(*e*) L. c. f.
(*f*) In *Elementis Physicæ Mathematicis* Tom. I. Lib. 2. c. 6. p. 309. Edit. sec.
(*g*) *Physico - Mechanical Experiments.* p. 1. & seqq.

Tab. I. *Fig.* 2. tatem expanditur (§. 36). Quodsi jam epistomium claudatur versus tubulum KL, sit tamen apertum versus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rursus intrudatur; aër per epistomium FH extruditur; consequenter aeris aliqua portio ex vase educta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aëris ex vase educitur. Ope adeo Machinæ constructæ aër ex vasis educi potest. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

41. *In usu Antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini, & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad constructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum esse; ut embolus facile extrahatur & antliam undequaque arctissime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.*

SCHOLION II.

42. *In evacuandis vasis rationem habendam esse tantum vis elasticæ, ad quam solam in Demonstratione respeximus experimenta probant. Aërem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri docet expansio vesicæ sub campana suspensæ, firmiter constricto collo & nonnisi pauculo aëris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in* Actis Lipsiensibus (*a*) *ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari posset, atque fornicem vasis evacuandi fere attingentem. Quantum, per hunc tubum, aëris facta qualibet emboli agitatione ex vase educeretur, maxima cum circumspectione notavi: embolo enim intruso, donec aër in antlia contentus eandem cum externo densitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conspiciendos. Mox tubo isto remoto, evacuationem ejusdem vasis denuo tentavi: quam eadem prorsus ratione ut antea contingere didici. Usus autem sum vasis & majoribus, & minoribus eodem semper successu; estque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhenanorum. Quoniam vero doctissimis* Diarii Trevoltiensis *Collectoribus* (*b*), *quorum erga me humanitatem ut gratus prædicem fas est, hoc experimentum non sufficere visum est ad vim gravitatis ab evacuatione vasorum excludendam; ideo (§. 47) mox ex natura elateris id demonstrabimus, ut in* Aërometria *A.* 1709 *edita. Ceterum hæc ratio est, cur Antliæ situs ad horizontem inclinatus esse possit; nec opus sit ut, quod post* GUERICKIUM *etiam* BOYLIUS *& nuper* HAUKSBEIUS *fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.*

SCHOLION III.

43. *Aliud Antliæ genus ex duplici cylindro construxit experimentator industrius* Franciscus HAUKSBEE, *cujus descriptionem exhibent* Actorum Eruditorum *Collectores* (*c*). *Eam, pro more suo, in multis immutavit* LEUPOLDUS *variis inventionibus Mechanicis celebris* (*d*). *Sed cum in comprimendo aëre usus ejus sit nullus, qui tamen in experimentis frequens esse solet; nec vasa tam exacte evacuari posse videantur quam Antlia ordinaria utendo: ideo antiquum Antliæ genus huic recentiori præferendum esse judico, nisi accedat medela.*

THEO-

(*a*) A. 1711. mens. Jan. p. 14.

(*b*) *Mémoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts.* Août. 1711. art. 120. p. 1404.

(*c*) *Supplem.* Tom. V. Sect. 9. p. 403. Confer Autores ante, not. *f* & *g*, pag. præc. citatos.

(*d*) *Act. Erudit.* A. 1713. p. 95.

THEOREMA III.

44. *Aër Telluri circumfunditur; nec uno in loco altior esse potest quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus posterius. Dabitur ergo super aliqua Telluris parte spatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus existat, per spatium illud expandetur (§. 36). Impossibile igitur, ut intra aërem sit spatium aliquod ab aëre vacuum. Tale vero cum necessarium foret ob rotunditatem Telluris, nisi aër eam undiquaque ambiret; necesse est aërem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quodsi ponamus aërem uno in loco esse altiorem, quam in altero; aër vacuo contiguus statim expandetur (§. 36), adeoque non quiescet nisi undiquaque eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

45. Quare si cetera sint paria, duobus corporibus eandem basin habentibus, in æqualibus a centro Terræ distantiis, æqualia Atmosphæræ pondera incumbunt; adeoque ab aëre incumbente æqualiter premuntur (§. 42 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

46. In æqualibus itaque a centro Terræ distantiis, si cetera fuerint paria, aër eandem densitatem habet; adeoque sub æqualibus voluminibus massas æquales continet (§. 8 *Hydrost.*); consequenter æqualia volumina ejusdem gravitatis existunt.

THEOREMA IV.

47. *In eodem vase, vel etiam in vasis communicantibus, aër ubique eandem densitatem habet, si cætera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet densitatem, aut non. Ponamus aërem in vase uno esse rariorem, in altero densiorem. Illius ergo densitas per pressuram minoris ponderis producetur; hujus per pressuram majoris. Ast elater aëris æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo in aëre rariore minor vis elastica, quam in densiore. Quare cum aër uterque vi elateris quaquaversum sese expandere nitatur (§. 26); majore vi aër densior nititur versus rariorem, quam rarior versus densiorem. Ergo rarior cedet densiori (§. 75 *Mechan.*); comprimetur ergo ab elatere densioris (§. 5), & densior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aëri in utroque vase quies, nisi nisus aeris utrinque fuerit idem (§. 75 *Mechan.*), hoc est, nisi eandem densitatem habuerit, *per demonstrata.* Si igitur aër in utroque vase eandem densitatem non habuerit, ceteraque paria fuerint; ad eandem statim reducetur. In vasis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, cæteris paribus, aër ubique eandem densitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

48. Quare si embolo ex Antlia extracto aër ex vase ad ipsam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem Antliæ replet

replet cum eo, qui in vase evacuando residuus, densitatem eandem habet.

Corollarium II.

49. Est ergo massa aëris intra cavitatem Antliæ contenti ad massam aëris in vase evacuando residui, ut capacitas Antliæ ad capacitatem vasis (§. 17 *Hydrost.*).

Theorema V.

50. *In vase quod per Antliam evacuatur, semper est aër primitivus ad aërem residuum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad eam dignitatem elevatum cujus exponens æquatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam.*

Demonstratio.

Dicatur aër à prima agitatione emboli, residuus *aër residuus primus*; qui a secunda emboli agitatione restat, *aër residuus secundus*, & ita porro.

Quoniam aër in vase contentus est ad aërem in Antlia contentum, ut capacitas vasis ad capacitatem Antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aëre in vase & ex aëre in Antlia contento, hoc est aër primitivus, ad aërem in solo vase contentum, hoc est residuum primum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius (§. 190 *Arithm.*). Similiter demonstratur, esse quantitatem aëris residui primi ad quantitatem residui secundi, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius; & in eadem ratione esse quantitatem aëris residui tertii &c. Ergo factum ex aëre primitivo in residuum primum, secundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aëre residuo primo in secundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vasis & Antliæ junctim toties in se ducta emergens quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vasis solius multoties itidem in se ducta enascens (§. 213 *Arithm.*): hoc est, ut dignitas aggregati ex capacitate vasis & Antliæ junctim cujus exponens est numerus agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam (§. 250 *Arithm.*); consequenter aër primitivus ad residuum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Problema II.

51. *Dato numero agitationum emboli in Antlia factarum, una cum capacitate vasis & capacitate Antliæ; invenire rationem aëris primitivi ad residuum.*

Resolutio.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ, una cum logarithmo capacitatis vasis solius.
2. Logarithmus posterior e priori auferatur, &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus cui in Tabulis respondet numerus indicans quoties aër primitivus contineat residuum quæsitum.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580″, capacitas vasis 460″; erit aggregatum ex utraque 1040″. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aër primitivus ad residuum $6(3.0170333 - 2.6627578) = 2.1656530$, cui in Tabulis respondet numerus $146\frac{4}{10}$. Est igitur aër primitivus ad residuum ut $146\frac{4}{10}$ ad 1, hoc est, ut 1464 ad 10 seu ut 732 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitatis vasis $= v$, capacitas antliæ & vasis simul $= a$, numerus agitationum emboli $= n$, aër residuus $= 1$. Quoniam aër primitivus ad residuum, ut a^n ad v^n (§. 50); erit etiam primitivus ad residuum, ut $\frac{a^n}{v^n}$, ad 1 (§. 181 *Arithm.*); consequenter si residuus 1, Logarithmus primitivi est $n(la - lv)$ (§. 341, 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

52. *Data capacitate vasis evacuandi, & capacitate Antliæ; invenire numerum agitationum emboli ad aërem in data ratione dilatandum requisitum.*

RESOLUTIO.

1. Excerpantur ex Canone logarithmorum logarithmi aëris primitivi, aëris residui, capacitatis vasis, & aggregati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ.
2. Logarithmus aëris residui subducatur ex logarithmo aëris primitivi: similiter logarithmus capacitatis vasis auferatur ex logarithmo aggregati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ.
3. Differentia prior dividatur per alteram. Dico, quotum esse numerum agitationum emboli quæsitum.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580″, capacitas vasis 460″, aër primitivus ad residuum ut 1464 ad 10: reperietur numerus agitationum emboli $(3.0656530 - 1.0000000) : (3.0170333 - 2.6627578) = 21656530 : 3542755 = 6$.

DEMONSTRATIO.

Sit aër primitivus p, residuus r, reliqua sint ut in Demonstratione Problematis præcedentis: erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nla - nlv \quad (\text{§. } 341, 343 \; Arithm.)$$
$$(lp - lr) : (la - lv) = n. \quad Q.\ e.\ d.$$

PROBLEMA IV.

53. *Data ratione aëris primitivi ad residuum, una cum capacitate vasis & numero agitationum emboli; invenire capacitatem Antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit aër primitivus ad residuum $= p : r$, capacitas vasis $= v$, capacitas Antliæ $= x$, numerus agitationum emboli $= n$; erit

$$p : r = (v + x)^n : v^n \quad (\text{§. } 50)$$
$$lp - lr = nl(v + x) - nlv \quad (341, 343 \; Arithm.)$$
$$lv + (lp - lr) : n = l(v + x)$$

Inveniri adeo potest logarithmus aggregati ex capacitate vasis & Antliæ, consequenter ipsum hoc aggregatum. Quare si hinc auferatur capacitas vasis, relinquetur capacitas Antliæ.

Ex. gr. Sit $p:r = 1464:10$, $v = 460''$, $n = 6$; erit $l(v+x) = 2.6627578 + (3.0656530 - 10000000):6 = 26627578 + 3542755 = 30170333$. Ergo vi Canonis $v+x = 1040''$, consequenter $x = 580''$.

THEOREMA VI.

54. *Numeri agitationum emboli quibus ope duarum Antliarum in eodem vase vel æqualibus vasis aër ad eandem rationem cum aëre primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmi vasis a logarithmo aggregatorum ex capacitate vasis & capacitate Antliarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit ratio aëris primitivi ad residuum $= p:r$, capacitas vasis $= v$, Antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aëris primitivi ad residuum, in evacuatione per utramque Antliam facta, eadem *per hypoth.* si numeri agitationum emboli fuerint m & n; erit $(v+A)^m : v^m = p:r$ & $(v+a)^n : v^n = p:r$ (§. 50); consequenter $(v+A)^m : v^m = (v+a)^n : v^n$ (§. 167 *Arithm.*). Habemus itaque $ml(v+A) - mlv = nl(v+a) - nlv$ (§. 341, 343 *Arithm.*); consequenter $m:n = l(v+a) - lv : l(v+A) - lv$, hoc est, numeri agitationum emboli, quibus aër in eodem vase ope diversarum Antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vasis & aggregati ex vase & Antlia. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vase quodam dato, ope Antliæ datæ, aër residuus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorsus educitur; inveniri potest numerus agitationum emboli, quibus ope alterius Antliæ datæ, in eodem vase, aër residuus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorsus educitur.

PROBLEMA V.

56. *Invenire pondus unius pedis cubici aërei.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Vasis vitrei aut metallici BC satis capacis, figura sphærica, collo oblongo AB & epistomio D præditi, pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aëre ejusdem cum ambiente externo densitatis repletur. Quo facto Tab. Fig.
2. educatur aër (§. 40), &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore subductum relinquit pondus aëris educti.
5. Investigetur capacitas vasis (§. 556 *Geom.*), & ratio aëris residui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aëris residui per Regulam trium innotescet, a capacitate vasis subducendum, ut relinquatur volumen aëris educti. Quodsi Antlia accurate fuerit constructa, & tamdiu exerceatur quamdiu aër evacuatur; volumen aëris residui tantillum reperietur, ut tuto negligi, ipsaque capacitas vasis pro volumine aëris educti assumi possit.

6. Datis

6. Datis adeo pondere atque volumine aëris educti, per Regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aëris (§. 130 *Mechan.*).

SCHOLION.

57. *Methodo hac primum usus* Otto DE GUERICKE (*a*) *& post eum* Burcherus DE VOLDER, *qui sequentia annotavit* (*b*). *Pondus vasis sphærici vitrei aëre admisso erat* 7 *libr.* 1 *unc.* 2 *dr.* 48 *gr. aëre educto,* 7 *libr.* 1 *unc.* 1 *dr.* 31 *gr. aqua admissa* 16 *libr.* 12 *unc.* 7 *dr.* 14 *gr. Erat igitur pondus aëris* 1 *dr.* 12 *gr. seu* 77 *gr. pondus aquæ* 9 *libr.* 11 *unc.* 5 *dr.* 43 *gr. seu* 74743 *gr. consequenter ratio gravitatis specificæ inter aquam & aërem* $74743 : 77 = 970\frac{63}{77} : 1$. *Jam cum* VOLDERUS *pedem cubicum aquæ deprehendisset* 64 *librarum, inferendo ut* 970 *ad* 1, *ita* 64 *libræ seu* 1024 *unc. ad numerum quartum proportionalem, per Regulam trium pondus unius pedis cubici aërei* $506\frac{70}{97}$ *seu* 507 *gr. fere, hoc est* 1 *unc.* 0 *dr.* 27 *gr. reperit. Testatur autem, se usum esse bilance quæ, etiamsi vel* 25 *aut* 30 *libræ utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtove, in hanc illamve partem manifeste propenderet.*

PROBLEMA VI.

58. *Dato corporis cujuscunque volumine, una cum pondere ejusdem in aëre; invenire pondus ejusdem in vacuo.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aëris (§. 56).
2. Per Regulam trium, ex eodem & volumine corporis dati, investigetur pondus aëris mole huic æqualis (§. 130 *Mech.*).
3. Pondus hoc aëris subtrahatur a pondere corporis dato; quod relinquitur erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55 *Hydrost.*) *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Pondus unius pedis cubici aërei est 507 gr. (§. 57), pondus trium pedum cubicorum aquæ 210 librarum (§. 64 *Hydrost.*) seu 209 libr. 15 unc. 7 drach. 60 gran. Pondus trium pedum cubicorum aëris reperitur 1521 gr. seu 3 unc. 1 dr. 21 gr. Pondus adeo trium pedum cubicorum aquæ in vacuo 209 lib. 12 unc. 6 dr. 39 gr.

PROBLEMA VII.

59. *Data basi columnæ atmosphæricæ, invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Basis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipsi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ (§. 539, 541 *Geom.*).
2. Quæratur ad volumina unius pedis cubici, & columnæ illius, atque pondus unius pedis cubici aquæ, numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmosphæricæ æquiponderantis (§. 130 *Mech.*), hoc est, pondus ipsius columnæ atmosphæricæ quæsitum.

Ex. gr. Sit diameter circuli 100'', erit area 7850''' (§. 429 *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100''' (§. 27); erit volumen ejus 24335'', consequenter, cum 1000'' sint 70 fere librarum (§. 64 *Hydrost.*) pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ seu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque cujus diameter unius pedis, ab aëre eadem vi premitur, ac si pondus 1703 librarum incumberet.

(*a*) *Experiment. de Vacuo* lib. 3. c. 21. f. 101.
(*b*) In *Quæstionibus Academicis de aëris gravitate.* Thes. 52. p. 35. & seqq.

COROLLARIUM.

60. Quodsi diameter sphæræ fuerit unius pedis, basis columnæ atmosphæricæ incumbentis est circulus cujus diameter unius pedis. Quare cum hemisphærium inferius ab elatere aëris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemisphæria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA VII.

61. *Diversa plana premuntur ab aëre in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Pressio enim eadem, quæ foret si aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana subjecta gravitaret (§. 28); consequenter pressiones diversorum planorum ab aëre factæ sunt in ratione planorum istorum (§. 573 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Quare si plana quæ ab aëre premuntur fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

63. Quoniam aër premit secundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), superficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quomodocunque composita, eadem premitur vi, qua premitur planum horizontale eidem subjectum; consequenter pressiones superficierum quarumcunque sunt ut plana horizontalia iisdem subjecta.

SCHOLION.

64. *In hypothesi Propositionis tacite supponitur situm planorum esse horizontalem: ex Demonstratione autem apparet Theorema cum suis Corollariis ad omnem pressionem a fluido gravi factam extendi posse.*

CAPUT III.

De Compressione Aëris.

PROBLEMA VIII.

65. *Aerem intra vas comprimere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. 1. Epistomio IHG respectu vasis clauso, respectu Antliæ vero aperto, embolus ex Antlia Pneumatica extrahatur: quo facto, aër externus in cavitatem Antliæ ruet (§. 36).

2. Converso epistomio, ita ut communicato inter vas & cylindrum detur, superius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur; aër ex Antlia in vas expelletur, quod cum jam aëre alio sit plenum, novum intrusum recipere nequit, nisi facta utriusque compressione (§. 5). Excipiet vero hospitio suo adventantem hunc hospitem, cum comprimi possit (§. 17). Tab. Fig.

3. Repetita igitur hac operatione, aër continuo magis magisque comprimitur. *Q. e. f.*

THEOREMA VIII.

66. *Aër primitivus est ad aërem in vase ope Antliæ Pneumaticæ dato agitationum emboli numero compressum, ut capacitas vasis ad aggregatum ex capacitate vasis & facto capacitatis Antliæ in numerum agitationum emboli.*

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliæ $= a$, capacitas vasis $= v$, numerus agitationum emboli $= n$. Erit aër primitivus in antlia ad aërem in vase, ut a, ad v (§. 17 *Hydrost.*). Incrementum igitur massæ in vase, dato numero agitationum emboli n, est ut na; consequenter aër compressus ut $na + v$. Unde compressus ad primitivum ut $na + v$ ad v. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate Antliæ 580, & capacitate vasis 260, seu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aëris compressi ad primitivum, ut $6 + 1$ ad 1 seu ut 7 ad 1.

PROBLEMA IX.

68. *Data ratione aëris primitivi ad compressum, una cum ratione capacitatis Antliæ ad capacitatem vasis; invenire numerum agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.*

RESOLUTIO.

Sit ratio aëris primitivi ad compressum $= p : c$, ratio Antliæ ad vas $= a : v$, numerus agitationum emboli $= x$, erit (§. 66)

$$p : c = v : ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv) : pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aëris primitivi a compresso in capacitatem vasis, dividatur per factum ex aëre primitivo in capacitatem Antliæ; quotus est numerus agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum. Sit ex. gr. $p = 1$, $c = 7$, $v = 1$, $a = 2$; erit $x = 6 : 2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodsi fiat $p = v$, erit $x = (c - p)v : av = (c - p) : a$, hoc est numerus agitationum emboli invenitur, si differentia aëris primitivi a compresso per capacitatem Antliæ dividatur. Ita in nostro Exemplo $x = (7 - 1) : 2 = 3$.

PROBLEMA X.

70. *Data capacitate vasis in quo aër comprimendus, una cum ratione quam aer primitivus ad compressum habere debet, & numero agitationum emboli quibus ista compressio effici jubetur; invenire capacitatem Antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit capacitas vasis $= v$, aër primitivus $= p$, compressus $= c$, numerus agitationum emboli $= n$, capacitas Antliæ $= x$, erit (§. 66)

$$p : c = v : nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv) : pn = x$$

Quodsi fiat $p = v$; erit $x = (c - p) : n$.

Regula. Factum ex differentia aëris primitivi a compresso in capacitatem vasis, divida-

vidatur per factum ex aëre primitivo in numerum agitationum emboli compressionem efficientium; quotus erit capacitas Antliæ quæsita. Quodsi aër primitivus fuerit ut capacitas vasis, ejus a compresso differentia tantum dividenda est per numerum agitationum emboli.

Sit ex. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6.\ 290 : 3 = 2.\ 290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Est ergo $pn : c - p = v : x$, hoc est, capacitas vasis ad capacitatem Antliæ, est in ratione composita aëris primitivi ad ejus a compresso differentiam, & numeri agitationum emboli quibus ista compressio efficitur, ad unitatem (§. 159 *Arithm.*)

PROBLEMA XI.

72. *Invenire utrum aër comprimatur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 4. 1. Assumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC sit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.

2. Brachium minus EC hermetice sigilletur in C, majus in A sit apertum: utrumque in particulas æquales dividatur.

3. Pars tubi BE mercurio repleatur, ita ut CE sit aëre primitivo plenus.

4. Hinc ulterius per orificium A successive plus mercurii infundatur; notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio mercurius successive infusus pertingit.

Dico, si successive fuerint spatia in brachio minore super mercurio, reciproce ut differentiæ altitudinum ad quas in brachio majore mercurius successive subsistit 28 digitis auctarum, & altitudinum ad quas in minore mercurius ascendit; aërem comprimi in ratione ponderum. *Q. e. i.* Tab. Fig.

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aër in brachio minore CE a pondere atmosphærico comprimitur (§. 21), quod æquatur cylindro mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium basium sint ut altitudines (§. 573 *Geom.*); tum volumina aëris reducti sunt ut altitudines spatiorum a mercurio vacuorum in brachio minore EC, tum volumina mercurii in brachio majore sunt ut altitudines ad quas mercurius ascendit. In aërem vero minori brachio inclusum, præter pondus atmosphæricum, volumina mercurii gravitant, quorum altitudo est differentia inter altitudines ad quas in brachio minore & altitudines ad quas in majore successive pertingit (§. 34 *Hydrost.*). Quare pondera aërem inclusum comprimentia sunt ut differentiæ altitudinum ad quas successive in brachio minore mercurius ascendit ab altitudinibus ad quas in majore successive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18 *Hydrost.*). Quodsi adeo volumina aëris successive compressi in eadem ratione reciproca deprehendantur, aër omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

73. MARIOTTUS (*a*) notavit mercurium in brachio majore AB 8 pedum, ad altitudi-

(*a*) *Essai de la Nature de l'Air* p. 17. & seqq. *Operum* in Batavia recusorum Tom. 1. p. 153.

titudinem 18 digitorum ascendentem, in minore 12 digitorum, ad 4 digitorum altitudinem substitisse. Aëris itaque volumen cum a solo pondere atmosphærico premeretur, erat 12 digitorum; ast cum aër premeretur a pondere atmosphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc est, a pondere mercuriali 41 digitorum, erat volumen compressi 8 digitorum. Est vero 8 ad 12, ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, si in brachio minori mercurius ad altitudinem *6* digitorum assurgat, altitudinem in majore esse 34. Volumen ergo aëris compressi est *6* digitorum, hoc est, subduplum ejus, quod habebat aër a solo pondere atmosphærico pressus. Ast pondus premens est 28 + 28, hoc est, duplum ponderis atmosphærici. Porro advertit, si altitudo mercurii in brachio minore sit *9* digitorum, altitudinem in majore esse *93*. Est itaque volumen aëris compressi *3* digitorum, hoc est, subquadruplum ejus, quod habeat a solo pondere atmosphærico compressus. Sed pondus premens tum est 84 + 28, hoc est, quadruplum ponderis atmosphærici. Evidens ergo per experimentum Mariotti, volumina aëris compressi esse reciproce ut pondera comprimentia.

Scholion I.

Tab. I. Fig. 4. 74. *Idem experimentum succedit, si diameter brachii minoris* CE *multo major fuerit diametro majoris* AB (§. 34 Hydrost.): *curandum tamen, ut amplitudo illius sit uniformis, cum in demonstratione supponamus partes quantaslibet tubi* CE *esse cylindros æqualium basium.*

Scholion II.

75. *Probe autem notandum est, præter pondera comprimentia; in voluminibus aëris quæ inter se comparantur, cætera omnia paria esse debere; cavendumque, ne eandem compressionis legem ad diversa aëris volumina applicemus, in quibus, præter pondera comprimentia, aliorum quoque aërem alterantium datur disparitas: quoniam hoc in casu fieri potest, ut elateris, in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem densitatis, vires sint inæquales, adeoque & pondera compressionem aëris in utroque efficientia sint inæqualia* (§. 553 Mechan.), *consequenter & duo volumina aëris æqualia ab iisdem ponderibus inæqualiter comprimantur. Ex. gr. Ponamus duo volumina aërea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens est, quod paria pondera sustentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rarefiet igitur* (§. 23), *adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aër ad pristinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aëris inter se æqualia, cumque ab initio eandem densitatem habuerint,* per hypoth. *ejusdem densitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia sustinent.*

Scholion III.

76. *Vana vero est objectio; quod, admissa hac compressionis lege, sequatur aërem eo usque comprimi posse, ut spatium occupet infinite parvum, ejus respectu quod ante compressionem obtinuerat, pondere scilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad summum compressionis gradum pertingit, ponderi quantocunque prementi resistit; consequenter vi resistendi infinitæ æquipollet. Nec ideo vis elastica aëris in statu summæ compressionis viribus infinite variis æquatur* (§. 553 Mechan.); *sed minimæ earum a quibus maxima compressio proficisci valet. Est enim vis minor pars majoris* (§. 20 Arithm.). *Quamobrem si vis elastica aëris in statu summæ compressionis, & vi minori, & majori æqualis esset; pars toti æqualis foret: id quod absurdum* (§. 84 Arithm.). *Cum adeo vis elastica in statu summæ compressionis infinita non sit, explicandum est quomodo vi resistendi infinitæ æquipolleat. Scilicet si majus pondus aëri incumbere supponamus, quam ad sum-*

summam compressionem efficiendam sufficit; accessus ponderis non amplius ad comprimendum aërem, sed ad compressum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellantur corpora aërem compressum ambientia, vi resistendi prædita esse debent, quæ toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim qua premit ad aërem compressum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impedientia & vi elastica aëris impressi & vi eidem impressa urgentur, quæ simul sumpta vim ponderis prementis adæquant.

SCHOLION IV.

77. *Idem experimentum cum successu repetierunt* Robertus BOYLE (*a*) & AMONTONS (*b*), *hicque in voluminibus aëris majoribus.*

THEOREMA IX.

78. *Elater aëris compressi est ad elaterem dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi.*

DEMONSTRATIO.

Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut pondus isti incumbens ad pondus huic impositum (§. 553 *Mechan.*). Enimvero in ratione horum ponderum est quoque reciproce volumen aëris minus compressi ad volumen aëris magis compressi (§. 73). Ergo & elater magis compressi est ad elaterem minus compressi seu dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

(*a*) In *Defensione doctrinæ de elatere & gravitate aëris contra* LINUM part. 2. c. 5. p. m. 42. & seqq.

(*b*) *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences*, A. 1705. p. m. 155. & seqq.

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aëris magis compressi fortior est, quam elater minus compressi.

THEOREMA X.

80. *Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, cæteris paribus, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine contenti.*

DEMONSTRATIO.

Si aër comprimitur in spatium subduplum, subtriplum, subquadruplum &c. erit aëris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in spatio simplici. Ast in spatium subduplum a duplo; in subtriplum a triplo; in subquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 73). Ergo, in æqualibus voluminibus, massæ aëris diversimode compressi in ratione ponderum comprimentium existunt; consequenter cum in eadem ratione sit elater aëris magis & minus compressi (§. 553 *Mech.*); elater aëris magis compressi ad elaterem minus compressi, est ut massa illius ad massam hujus sub æquali volumine (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

81. *Data ratione voluminis quod replet aëra solo pondere atmosphærico pressus ad spatium in quod redigitur ulterius compressus; determinare vim elasticam compressi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aëris a solo pondere atmosphærico pressi æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aëris basin, sed altitudinem 28 digito-

digitorum habentis (§. 29); si ad volumen compressi, volumen nondum compressi, & pondus istius columnæ mercurialis quæratur numerus quartus proportionalis, designabit is quantitatem vis elasticæ in aëre compresso (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodsi pondus columnæ mercurialis istius a quantitate vis elasticæ inventa subducatur; relinquitur vis elateris qua resistentiam ponderis atmosphærici superat.

PROBLEMA XIII.

83. *Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus, aut in certo compressionis gradu; invenire effectum quem producturus est in alio quocunque compressionis gradu.*

RESOLUTIO.

Cum effectus sint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mechan.*) vires vero productrices, in nostro casu, sint reciproce ut volumina in diversis compressionis gradibus (§. 78); si effectus quem elater aëris in certo compressionis gradu producit detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur, inferendo, Ut volumen aëris magis compressi ad volumen minus compressi, ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

84. *Idem Problema quoque solvitur per analogiam Theor.* 10 (*§.* 80).

PROBLEMA XIV.

85. *Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus; determinare alium compressionis gradum; in quo idem producat intra atmosphæram effectum quemcunque majorem datum.*

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aëris minus compressi $= c$, volumen magis compressi $= x$. Cum alter effectus intra Atmosphæram resistentem sit producendus, & integer tamen desideretur; quærenda erit compressio quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu desiderato & effectu quem aër a solo pondere atmosphærico pressus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aëre compresso producendus $= a + b$, consequenter $a + b : a = c : x$, hoc est, ut aggregatum ex effectu aëris a solo pondere atmosphærico pressi & effectu ab aëre in quæsito compressionis gradu intra Atmosphæram producendo ad effectum aëris a solo pondere atmosphærico pressi, ita volumen aëris a solo pondere atmosphærico pressi ad volumen aëris in quæsito compressionis gradu (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur.

SCHOLION.

86. *Eodem modo Problema resolvitur ope Theorematis* 10 (§. 80).

CAPUT IV.

De Æquilibrio Aëris cum aliis Fluidis specifice gravioribus.

DEFINITIO IX.

Tab. I. Fig. 5. 87. Per *Tubum Torricellianum* intelligo tubum vitreum AB, mercurio repletum, cujus osculum superius A hermetice sigillatum, inferius B stagnanti in vasculo CD mercurio immersum.

SCHOLION.

88. *Vocatur istiusmodi tubus* Torricellianus *ab inventore* TORRICELLIO (§. 29).

DEFINITIO X.

89. *Barometrum* est instrumentum, quo gravitatem aëris metiri licet. *Baroscopium* vero est instrumentum, quod variationes gravitatis aëris confuse indicat.

SCHOLION.

90. *Vulgo pro synonymis habent has voces: sed mihi necesse esse videtur eas distinguere; cum aliud utique sit saltem cognoscere aërem hoc tempore esse graviorem, quam altero; aliud vero scire, quoties gravitas Atmosphæræ hac die superet gravitatem illius anteriorem: posterius vero constare debet, si gravitatem aëris metiaris* (§. 21 Geom.).

THEOREMA XI.

91. *In tubo* Torricelliano *major columna mercurii suspenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.*

DEMONSTRATIO.

Columna mercurii suspensa æquatur columnæ aëreæ, cujus eadem cum ista basis, sed altitudo a superficie mercurii in vasculo stagnantis usque ad extremitatem Atmosphæræ exporrigitur (§. 36 *Hydrost.*). In locis vero altioribus columnæ aëreæ altitudo minor, quam in profundioribus; adeoque & ipsa columna in his gravior, quam in istis: consequenter minor columna mercurii columnæ aëreæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. *Q. e. d.*

SCHOLION.

92. *Veritatem hujus Theorematis Experientia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit* PASCALIUS, *qui Phænomena tubi* Torricelliani *maxima cum solertia scrutatus est in Tractatu* De Æquilibrio liquorum.

THEOREMA XII.

93. *Si in tubo* Torricelliano *aëris quædam quantitas super mercurio, & in genere in vase quocunque; cujus orificium apertum fluido immersum, super fluido relinquatur: mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem suspenditur quam si vacuus fuerit, & pondus fluidi suspensi æquatur differentiæ elateris aëris inclusi a pondere atmosphærico.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aëris inclusi elater solus ponderi atmosphærico æquetur (§. 33), mercurius vi gravitatis propriæ descendere incipit. Ast dum descendit, aër inclusus dilatatur (§. 36), adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmosphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur mercurii, aut fluidi cujuscunque alterius, in tubo vel vase remanere debet, quantum differentiæ elateris aëris inclusi a pondere atmosphærico æquilibratur: consequenter mercurius ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus ab aëre vacuus extitisset. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

94. Aër igitur in tubo *Torricelliano* inclusus rarior ambiente externo, & ejus elater æquatur differentiæ ponderis mercurii suspensi a pondere atmosphærico (§. 36 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

95. Hinc liquet, si vas exiguo orificio instructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorsus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium sit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vase quocunque alio quantumvis amplo, si orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA XVI.

96. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aëre prorsus vacuo ad altitudinem qua gaudet si tubi aliqua pars aere repleatur, una cum volumine aëris dilatati; invenire volumen aëris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo suspensi (§. 33), adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere Atmosphærico (§. 94), pondera vero fluidi sint ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573 *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aëris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

Ex. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aëris dilatati 25, erit volumen primitivi $(28 - 14)\ 25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$. Quæ prorsus consona sunt experimento MARIOTTI (*a*).

PROBLEMA XVII.

97. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo, & ratione voluminis aëris primitivi ad volumen dilatati; invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= a$, altitudo in non vacuo $= x$, volumen aëris primitivi $= b$, dilatati $= c$, erit (§. 96).

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \text{ (§. 193 Arith.)}$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aëris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati, & altitudinem in tubo vacuo.

(*a*) *Essai de la nature de l'air*, p. 23. & seqq.

Sit ex. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$; erit $x = (25 - 12\frac{1}{2})\ 28 : 25 = 350 : 25 = 14$.

PROBLEMA XVIII.

98. *Datis altitudine fluidi in tubo vacuo, & volumine aëris primitivi; invenire volumen dilatati, & altitudinem fluidi in tubo non vacuo datæ altitudinis.*

DEFINITIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis $= a$, altitudo voluminis aëris primitivi $= b$, dilatati $= x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, consequenter

$$m : m - a + x = x : b \quad (\S.\ 96).$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc est, si fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4}d^2 \qquad \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula. 1. Quadrato semidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis, addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aëris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic addatur semidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aëris dilatati. Ex. gr. sit $a = 29$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\ dd = \frac{121}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = \frac{121}{4} + 350 = \frac{1521}{4}$, consequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + bm)} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA XIX.

99. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vasculo stagnantis, & altitudine fluidi in tubo non vacuo; invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$; erit altitudo dilatati $= a - n$; consequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x, quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore, & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi, numerum quartum proportionalem.

Sit ex. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$; erit $x = (39 - 14)\ (28 - 14) : 28 = 25 . 14 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA XX.

100. *Determinare quantitatem liquoris effluentis, si vas exigui orificii non plenum invertatur.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vase, atque altitudo totius vasis *per hypoth.* reperietur volumen aëris dilatati (§. 98). Unde si
3. subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, si vas invertatur (§. 95).

THEO-

THEOREMA XIII.

101. *Si vasis ab aëre prorsus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris Atmosphæræ aquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demersumque aperiatur; liquor ascendens totum replebit: ast si non prorsus evacuatum fuerit; minus spatium liquor ascendens occupabit quam aëris primitivi educti quantitas repleverat.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vasis demersum a pondere Atmosphæræ prematur (§. 21), sub orificio autem vasis aperto nulla sit aëris pressura, quia ab aëre prorsus vacuum supponitur; tantum liquoris intra vas ascendere debet, quantum sufficit ad pressuram ei æqualem efficiendam quæ a pondere Atmosphærico efficitur (§. 75 *Mechan.*). Sed vasis altitudo liquoris Atmosphæræ æquiponderantis altitudinem non excedit *per hypoth.* Ergo pressura æqualis pressuræ ponderis atmosphærici a liquore intra vas contento effici nequit, nisi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quodsi quædam aëris portio residua fuerit, ea super liquore ingrediente constituta rarior sit necesse est quam aër primitivus (§. 94). Majus ergo spatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10 *Hydrost.*). Quoniam adeo nonnisi spatium reliquum a liquore occupatur, evidens est liquorem ascendentem minus spatium vasis replere quam aëris primitivi educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

102. SCHOTTUS *autor est (a), cum* Herbipoli *Experimentum sæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuisse, ut etiam minore vase adhibito omnem excluderent aërem. Equidem cum aqua in vas irrumpens spumescat, ipse id indicium irruentis aëris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expansione aëris intra aquam latentis idem Phænomenon deducunt, atque hinc aëris super liquore constituti originem derivant. Enimvero quemadmodum fore negari nequit, quod hac ratione aër in vase residuus aliquod capiat incrementum; ita rationi consentaneum videtur non omnem aërem ope Antliæ ex vasis educi, quia aër ad summum expansionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis dispersis ætheri subtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum massulæ metallicæ in fluidis specifice levioribus natare solent; ut taceam massulas aëreas, quæ ab eminentiolis in superficie vitri, non secus ac aliorum fluidorum guttulæ, fulciuntur. Sæpius tamen diverso tempore diversis quoque vasis repetito experimento didici, perexiguum esse aëris quod super liquore constitutum deprehenditur, vase summa cum diligentia evacuato.*

PROBLEMA XXI.

103. *Data altitudine vasis evacuati, & altitudine liquoris in ipsum ingressi; invenire volumen aëris primitivi educti.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).

(a) In *Techn. Curiosa.* lib. 1. c. 3. p. 24.

2. Quoniam porro datur altitudo vasis evacuati & altitudo liquoris ipsum ingressi, invenietur volumen aëris primitivi (§. *99*).

COROLLARIUM.

104. Quodsi quantitas aëris educti quæratur per Probl. præs. eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur; certum id erit indicium, nihil aëris ex aqua irruente in summitatem vasis ascendisse.

SCHOLION.

105. *Dubito tamen, num hæ subtilitates in praxi satis discerni queant.*

PROBLEMA XXII.

Tab. I. Fig. 6. 106. *Si vas quoddam* ABCD, *aperto orificio* CD, *sub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur; quo profundius mergitur, eo magis aër in eodem comprimitur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aër aqua aliisque fluidis levior existat (§. 57), si vas ABCD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua descendere deberet, quod fieri nequit (§.*99 Hydrost.*). Jam elater aëris inclusi aquam subjectam eadem vi premit, qua pondus Atmosphæricum (§. 33); aqua vero in eadem libella circa orificium vasis, præter pondus atmosphæricum, etiam aqua super ea in vase stagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vasis CD, quam sub eodem: consequenter cum aër intra vas adhuc compressibilis existat (§. 17) & in ratione ponderum compressionem Tab. I. patiatur (§. 73); aliqua liquoris Fig. 6. quantitas intra vas ascendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

107. *Veritatem Theorematis Experientia confirmat. Imprimis huc pertinent Phænomena Campanæ urinatoriæ a* STURMIO (*a*) *enarrata & experimento illustrata.*

THEOREMA XIV.

108. *Iisdem positis quæ in Propositione præcedente, elater aëris in vase* ABCD *compressi, una cum pondere liquoris in ipsum ingressi, æquatur aggregato ex pondere Atmosphæræ & pondere columnæ ejusdem fluidi quæ eandem cum fluido ultra libellam orificii* CD *in vase* FG *stagnante altitudinem habet.*

DEMONSTRATIO.

Aër in vase ABCD adhuc compressibilis existit (§. 17); tamdiu itaque vi prementi cedit, donec eadem in fluidum sub orificio CD pressura efficiatur quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmosphærico & columna fluidi eandem cum vase basin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vasis CD in vase FG stagnante altitudinem habente (§. 75 *Mechan.*). Sed pressura in aquam sub orificio CD fit ab elatere aëris in vase ABCD compressi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aëris in vase ABCD compressi, una cum pondere fluidi intrantis, æquatur &c. *Q. e. d.*

(*a*) *Colleg. Curios.* part. I. Tent. I. & seqq.

PROBLEMA XXIII.

Tab. I. Fig. 6. 109. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vasis CD consistentis, una cum volumine ejus, & volumine aëris primitivi cavitatem vasis ABCD implentis; invenire volumen aëris compressi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fluidi $=g$, ejus volumen $=c$, pondus atmosphæricum $=a$, volumen aeris primitivi $=b$, volumen fluidi in vas ascendentis $=x$, erit volumen compressi $=b-x$. Jam cum elater aëris primitivi æquetur ponderi atmosphærico (§. 33), reperietur elater aëris compressi $=ab:(b-x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas ascendentis $=gx:c$. Habemus ergo

$$ab:(b-x)+gx:c=g+a \text{ (§. 108).}$$

$$abc+bgx-gx^2=bgc+abc-gcx-acx$$

$$x^2-bx-cx-acx:g=-bc$$

hoc est; si fiat $b+c+ac:g=d$

$$x^2-dx=-bc$$

$$\tfrac{1}{4}dd \qquad \tfrac{1}{4}dd$$

$$x^2-dx+\tfrac{1}{4}dd=\tfrac{1}{4}dd-bc$$

$$\tfrac{1}{2}d-x=\surd(\tfrac{1}{4}dd-bc)$$

$$x=\tfrac{1}{2}d-\surd(\tfrac{1}{4}dd-bc)$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aëris primitivi & volumine fluidi super libellam orificii vasis stagnantis, addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmosphæricum, & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ semisummæ quadrato subtrahatur factum ex volumine aëris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vasis stagnantis. Tab. I. Fig. 6. 3. Ex residuo extrahatur radix quadrata, quæ si 4. a semisumma supra inventa subtrahatur relinquetur volumen fluidi in vas ascendentis.

COROLLARIUM I.

110. Cum pondus liquoris vas intrantis sit $gx:c$, idem substituto valore ipsius x, reperitur $=(\tfrac{1}{2}d-\surd(\tfrac{1}{4}dd-bc))\,g:c$.

COROLLARIUM II.

111. Et quia elater aëris in vase compressi est $ab:(b-x)$, idem substituto valore ipsius x, reperitur $=ab:(b-\tfrac{1}{2}d+\surd(\tfrac{1}{4}dd-bc))$.

PROBLEMA XXIV.

112. *Data profunditate vasis, seu altitudine aëris primitivi in ejus cavitate contenti; invenire profunditatem ad quam intra fluidum datæ gravitatis orificium CD deprimendum, ut volumen aëris compressi habeat ad volumen aëris primitivi rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aëris primitivi $=b$, pondus atmosphæricum $=a$, gravitas fluidi $=g$, ejus altitudo super libella orificii $=x$, altitudo aëris compressi $=c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $=b-c$. Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi Atmosphærico (§. 33); reperietur elater compressi $=ab:c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*), erit gravitas fluidi in vas ascendentis $=(bg-gc):x$. Ergo

$ab:$

Tab. I. Fig. 6. $ab : c + (bg - gc) : x = a + g$

$$abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmosphærico in altitudinem aëris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmosphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aëris compressi ad gravitatem fluidi; ita differentia quadrati altitudinis aëris compressi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vasis sub fluido demersi.

SCHOLION.

113. *Hactenus supposuimus aërem, dum comprimitur, cum ambiente externo cætera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aëre ambiente, aër in vase condensatur (§. 24). Dispiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA XXV.

114. *Datis capacitate vasis, hoc est, volumine aëris primitivi, volumine fluidi demersum ingressi, & volumine fluidi supra orificii vasis libellam stagnantis, una cum pondere atmosphærico; invenire rationem voluminis aëris compressi tantum ad volumen compressi & condensati simul.*

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri potest volumen aëris compressi (§. 105), &, si volumen fluidi vas ingressi a volumine aëris primitivi subducitur, manifestum est relinqui volumen aëris compressi & condensati simul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compressi tantum, quam volumen aeris & compressi & condensati, illius ad hoc ratio latere nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

115. Quodsi volumen aëris compressi & condensati subtrahatur ex volumine aëris compressi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condensationem metitur.

COROLLARIUM II.

116. Quodsi contingat hanc differentiam esse nullam; vel aër ambiens non erit calidior aqua, vel aër compressus ab isto frigoris gradu nullam patiatur necesse est condensationem.

COROLLARIUM III.

117. Quodsi differentia aliqua prodeat, evidens est aërem compressum adhuc condensatum, & spatium a compresso in condensatione derelictum a fluido ascendente repletum fuisse. Elater igitur aëris compressi facta condensatione decrevit, & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in spatio derelicto contenti (§. 93).

SCHOLION I.

118. *Supposuimus in hactenus demonstratis Propositionibus vasa esse cylindrica vel prismatica: alias enim prolixiore subinde opus fuisset calculo.*

SCHOLION II.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in Problemate præsente de aëre condensato demonstrata sunt ad rarefactum quoque transferri posse, si vas in fluido calidiore quam aër ambiens demergatur.*

THEOREMA XV.

120. *Si pondus Atmosphæræ minuitur; mercurius in Tubo* Torricelliano *descendere; si illud augetur; hic ascendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna mercurialis intra Tubum *Torricellianum* suspensa æquatur pon-

ponderi atmosphærico (§. 29). Quare si pondus Atmosphæræ minuitur, mercurius fortius deorsum nititur quam pondus Atmosphæræ resistit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentiæ ponderis columnæ mercurialis & ponderis atmosphærici æquatur (§. 75 *Mechan.*). Quare si volumen mercurii minuitur, in tubo utique descendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonstratur, pondere atmosphærico aucto, mercurium in Tubo *Torricelliano* ascendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121. Cum altitudo mercurii in Tubo *Torricelliano* quotidie variet, experientia teste; aëris quoque gravitas quotidie varietur opus est.

SCHOLION I.

122. *Mathematici Parisienses maximam mercurii altitudinem* 28″ 4‴, *minimam* 26″ 4‴ *observaverunt, ut adeo omnis variatio intra* 2″ *seu* 24‴ *pedis Parisini comprehendatur. A.* 1711. *d.* 23. *Dec. apud nos, flante Coro & cœlo nubilo, altitudo maxima fuit* $30''\frac{3}{8}$ *pedis Londinensis, d.* 21. *Octobr. h.* 7. *mat. minima vix excessit* 28 *digitos pedis Londinensis, flante Zephyro & tempestate pluviali, cum nocte præcedente procella sæviisset. Nec memini, me intra quinquennium ex quo tales observationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem mercurii deprehendisse. Tota igitur variationis scala non excedit* $2\frac{3}{8}$ *digitos pedis Londinensis, qui cum deficiat a Parisino* $\frac{9}{144}$ (*§.* 26 Geom.); *observationes nostræ cum Parisinis satis conspirant.*

SCHOLION II.

123. *Equidem Celeberrimus* HALLEIUS (*a*) *cum globum vitreum, collo tenui instructum & mercurio plenum, aquæ ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus* $\frac{1}{74}$ *sui crescere observavit, atque adeo hinc constat, mercurium rarefieri, iterumque condensari* (*§.* 6. 8). *Quoniam tamen incrementa & decrementa mercurii calori atque frigori proportionalia non sunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, immo maxima plerumque hieme observantur* (§. 122); *variationes ejus a calore ac frigore minime pendent.*

(*a*) *Philos. Transact.* n. 197. p. 650.

THEOREMA XVI.

124. *Si tubus recurvus* ABC, *in* A *hermetice sigillatus, in* C *vero apertus, ut* Torricellianus, *mercurio repletur; erit variatio altitudinis mercurii in crure longiore* AB, *ob variatum pondus Atmosphæræ, subdupla variationis altitudinis mercurii in Tubo* Torricelliano *ex eadem causa contingentis.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Altitudo enim mercurii in brachio majore Atmosphæræ æquiponderantis semper computanda est a superficie mercurii in crure minore BC stagnantis (§. 34, 36 *Hydrost.*). Ponamus jam mercurium in crure minore CB consistere ad E, in majore AB ad D, sitque HD = 26″. Aucta Atmosphæræ gravitate, mercurius ascendat ex D in F (§. 120.): tum ex E descendet in G, eritque, suppositis tuborum CB & BA diametris æqualibus, EG = DF. Ponamus esse EG = 1″, erit IF = 28″. Quare si in Tubo Torricelliano mercurius ascendit per 2″, in tubo recurvo nonnisi ex D in F, hoc est per 1″, ascendit. Est ergo variatio altitudinis mercurii, ob mutatum pondus atmosphæ-

ricum, in iſtiuſmodi tubo recurvo contingens, ſubdupla variationis altitudinis mercurii ex eadem cauſa in Tubo *Torricelliano* contingentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

125. Quia vaſculum, cui Tubus *Torricellianus* immittitur, cruri breviori reſpondet; evidens eſt, illud tam amplum eſſe debere, ut mercurius ex tubo per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non ſenſibiliter augeat, ex. gr. non niſi dimidia lineola. Ita enim mercurius in tubo per unam lineam aſcenſurus propter hoc impedimentum nonniſi per lineam parte ſui quadrageſima octava mulctatam ($1''' - \frac{1}{48}$) aſcendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

COROLLARIUM II.

126. Cum ſcala integra, per quam mercurius in Tubo *Torricelliano*, vaſculo ſatis amplo, aſcendere ac deſcendere ſolet, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non niſi 12 linearum ſeu digiti unius.

PROBLEMA XXVI.

127. *Data integra ſcala, per quam aſcendit & deſcendit mercurius in Tubo* Torricelliano, *una cum diametro tubi; invenire diametrum vaſculi; in quo ſi tubus contineatur, mercurius ex eo delapſus non impediat quominus mutationes ſatis notabiles exiſtant.*

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur quominus mercurius ex tubo delapſus mercurii in vaſculo ſtagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini mercurii in vaſculo, ex demonſtratione Theorematis 36 (§. 124). Id autem obtinetur, ſi ea ſit vaſculi amplitudo, ut mercurius per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non niſi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque ſcala mercurialis in Tubo *Torricelliano* $= a$, diameter tubi $= b$, erit, ſuppoſita ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, cylindrus mercurialis intra ſcalam continendus $= pb^2a:4d$ (§. 541 *Geom.*). Sit porro diameter vaſculi $= x$, cum altitudo cylindri in quem in id delapſus mercurius abire debet, ſit dimidiæ lineolæ $= m$; erit ſoliditas ejuſdem $= mpx^2:4d$ (§. *cit.*), conſequenter

$$mpx^2:4d = pb^2a:4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2:b^2 = a:m \text{ ſeu } x:b = \sqrt{a}:\sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vaſculi eſt ad diametrum tubi, in ratione ſubduplicata ſcalæ mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapſi in vaſculo, hoc eſt ut $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 125), ſeu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc eſt, diameter vaſculi eſt media proportionalis inter altitudinem ſcalæ & diametrum tubi, ſi mercurius ex integra ſcala delapſus in vaſculo aſcendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA XXVII.

129. *Datis diametris tubi & vaſculi, una cum altitudine intervalli per quod mercurius in tubo deſcendit; invenire altitudinem intervalli per quod aſcendit in vaſculo; & contra.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, diameter vasculi $= b$, altitudo descensus $= c$, altitudinis mercurii in vasculo incrementum $= x$, erit (§. 127)

$$a^2 pc : 4d = b^2 px : 4d$$

$$a^2 c = b^2 x$$

Theorema. Incrementum altitudinis mercurii in vasculo est ad intervallum descensus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi.

COROLLARIUM.

130. Ergo si mercurius descendit per quodcunque intervallum c, erit verum descensus intervallum $= c + a^2 c : b^2$.

PROBLEMA XXVIII.

131. *Baroscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 8. 1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice sigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, mercurio ita repleatur ut nihil aëris super eo relinquatur, nec ulli vesiculæ inter parietes vitri & mercurium locus concedatur: id quod optime succedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari instructi.

2. Orificium tubi ita repleti ut mercurius ex eo redundet, digito fortissime appresso, ne intra eum & mercurium aëris quidpiam remaneat, mercurio in vasculo ligneo, cujus diameter per Probl. 26 (§. 127) determinanda, ita immergatur ut fundum non attingat.

3. Intervallo a superficie mercurii in vasculo stagnantis 26 digitorum Rhenanorum, affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos divisæ, qui rursus in 12 lineas aut particulas quotcunque æquales alias subdividendi. Tab. II. Fig. 8.

4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciso indatur, & superius alio tegatur, ut ex conspectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam Tubus hic idem est cum *Torricelliano* (§. 87); Baroscopium utique erit hac ratione constructum (§. 89, 120).

SCHOLION I.

132. *Non opus esse ut vasculum ligneum, in quo mercurius stagnat, sit apertum, & evidenti experimento (a) docui, & propria experientia didici. Meum enim Baroscopium non modo vasculum habet undiquaque probe clausum; sed præterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aëris externi ad superficiem vasculi admittenti. Hoc tamen non obstante, mutationes in altitudine mercurii consueta ratione contingunt.*

SCHOLION.

133. *Non defuêre, qui in eo operam suam collocarunt, ut mutationes sensibiliores efficerent.* CARTESIUS *primum, postea quoque* HUGENIUS *commendarunt tubum* AB *vase cylindrico* CD *instructum, & dimidium vasis una cum quadam tubi superioris parte aqua, reliquam vasis partem ac tubum inferiorem mercurio repleri jusserunt. Advertit vero* HUGENIUS *votis non respondere eventum. Etenim aër in aqua contentus vinculis suis* Tab. I. Fig. 9.

(a) In *Actis Eruditorum* A. 1710. p. 80.

suis sese liberabat & partem tubi superioris vacuam replebat: quo facto, cum aër inclusus rareficeret & condensaretur (§. 23, 24); *depressiones & elevationes mercurii a gravitatis Atmosphæræ variationibus productæ non amplius discerni poterant. Cum adeo didicisset consultius esse ut mercurius locum vacuo proximum occupet, aliam Baroscopii compositi constructionem excogitavit, quam Problemate sequente explicamus.*

PROBLEMA XXIX.

134. *Baroscopium compositum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 10. 1. Fiat tubus recurvus ADG, in A hermetice sigillatus, in G vero apertus, & duobus vasis cylindricis BC & EF instructus.

2. Vasa BC & EF sint inter se æqualia & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum distent, quanta scilicet est mercurii in media aëris gravitate altitudo in Baroscopio simplici.

3. Baroscopio huic infundatur primum mercurius, dum Baroscopium simplex mediam aëris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC assurgat, reliquo spatio ad A usque vacuo non solum a mercurio, sed ipso etiam aëre crassiore.

4. Postea quoque infundatur aqua communis cum parte sexta aquæ regiæ permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis constituatur. Ita Baroscopium compositum constructum.

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim, ultra libellam mercurii in vasculo EF contenti per tubum AD assurgens, ponderi atmosphærico & liquoris æquilibratur (§. 34 *Hydrostat.*). Aucto igitur Atmosphæræ pondere, augeri debet columna illa mercurialis: consequenter liquor descendet. Ast imminuto Atmosphæræ pondere, columna mercurialis quoque imminui debet: consequenter liquor ascendet. Liquoris adeo descensus incrementum gravitatis aëris, ascensus vero decrementum indicat; consequenter instrumentum ita constructum Baroscopium est (§. 89). *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 10.

SCHOLION.

135. *Baroscopium* Hugenianum *multo minores gravitatis aëreæ mutationes indicare, quam Tubus* Torricellianus, *attendentibus manifestum est. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamsi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expressi instilletur, liquori innatatura; loco aquæ oleum Tartari per deliquium infundi potest.*

PROBLEMA XXX.

136. *Baroscopium construere, cujus mutationes sint multo sensibiliores quam in Barometro ordinario.*

RESOLUTIO.

1. Tubo recurvo ACD, cujus crus CD sit ad alterum AC perpendiculare, cohæreat vasculum cylindricum B; cujus diameter tanto major esse debet, quanto sensibilius mutationes Baroscopium indicare debet. Tab. I. Fig. 11.

2. Crure AC in situm horizontalem incli-

Tab. I. Fig. 11. inclinato, mediante infundibulo, Baroſcopium repleatur mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua ſit; nec metuendum, ne in minima Atmoſphæræ gravitate mercurius elabatur.

3. Cruri horizontali aptetur ſcala in ſuos digitos diviſa & in lineas ſubdiviſa. Dico hoc Baroſcopium mutationes gravitatis aëris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

D E M O N S T R A T I O.

Etenim dum pondus Atmoſphæræ augetur, mercurius in vaſculo tanto intervallo aſcendit, quanto in ordinario Baroſcopio aſcendere ſolet (§. 120): conſequenter cum diameter vaſculi multo major ſit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmoſphærici multo minora indicare valet, quam Baroſcopium commune ſive ſimplex. Similiter quando pondus Atmoſphæræ minuitur, mercurius in vaſculo tanto intervallo deſcendit, quanto in ordinario Baroſcopio deſcendere ſolet (§. 120): conſequenter cum diameter vaſculi multo major ſit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo verſus orificium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmoſphærici multo minora indicat, quam Baroſcopium ſimplex. *Q. e. d.*

P R O B L E M A XXXI.

137. *Data diametro tubi* CD; *invenire diametrum vaſculi* AB, *ita ut ſcala deſcenſus mercurii in tubo* DC *habeat ad ſcalam aſcenſus in vaſculo* AB *rationem datam.* Tab. I. Fig. 11.

R E S O L U T I O.

Sit diameter tubi $= a$, ratio ſcalarum $b : c$, diameter vaſculi $= x$. Cum tantum mercurii in vaſculum aſcendat, quantum per aëris gravitatem in tubo DC deprimitur, poſitaque ratione diametri ad peripheriam $= d : p$, quantitas mercurii in tubo recedentis ſit $a^2pb : 4d$, & quantitas vaſculum ingreſſi $= x^2pc : 4d$ (§. 541 *Geom.*); erit

$$a^2pb : 4d = x^2pc : 4d$$

$$a^2b = x^2c$$

$$x^2 : a^2 = b : c$$

$$x : a = \sqrt{b} : \sqrt{c}.$$

Theorema. Diameter vaſculi, eſt ad diametrum tubi; in ratione ſubduplicata reciproca ſcalarum.

C O R O L L A R I U M.

138. Datis ergo diametro tubi CD, & diametro vaſculi AB, una cum ſcala mercurii in vaſculo; invenitur ſcala in tubo, inferendo, Ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vaſculi, ita reciproce ſcala mercurii in vaſculo ad ſcalam mercurii in tubo.

P R O B L E M A XXXII.

139. *Datis diametris tuborum & vaſculorum, una cum altitudinibus intervallorum per quæ mercurius deſcendit; invenire utrum Baroſcopia concordent, nec ne.*

R E S O L U T I O.

Quærantur vera deſcenſus intervalla in eadem menſura (§. 130): quæ ſi utrinque æqualia reperiantur, evidens eſt, Barometra inter ſe concordare; ſin minus, diſcordare.

SCHOLION.

140. *Apparet adeo, ad judicandam duorum vel plurium Barometrorum concordiam, aut veram intervallorum ascensus differentiam, non sufficere ut utrique eadem graduatio applicetur, nisi utriusque vasculi (§. 127) ea fiat amplitudo, ut mercurius ex tubo delapsus, gravitate Atmosphæræ imminuta, altitudinem in vasculo stagnantis sensibiliter non variet.*

THEOREMA XVII.

Tab. I. Fig. 12. 141. *Si Tubus* Torricellianus AB *inclinatur, erit cylindrus mercurialis Atmosphæræ æquiponderans ad cylindrum mercurialem eidem in situ tubi verticali æquiponderantem, ut longitudo tubi* AB *ad altitudinem* BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmosphærici egressum mercurii ex tubo AB per osculum A impedientis, concipiatur cylindrus mercurialis isti æquiponderans in tubo verticali ad A resistere; erit ejus gravitas ad gravitatem mercurii in tubo inclinato, ut longitudo AB, ad altitudinem BC (§. 34 *Hydrost.*). Cum itaque cylindro mercurii verticali pondus Atmosphæræ æquale sit, erit etiam gravitas mercurii in tubo inclinato ad hoc, ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi, vel subtripla, vel subquadrupla &c. mutationes Baroscopii triplo, vel quadruplo &c. sensibiliores evadunt.

COROLLARIUM II.

143. Si AB sumatur pro sinu toto, erit CB sinus anguli inclinationis BAC. Est ergo gravitas mercurii in tubo inclinato ponderi atmosphærico æquiponderantis ad pondus atmosphæricum, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIUM III.

144. Ergo & scala integra, & singula intervalla ascensus descensusque mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmosphærici ad scalam integram & singula ejus intervalla in tubo verticali, sunt ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipsi BC & FE ipsi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (*§. 255 Geom.*); consequenter DE : DF = BA : BC (*§. 267 Geom.*).

PROBLEMA XXXIII.

145. *Data longitudine scalæ per quam mercurius nunc ascendit, nunc descendit in tubo verticaliter erecto; invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut scala, per quam mercurius in ipso nunc ascendit, nunc descendit, habeat ad scalam tubi verticalis rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit longitudo scalæ in tubo verticali $= a$; quia datur ratio scalæ in inclinato ad scalam in verticali, datur etiam scala ipsa in inclinato, quæ sit $= b$. Sit porro sinus totus $= t$, sinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 143).

CAPUT V.

De Rarefactione & Condensatione, Densitate item & Raritate Aëris.

THEOREMA XVIII.

146. *Calor elaterem aëris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aër vesicæ inclusus eadem vi premit qua aër ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, vesicam distendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75 *Mechan.*). Enimvero vis illa qua vesicam distendit, est elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aëris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aër rarefactus iterum condensatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA XIX.

148. *Vis elastica aëris qua rarefiens expanditur est ad elaterem aëris condensati, uti volumen rarefacti ad volumen condensati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aërem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen quod condensatus obtinuerat: evidens est, tantum ponderis imponi debere, quod vi elasticæ æquatur qua expansus fuit (§. 75 *Mech.*). Erit igitur elater aëris quo rarefiens expanditur ad elaterem condensati, ut pondus illud ad pondus alterum quo condensatus premebatur (§. 553 *Mechan.*). Est vero pondus rarefacto incumbens idem quod condensato incumbebat, *per hypoth.* Ergo elater aëris quo rarefiens expanditur est ad elaterem condensati, ut pondus quod sustentat a rarefactione ad pristinum condensationis volumen reductus ad pondus quo rarefactus premitur: consequenter ut volumen rarefacti ad volumen condensati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXIV.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis spatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removetur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem sua veluti sponte in cavitatem vasis ascensurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aër rarefit (§. 23): consequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodsi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas ascendet, dum calor exspirat. Dum enim calor ex-

exſpirat, ceteris paribus, aëris quæ reſtat portio rarior eſt externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 78): conſequenter quam ponderis atmoſphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmoſphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75 *Mechan.*) *Q. e. d.*

SCHOLION.

150. *Quodſi prima vice non tantum aëris expulſum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec neceſſe eſt liquorem in priore operatione immiſſum rurſus expelli; cum ipſe potius, ob propriam rarefactionem, aëris adhuc reſidui expulſionem promoveat.*

THEOREMA XX.

Tab.II. Fig.13. 151. *Sit globus vitreus* AB, *cum annexo tubo* BC, *cujus orificium* C *aquæ immerſum; hæreat aqua pendula in tubo uſque ad* D: *aſcendet, ſi aër ambiens frigidior, vel gravior evadit; deſcendet, ſi calidior, vel levior redditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim aër ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam incluſus adeoque condenſatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 147). Cum igitur is conſtanter æqualis eſſe debeat differentiæ ponderis fluidi ſuſpenſi a pondere atmoſphærico (§. 93); ſi minuitur; pondus fluidi, conſequenter & volumen ejus (§. 17 *Hydroſt.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo aſcendat neceſſe eſt. *Quod erat unum.*

Similiter, ſi aër gravior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam ſub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur aquæ aſcendere debet, quantum ſufficit ad æquilibrium cum pondere atmoſphærico conſtituendum (§. 36 *Hydroſt.*). *Quod erat ſecundum.*

Contra, ſi aër externus calefit; calefit quoque incluſus, conſequenter rarefit (§. 23), adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum deſcendere, ſi aër levior redditur, eadem ratione demonſtratur qua oſtendimus illud aſcendere, ſi is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

SCHOLION.

152. *Celeberrimus* HALLEIUS (a) *obſervavit, uti ſupra de mercurio* (§. 123), *quod ſpiritus vini inſigniter expanſus fuerit, atque ab initio celerius, poſtea tardius in tubulo aſcenderit. Cum ſpiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus eſſet, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiat. Vereor autem, ne diverſitas ſpiritus vini expanſionis gradum variet. In aqua exiguam expanſionem notavit idem* HALLEIUS, *inprimis ſub initium, & ebulliens* $\frac{1}{26}$ *circiter ſpatii prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experientiis manifeſtum ſit volumen fluidi calore creſcere, frigore decreſcere debere, conſequenter liquorem aſcendere conari, dum ab elatere aëris incluſi deorſum pellitur, & contra, adeoque rarefactionem liquoris obſtare deſcenſui ejus, condenſationem vero aſcenſui: experientia tamen conſtat, hoc obſtaculum non impedire quominus elateris aërei effectus ſint ſatis ſenſibiles, quia aër multo magis rarefit & condenſatur quam fluidum quodcunque aliud.*

THEOREMA XXI.

153. *Denſitas aëris, cæteris paribus, creſcit in ratione ponderum comprimentium.*

DE-

(a) *Philoſ. Tranſact.* n. 197. p. 650. & ſeqq.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim denſitates ut gravitates ſpecificæ (§. 33 *Hydroſtat.*). Gravitates ſpecificæ ſunt ut volumina reciproce (§. 29 *Hydroſt.*). Ergo denſitates ſunt ut volumina reciproce (§. 167 *Arithm.*): conſequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

154. *Aër inferior denſior eſt ſuperiore.*

DEMONSTRATIO.

Aër ſuperior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aëris quantitas incumbat, quam ſuperiori; inferior quoque magis premitur, quam ſuperior (§. 10). Denſitas adeo inferioris major eſt denſitate ſuperioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora denſiora ſunt graviora rarioribus ſub eodem volumine (§. 14 *Hydroſt.*), & aër gravis exiſtit (§. 20); aër inferior ſpecifice gravior eſt ſuperiore.

THEOREMA XXIII.

156. *Denſitas aëris inferioris non eſt ponderi atmoſphærico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmoſphærici cætera in aëre inferiore omnia eſſent paria, denſitates ejus eſſent ut pondera atmoſphærica (§. 153). Sed calor aërem rarefacit, frigus condenſat (§. 23, 24), adeoque a calore & frigore denſitas diverſimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur cauſæ eandem ſimiliter alterantes. Cum adeo denſitas aëris inferioris mutari poſſit, pondere atmoſphærico immutato, iſta huic proportionalis non eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

157. *Si aër redditur denſior, pondus corporum in aëre minuitur; ſi rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates (§. 33 *Hydroſt.*); aër denſior ſpecifice gravior eſt rariori. Corpus igitur aëre ſpecifice gravius in denſiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56 *Hydroſt.*). Unde ſi aër redditur denſior, pondus corporum minuitur: ſi rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Si igitur denſitas aëris ſenſibiliter alteratur; corporum in aëre rariori æquilibratorum, quorum gravitates ſpecificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in denſiore, præponderabitque ſpecifice gravius (§. 61 *Hydroſtat.*).

PROBLEMA XXXV.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aëris unius pedis cubici, ob variationem ponderis atmoſphærici, acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus Atmoſphæræ cæteris paribus augetur, aër inferior magis comprimitur (§. 10), adeoque denſior evadit (§. 153), conſequenter pes cubicus aëris a compreſſione gravior (§. 9 *Hydroſt.*). Sit jam pondus Atmoſphæræ minimum $= a$, maximum $= b$, pondus aëris a minimo compreſſi $= c$,

pressi a maximo $= x$. Cum densitates corporum æqualium sint ut pondera (§. 16 *Hydrost.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y, quod volumen aëris datum, ob ponderis atmosphærici variationem, acquirere valet, est $bc : a - c = (bc - ac) : a$, consequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmosphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aëris a minimo compressi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmosphærici acquirere valet volumen aëris datum.

Ex. gr. Pes cubicus aëris in minima Atmosphæræ gravitate sit 507 granorum (§. 57). Quoniam $a = 26$, $b = 28$ (§. 122): erit $y = 39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aëris ab omni variatione ponderis atmosphærici suscipere valet, est fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis quod ipsi a minimo pondere atmosphærico presso competit.

DEFINITIO XI.

160. *Manoscopium* est instrumentum, quod alterationes densitatis aëris indicat. *Manometrum* est instrumentum, quod easdem metitur.

PROBLEMA XXXVI.

161. *Manoscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.14. 1. Assumatur bilanx tam accurate constructa ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus est super centro jugi.

2. Ex altero jugi brachio suspendatur globus E ex lamina metallica, ex. gr. cuprea aut orichalcea, construendus, ne pondus affrictum in libra augeat (§. 949 *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes elusurum. Capacitas globi sit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aër (§. 40). Tab.II. Fig.14.

3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B descriptus, ita ut secetur in gradu quadragesimo quinto ab indice BD, si jugum fuerit in situ horizontali.

Dico, Manoscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim si aër densior redditur pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam (*vi* §. *cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix spatium a laminæ, ex qua globus constructus, soliditate repletum occupet, nisus ejus deorsum minus minuitur quam globi (§. 55 *Hydrost.*): consequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis specificæ aëris, in quo hæret, consequenter & densitatis (§. 33 *Hydrost.*) indicat. Est ergo Machina Manoscopium (§. 160). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

162. Quoniam aëris densitas & raritas non modo a pondere Atmosphæræ (§. 153), sed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23, 24); Manoscopium hoc Baroscopium esse nequit.

SCHOLION I.

163. *Equidem* OTTO DE GUERICKE (*a*), *& qui ipsum sequitur*, BOYLIUS (*b*), *idem instrumentum pro Baroscopio vendicant: sed non attenderunt, manente eodem pondere, densitatem ac raritatem aëris sæpissime variari.*

SCHO-

(*a*) In *Experiment. de Vacuo* lib. 3. c. 31. f. 114.
(*b*) In *Historia frigoris*, tit. 17.

SCHOLION II.

164. *Neque vero putandum est, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant: Experientia enim contrarium abunde satis confirmat. Certe* GUERICKIUS *se expertum scribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum secundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit; & inprimis ingravescere globum notavit, si pluat. Nec difficulter idem ratione assequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aërei 39 granorum mutationem, ob variatum pondus atmosphæricum, sustineat (§. 159); bilanx vero unius vel alterius grani accessionem vel ablationem indicare possit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abest globus cum suo contrapondio) oneretur (§. 57); si globus evacuatus pedem aëris cubicum capit, quin variationes densitatis ab Atmosphæra pondere variato pendentes Manoscopium nostrum indicet dubitandum non est. Tanto minus autem dubitare fas est, quod aliæ adhuc densitatis variationes a diverso calore ac frigore aëris factæ, nec istis minores accedant. Didicit nimirum* HALLEIUS *aërem ordinarium in* Anglia *a calore æstivo extendi* $\frac{1}{13}$ *circiter sui voluminis, a maximo autem frigore condensari* $\frac{1}{20}$ *fere. Cum adeo pondus unius pedis cubici aërei sit 507 granorum (§. 57); erit decrementum ponderis in casu priore 32, incrementum in posteriore 25 granorum.*

SCHOLION III.

165. *Manometri constructionem dedit Celeberrimus* VARIGNONIUS (*a*): *de quo alias nonnulla monuimus* (*b*).

CAPUT VI.

De Motu Aëris.

DEFINITIO XII.

166. *Ventus* est agitatio aëris sensibilis.

PROBLEMA XXXVII.

167. *Data ratione gravitatis specificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aëris, una cum spatio quod intra definitum aliquod temporis spatium fluidum istud percurrit ab aëre premente impulsum; determinare spatium quod ipse aër ob æqualem pressionem, intra idem tempus, emetiri debet.*

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo ad quam per datam aëris pressionem elevari potest fluidum in medio non resistente $= a$. Sit porro ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris $= b:c$. Spatium, quod fluidum ab aëre premente impulsum describit, dicatur & denique spatium, quod aër ob æqualem pressionem intra idem tempus emetitur, vocetur x. Quoniam altitudines fluidorum ad quas propter æquales pressiones elevantur sunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36 *Hydrost.*); si altitudo ad quam aër eandem cum fluido pressionem sustinens eveheretur,

(*a*) *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences* A. 1705. p. m. 409. & seqq.
(*b*) In *Element. Aërometriæ* p. 184.

modo elatere careret, fiat $= y$; erit $c : b = a : y$, consequenter $y = ab : c$. Sunt vero velocitates quibus fluida ob eandem pressionem elevantur, in ratione subduplicata altitudinum ad quas ascendunt (§. 87, 322 *Mechan.*), adeoque in casu nostro ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{(ab : c)}$. Quare cum, ob temporum suppositam æqualitatem, spatia quæ istis temporibus percurruntur sint ut velocitates (§. 28 *Mechan.*): erit

$$\sqrt{a} : \sqrt{(ab : c)} = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§. 260 Arithm.)}$$

$$ac : ab = s^2 : x^2 \text{ (§. 178 Arithm.)}$$

adeoque

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§. 181 Arithm.)}.$$

Theorema. Ut gravitas specifica aëris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum spatii quod fluidum hoc quacunque vi impulsum intra quodcunque temporis spatium percurrit, ad quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM I.

168. Ergo $x = \sqrt{(bs^2 : c)}$. Unde si ponamus aquam data vi impulsam, intra minutum temporis secundum percurrere spatium 2 pedum; erit $s = 2$; cumque gravitas specifica aquæ sit ad gravitatem specificam aëris, ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b = 970$ & $c = 1$; consequenter $x = \sqrt{970.4}$, $= \sqrt{3880} = 62\frac{7}{}'''$ fere.

COROLLARIUM II.

169. Est etiam $s = \sqrt{(cx^2 : b)}$, adeoque spatium quod intra certum aliquod temporis spatium, ob certam quandam impressionem, fluidum quodcunque emetitur determinatur, si ad duos numeros quibus ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris exprimitur, atque quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem intra idem temporis spatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*), & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*).

SCHOLION.

170. MARIOTTUS (a) *notat ventum satis violentum ordinarie spatium 24 pedum intra minutum secundum describere. Quodsi ergo quæratur spatium quod aqua, ob eandem pressionem quam aër sustinet, intra idem temporis spatium absolvit, erit* $c = 1$, $x = 24$, $b = 970$ *& reperietur* $s = \sqrt{(576 : 970)} = \frac{24}{31}$.

PROBLEMA XXXVIII.

171. *Data altitudine ad quam fluidum quodcunque a pressura aëris elevatur, una cum altitudine per quam corpus grave intra minutum secundum descendit; determinare spatium quod fluidum istud, intra minutum secundum, vi impetus impressi, motu æquabili percurrit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo ad quam fluidum ab aëre premente elevatur, $= a$, minutum temporis secundum $= b$, spatium quæsitum $= x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acquisitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322 *Mech.*); vis aëris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquisita ejus est celeritatis qua corpus motu æquabili, intra idem tempus quo decidit, describere valet lineam altitudinis ex qua decidit duplam (§. 92 *Mech.*) Repe-

(a) *Traité du mouvement des eaux*, p. 226.

Reperietur adeo ſpatium quod fluidum, intra idem tempus quo decidit, vi cadendo acquiſita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea ſpatium, quod corpus grave deſcendens intra minutum ſecundum deſcribit, $= c$. Quoniam tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum a corporibus cadentibus deſcriptorum; erit tempus quo grave decidit per ſpatium $a = \surd\ (ab^2 : c)$ (§. 87 *Mech.*). Quare ſi motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34 *Mech.*)

$$\surd\ (ab^2 : c) : 2b = a : x$$

$$2ab = x \surd\ (ab^2 : c)$$

$$4a^2b^2 = x^2 \ .\ ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impreſſum intra minutum ſecundum motu æquabili percurrit, eſt medium proportionale inter altitudinem duplam ad quam idem ab aëre premente elevatur, & altitudinem duplam ejus per quam grave intra minutum ſecundum decidit.

SCHOLION.

172. *Ponamus, mercurium per preſſionem Atmoſphæræ in Tubo* Torricelliano *ſuſtentari ad altitudinem* 28″: *erit adeo in Problemate noſtro* a = 28″. *Porro* c = 15′ 1″ *ſeu* 181″ (*pedis Pariſini*) (§. 473 Mechan.). *Ergo* x, *hoc eſt ſpatium quod ob eandem preſſionem mercurius motu æquabili tempore unius ſecundi percurreret*, $= 2 \surd\ 181 .\ 28 = 142''$ *quam proxime, ſeu* 11′ 10″. *Ponamus mercurium elevari per aëris preſſionem nonniſi* 2″. *Erit in caſu Problematis noſtri* a = 2″, c = 181″, *adeoque* $x = 2 \surd\ 181 .\ 2 = 38''$ $= 3'\ 2''$.

PROBLEMA XXXIX.

173. *Data altitudine fluidi ad quam propter preſſionem aëris elevatur; invenire ſpatium quod tempore unius minuti ſecundi, ob eandem preſſionem, percurrere debet aër in medio non reſiſtente.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur, quantum ſpatium ob preſſionem aëris qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti ſecundi, motu æquabili emetiretur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro
2. inveſtigari poteſt ſpatium quod aër in medio non reſiſtente, ob eandem preſſionem, percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM I.

174. Per præſens igitur Problema determinari poteſt ſpatium quod aër in vas prorſus evacuatum irruens, intra minutum temporis ſecundum, deſcribit. Si enim vas prorſus evacuatum fuerit, aër irruens preſſionem ſuſtinet ei æqualem qua aqua ad altitudinem 32 pedum Pariſienſium elevatur (*§.* 29). Quare ſpatium quod aqua ob iſtam preſſionem, tempore unius minuti ſecundi, motu æquabili percurret, eſt 528‴ (*§.* 171). Jam, cum ratio gravitatis ſpecificæ aquæ ad gravitatem aëris ſit 970 : 1, reperietur ſpatium quod aër in vas prorſus evacuatum irruens motu æquabili, tempore unius minuti ſecundi, percurrere debet, 1370 pedum (*§.* 167).

COROLLARIUM II.

175. Si detur differentia virium elaſticarum in duobus voluminibus aëris contiguis; inveniri poteſt ſpatium quod aër, ex volumine fortiori elatere inſtructo irruens, in volumen elatere debiliori præditum deſcribit.

SCHOLION.

176. *Sit ex. gr. differentia virium elaſticarum in duobus voluminibus aëris contiguis ea qua mercurius elevari poteſt ad altitudinem 2 digitorum; reperietur ſpatium quod ob*

istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet 38″ (§. 171). *Cum jam gravitas specifica mercurii ad gravitatem aquæ sit ut* 14 *ad* 1 (§. 29), *& gravitas aquæ ad gravitatem aëris, ut* 970 *ad* 1; *erit gravitas mercurii ad gravitatem aëris, ut* 13580 *ad* 1, *adeoque reperietur spatium quod, ob æqualem pressionem, aër emetiri debet tempore unius minuti secundi fere* 368 *pedum. Irruet ergo aër ex volumine fortiori in debilius ea celeritate qua tempore unius minuti secundi fere* 368 *pedes percurrere valet. Sit differentia virium elasticarum nonnisi* 3‴: *reperietur spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet, fere* 12″, *tandemque spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, aër emetiri debet,* $116\frac{1}{2}$ *pedum* (§. 167). *Ea igitur celeritate qua tempore unius minuti secundi spatium* 116 *circiter pedum percurrere valet, aër ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam* Mariottus (*a*) *observat ventum satis violentum, intra minutum temporis secundum,* 24 *pedes percurrere; ejus celeritas multo minor est ea qua aër irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elasticarum nonnisi tanta existente, quanta mercurium in Tubo* Torricelliano *ad altitudinem* 3‴ *elevare valet.*

Corollarium III.

177. Quoniam, data ratione voluminum aëris primitivi atque compressi, inveniri potest altitudo ad quam aër compressus mercurium in Tubo *Torricelliano* elevare potest (§. 83); per Problema præsens determinari etiam potest celeritas qua aër, cessante compressione seu remota vi premente, sese expandit.

Problema XL.

178. *Dato spatio quod aër intra minutum secundum percurrit; determinare pressionem quæ celeritatem istam producere valet.*

(*a*) *Traité du mouvement des eaux*, p. 226.

Resolutio.

Pressionem determinatam esse patet, si constet altitudo ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aëre elevandum tantam pressionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, spatium quod aër intra minutum secundum percurrit $= a$, ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris $= b : c$; altitudo denique per quam corpus grave, intra minutum secundum, descendit $= d$; reperietur spatium a fluido tempore unius minuti secundi percurrendum $= \sqrt{(a^2c : b)}$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæsita $= a^2c : 4bd$. Est itaque

$$4bd : ac = a : x.$$

Theorema. Spatium quod aër tempore unius minuti secundi percurrit est ad altitudinem ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum ut pressionem efficiat celeritati qua istud describitur producendæ sufficientem in ratione composita gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris, atque altitudinis quadruplæ per quam corpus tempore primi minuti secundi descendit ad spatium aëris prædictum. Sit ex. gr. $a = 24'$, seu 288″, ratio mercurii ad aërem $b : c = 13580 : 1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 473 *Mechan.*); erit x minor unica linea seu duodecima digiti parte.

Scholion I.

179. *Apparet adeo, quod exiguas mutationes in Baroscopio, sed subitas, ingentes admodum procellæ subsequi debeant: id quod Experientiæ consentaneum Theoriam nostram confirmat.*

Scholion II.

180. *Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac inprimis determinandus erat situs alarum in molendino*

dino alato; qualis nempe requiratur ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus ſit principiis generalibus de motu fluidorum quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem univerſali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixiſſe videamur, cum plus dicere poſſemus.

DEFINITIO XIII.

181. *Anemometrum* eſt inſtrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA XLI.

182. *Anemometrum conſtruere.*

RESOLUTIO.

ab.II. ig.15. 1. Conſtruantur alæ A, B, C, D, quales in molis alatis adhiberi ſolent; multo tamen minores; a plano verticali ſub angulo 54 circiter graduum reclinatæ

2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur ig. 3. etiam cochlea perpetua EF, quæ

3. circumacta deprimat dentes rotæ ſtellatæ GH.

ig. 2. 4. Axi per centrum tranſeunti infigatur ad angulos rectos brachium ſatis longum IK, in medio canaliculi inſtar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L, ſurſum deorſum libere moveri poſſit, ipſique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus Y.

5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur; quarum ſingulæ radio axis æquantur.

ig. 1. 6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos inſiſtens, & extra ciſtam, cui rota ſtellata cum cochlea perpetua incluſa, eminens. Tab.II. Fig.15.

7. Denique ex centro axis, in pariete ciſtæ exteriore, deſcribatur quadrans circuli in 90 gradus more ſolito dividendus, ab indice vel aſcendente vel deſcendente indicandus.

Dico, Anemometrum eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Manifeſtum enim, ſi alæ A, B, C, D, vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi, atque adeo rotam ſtellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota ſtellata GH eidem axi infigatur, *per conſtruct.* ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero diſtantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat neceſſe eſt, quo altius attollitur (§. 796 *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare poteſt pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipſum elevantis æqualis evadit, motus machinæ ſiſtatur neceſſe eſt (§. 75 *Mech.*); & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere poteſt, ipſa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabi nequit. Index adeo ſemper indicat, quantus ſit angulus elevationis ponderis, ubi eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§. 793 *Mechan.*)

Tab.II. *Mechan.*), atque adeo per Machinam
Fig. 15. nostram ratio virium ventorum determinari potest, hoc est, vires venti metiri licet (§. 23 *Geom.*). Est igitur Anemometrum (§. 181). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

183. *Ut hæc Machina, sine ullius adjumento, alas* ABCD *vento semper obvertat, cistæ* ST *plano quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus est asserculus* POQR *figuram trapezii parallelarum basium habens. Ventus enim incidens in asserculum* POQR, *Machinam circa axem pedamenti mobilem convolvet, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro Machinæ erecti fieri potest, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION II.

184. *Brachio* IK *contrapondium* Y *additur, ut instar lineæ gravitate carentis considerari possit, nec tædia calculi præter necessitatem multiplicentur.*

THEOREMA XXV.

185. *Si elater aëris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis; ventus flat per locum in quo elater imminutus.*

DEMONSTRATIO.

Cum aër per elaterem suum quaquaversum se expandere nitatur (§. 26); si elater uno in loco minor quam in altero, nisus aëris vi elastica majore præditi adversus aërem vi elastica minore instructum major erit, quam hujus adversus istum. Ergo aër minus elasticus vi minore resistit, quam a magis elastico urgetur: consequenter minus elasticus loco suo pellitur, & magis elasticus in eum succedit. Quodsi adeo excessus elateris in aëre magis elastico super elaterem minus elastici is sit, qui exiguam in Baroscopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aëris expulsi, quam in ipsius locum succedentis sensibilis evadat necesse est (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aër minus elasticus replet (§. 166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

186. Cum aucto pondere comprimente, elater augeatur (§. 553 *Mech.*), aër vero compressus sit densior minus compresso (§. 78): ventus flat per aërem rariorem ex loco qui densiore repletur.

COROLLARIUM II.

187. Quamobrem, quia aër densior rariore specifice gravior (§. 33 *Hydrost.*); extraordinaria aëris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis seu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM III.

188. Jam descensus mercurii extraordinarius in Baroscopio aëris levitatem extraordinariam indicat (§. 120). Non ergo mirum quod procellas portendat, si subito fiat.

SCHOLION.

189. *Non tamen necesse est, ut aëris levitas semper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aëris subitas pati mutationes. Hinc ventum sat valide flantem hoc ipso temporis articulo experimur, utut in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, mercurius in Baroscopio consistat, nec nisi* $\frac{1}{16}$ *unius digiti depressior nunc factus, quam heri erat. Immo in maxima depressione ventus sæpe nullus spirat, quia depressio successive, non subito, facta.*

COROLLARIUM IV.

190. Si aër alicubi subito condensatur, elater ejus subito minuitur (§. 148). Quodsi ergo

ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in Baroſcopio vix indicari poſſit (§. 176, 178); ventus per aërem condenſatum flabit.

COROLLARIUM V.

191. Quoniam vero ſubito condenſari nequit, niſi magnam ante paſſus fuerit rarefactionem (§. 6, 8); ventus flabit per aërem, dum poſt æſtum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM VI.

192. Similiter ſi aër ſubito rarefiat, elater ejus ſubito intenditur (§. 148), adeoque defluet per contiguum, actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75 *Mech.*). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aër ſubito rarefit.

COROLLARIUM VII.

193. Cum vires Solis in rarefaciendo aëre notiſſimæ ſint; Solem in ventorum geneſin influere manifeſtum eſt (§. 5, 6).

PROBLEMA XLII.

194. *Ventum excitare adverſus plagam deſideratam ſpirantem.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.16. 1. Conſtruatur vas cylindricum ABDC ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major eſſe debet, quo impetuoſior ventus excitandus.

2. Vas ipſum ſit undiquaque probe clauſum, ſolo foramine in E gaudens, cui tubus EF utrinque apertus ante immittendus. Tab.II. *Fig.16.*

3. Per medium cylindrum tranſeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum alis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas inſtructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.

4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato R 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis R curvatus ſemel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 converſiones abſolvit, adeoque alæ L, M, N, K per aërem incluſum celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus verſus plagam deſideratam dirigi poſſit; ventus excitabitur (§. 166) adverſus plagam deſideratam ſpirans. *Q. e. f.*

SCHOLION.

195. *Cum in molis frumentariis axis ferreus* HI *cum curriculo* C *occurrat* (§. 975 Mech.); *hoc artificio ſub lapidibus molaribus facile excitatur ventus, partes a granis frumenti abraſas a nucleo eorum ſeparaturus. Tum vero tubus* EF *ſacci vices ſuſtinet, & baſis* GF *declivis, in* G *vero foramen eſſe debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abraſæ a vento per* F *ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento poſt triturationem ſeparandas; additis addendis, quæ nunc fuſius exponere non eſt noſtri inſtituti.*

CAPUT VII.

De Calore ac Frigore, itemque Humiditate ac Siccitate Aëris.

DEFINITIO XIV.

196. *Hermoscopium* est instrumentum caloris ac frigoris in aëre incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero est instrumentum, quo calorem ac frigus aëris metiri licet.

DEFINITIO XV.

197. *Hygroscopium* est instrumentum, quod humiditatis & siccitatis in aëre incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero est instrumentum, quo humiditatem & siccitatem aëris metimur.

PROBLEMA XLIII.

198. *Thermoscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.17. 1. Tubo BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur (§. 149) aqua communis regiæ permixta & ab orichalco in hac soluto viredine tincta. Opera vero danda est, ut tantum aëris in globo & tubo relinquatur, qui hyeme maximam condensationem passus globum exacte repleat & æstate ad summum rarefactionis gradum perductus non omnem ex tubo BC liquorem expellat.

2. Tubus immittatur vasculo, vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD apertus, ut aër ejici, iterumque ingredi libere possit, & in quo similis liquor contineatur, qualis in tubum immissus. Tab.II. Fig.17.

3. Ab utroque latere tubi applicetur scala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër ambiens sit calidior, liquor in tubo descendit: si is frigidior evadit, hic ascendit (§. 151). Incrementa igitur caloris & frigoris indicat hoc instrumentum, adeoque Thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Eodem artificio quo ante, & cum eadem cautione in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne scilicet longior spatium nimis longum occupet nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum mercurii, pisi magnitudinem non excedens. Tab.II. Fig.19.

2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ scalæ vicem sustineant.

Accessus mercurii ad globum, frigoris; recessus vero ejusdem a globo, caloris incrementa indicabit.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ præcedens.

COROLLARIUM I.

199. Quia liquor in Thermoscopio primo & mercurius in altero etiam ascendit, si aër gravior redditur; contra vero descendit, si levior evadit (§. 151): caloris ac frigoris incrementa non satis fideliter exprimit.

COROLLARIUM II.

200. Quoniam tamen mutationes admodum sensibiles sunt; si aliorum corporum calor examinandus, commode Thermoscopio altero utimur: exiguo enim temporis spatio quo experimentum instituitur, gravitas Atmosphæræ sensibiliter non mutatur.

SCHOLION.

201. *Quodsi in Thermoscopio primo liquorem colore intense rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum simplicium atque rubidorum malvæ hortensis arefactis, ut color extrahatur. Quodsi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non sine jucunditate colorem intense rubrum emergendam contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque usi sunt artifices.*

PROBLEMA XLIV.

202. *Thermoscopium Florentinum construere.*

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus Thermoscopium paulo ante descriptum premitur (§. 198); mensuram caloris & frigoris quæsivere in rarefactione spiritus vini, utut rarefactione aëris longe minore (§. 152). Thermoscopium vero ab ipsis repertum ita construitur:

1. Frustulis ex radice curcumæ aut anchusæ resectis affundatur spiritus vini rectificatissimus, seu qui, dum accensus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priore enim radice colore flavo, a posteriore autem rubro tingetur.
2. Postea spiritus vini iterum iterumque filtretur per chartam bibulam, ut particulæ crassiores ex radice extractæ remaneant.
3. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme spiritus omnis in globum descendat, globum immittere juvat nivi multo sale conspersæ, aut (si æstivo tempore Thermoscopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ in qua multum nitri solutum, ut spiritus condensatus indicet terminum quem maximo frigore attingere valet. Tab. III. *Fig.* 19.
4. Quodsi a globo longiore intervallo adhuc distet, aliqua ejus portio rursus expellenda. Ne autem tubus justo longior fiat, globum spiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impositæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.
5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice sigilletur.
6. A latere denique affigatur ut in Probl. præc. scala EF in particulas quotcunque æquales divisa.

DEMONSTRATIO.

Quoniam spiritus vini rarefit & condensatur (§. 152); calore crescente, in tubo ascendet (§. 8); decrescente, descendet (§. 6). Caloris igitur incre-

menta & decrementa instrumentum indicat, consequenter Thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

203. Si spiritus vini per multos gradus scalæ ascendit, calorem multum crevisse constat; si descendit, idem multum decrevisse intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad hesternum non indicatur; instrumentum calorem non metitur (§. 23 *Geom.*), adeoque Thermometrum non est (§. 196).

COROLLARIUM II.

204. Liquor in tubo vi gravitatis suæ deorsum nititur (§. 4 *Mechan.*), adeoque ex globo in ipsum ulterius ascendenti resistit tanto quidem magis, quo altius jam ascendit (§. 10). Præstaret itaque, situm tubi BC esse horizontalem.

COROLLARIUM III.

205. Cum necessario aliquid aëris super liquore in parte tubi vacua existat, is vi elateris deorsum nititur (§. 26), adeoque ascensui liquoris resistit. A liquore ascendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipsius augetur (§. 73), ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 146).

COROLLARIUM IV.

206. Cum experientia constet remissiorem caloris gradum facilius cum spiritu vini in globo communicari quam vehementiorem; rarefactiones spiritus vini viribus productricibus proportionales non sunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat quam remissior; cui tamen facilius communicari potest calor quam in globo stagnanti. Thermoscopium adeo Florentinum, accedente inprimis resistentia inæquali (§. 204, 205), Thermometrum non est (§. 196).

SCHOLION I.

207. HALLEIUS *autor est, se didicisse ex iis qui spiritum vini diu asservarunt, quod is successu temporis partem vis expansivæ amittat (a). Sed meretur res accuratiori examini subjici, vi eorum quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus (b).*

SCHOLION II.

208. *Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæsiverunt, a quo utriusque gradus reliqui computentur; ut observationes, eodem vel diverso tempore, in pluribus locis factas conferre inter se liceat. Aliqui locum notant in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit; iterumque alterum tempore æstivo, dum butyrum juxta globum Thermoscopii positum liquefit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod divisionis punctum in ipsorum graduatione calori temperato respondet. Partem utramque in* 10 *gradus subdividunt, tandemque quatuor istiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor itidem super gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero divisionem fieri Thermoscopio in umbra collocato, & ne observationes turbentur, versus eandem constanter plagam instrumentum dirigi debere quam respiciebat cum divisio absolveretur. Enimvero supponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris, & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris respondere, ac singula Thermoscopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impressiones. Posterius autem fallere non ignorant qui Experientia edocti, Thermoscopia eidem parieti affixa non eundem constanter caloris gradum ostendere, utut eadem utrique graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne prius cum cura examinaturi contrarium similiter experiantur. Differunt enim aquæ inter se, differunt inter se butyra; id quod vel sola gravitatis specificæ variatio monstrat; ut alia taceamus quæ meditantibus & experimentantibus se offerent.*

SCHO-

(a) *Transact. Anglic.* n. 197. p. 650.
(b) *Act. Erudit.* A. 1708. p. 163. & seqq. conf. *Logica* §. 664. & seqq.

SCHOLION III.

209. *Suadent alii, ut globus Thermoscopii nivi vel glaciei multo sale conspersæ immittatur, & gradus ad quem spiritus subsistit notetur. Hinc Thermoscopium in cellam profundam transferunt, quorsum aëris externi nihil pertingit, ut actionem aëris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique spatium intermedium in* 15 *vel plures partes æquales dividunt, etiam supra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra absolvatur. Sed ut non urgeam, quæ in Scholio præcedente jam abunde dicta sunt, quis, quæso, respondeat quærenti: An omni nivi idem sit frigoris gradus? An omni sali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim frigus a sale nivi permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abrasis superficieculis earundem interiorem nucleum summe frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION IV.

210. *Celeberrimus* HALLEIUS *pro termino fixo assumit eum caloris gradum, quo spiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam supra monuimus, quænam ratio sit suspicandi, forte nec hunc gradum esse usque adeo fixum. Et licet post ipsum* AMONTONS (*a*) *retinuerit ipsum gradum caloris qui aquæ ebullienti convenit, dum Thermoscopium mercuriale construit; & postea* (*b*) *hujus ope Thermoscopio Florentino talem graduationem applicare docuerit qua ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diversa sit aquarum gravitas specifica, quæ massæ ac texturæ diversitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem sit: unde operæ pretium facient rerum naturalium scrutatores, si, factis accuratis experimentis, inquirant, quinam sit gravitatis fluidorum specificæ ad calefactionem eorundem respectus.*

(*a*) *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences* A. 1702. p. m. 210. & seqq.

(*b*) *Mémoires de la même Académie* A. 1703. p. m. 63. & seqq.

SCHOLION V.

211. *Nondum excipere licet istiusmodi minutias in praxi non esse attendendas: neque enim hactenus demonstratum, quod irregularitates a causis memoratis pendentes sint minutiæ. Lis adhuc pendens nonnisi pluribus experimentis, a pluribus, præsertim pluribus in locis, factis dirimenda.*

SCHOLION VI.

212. Carolus RENALDINUS (*c*) *tradit modum integram graduationem methodo experimentali determinandi, ut habeantur gradus inæquales æqualibus gradibus caloris, dum intenditur, respondentes; quam Collectores* Actorum Eruditorum Lipsiensium (*d*) *his verbis describunt:* „Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, „cum annexa bulla, eique infundatur „spiritus vini tantum ut sphærula glacie circumdata omnino repleatur, neque tamen aliquid redundet, orificiumque tubi sigilletur hermetice. Deinde „parentur sex vasa, quorum quodlibet „aquæ libram & aliquid amplius potest „recipere, & in primum infundantur aquæ „gelidæ unciæ 11, in secundum unciæ 10, „in tertium 9, & sic porro. His peractis, „Thermometrum mergatur in vas primum, „eique affundatur aquæ ferventis uncia una; „observeturque quo usque ascendat spiritus in collo & locus unitate notetur. „Porro transferatur in vas secundum, cui „injectæ aquæ ferventis unciæ duæ; denuoque notetur locus ad quem ascendit spiritus, noteturque binario; & sic „deinceps. Quodsi cui placeat ulterius „procedere, donec tota aquæ libra sit „insumta; perfectius erit instrumentum „elaboratum, nempe duodecim numeris „aut asteriscis distinctum, quibus caloris „termini denotantur.

(*c*) In *Philos. Nat.* differt. 15. sect. 12.

(*d*) *Supplement.* Tom. 2. sect. 10. p. 453.

SCHOLION VII.

213. *Facile incautis imponere poterat* RENALDINUS, *ut sibi persuaderent, hac ratione exactam caloris mensuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus, & effectus respondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde vicissim cognoscentur gradus simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus diei ad calorem cujuscunque alterius: consequenter calorem metiri licet* (§. 23 Geom.). *Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quæso, supposita; ne forte aliquid esse ponamus quod non est, sicque erroneam conclusionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris simplum, si* 11 *unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, si* 10 *affundantur duo; triplum, si* 9 *tres; quadruplum, si* 8 *quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem simplum vi simpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in spiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, si idem effectus in Thermoscopio a calore aëris ambientis producitur qui ab aqua calida producebatur, aëri eundem competere caloris gradum qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his suppositis verum est. Quod enim primum attinet; concedamus interea calorem aquæ ferventis, si frigidæ affundatur, per hanc æqualiter distribui. Distribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per* 10; *tres per* 9; *quatuor per* 8 *&c. Si itaque assumamus æqualia istarum aquarum volumina, ex gr. singularum partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto casu &c. Fallit ergo suppositum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in spiritum vini uniformiter agit, id est, eadem vi per omne tempus actionis suæ. Prius experientiam vulgi non fugit, ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus sit. Posterius facillime ostenditur. Notum nimirum est, requiri aliquod temporis spatium, antequam calorem suum cum spiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis spatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. si vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diversis sub initium immersionis globi esset nunc simplus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aëris non modo in spiritum vini in globo, sed & in tubo contentum agit; adeoque non istum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum constat, num omnia fluida, in quibus idem est gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem suum communicent: nec forte hæc disquisitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri possent. Sufficit satis constare, methodum* Renaldinianam *suppositis niti partim precariis, partim manifesto falsis; ut adeo ratio nulla sit, cur vulgari divisioni in partes æquales hæc in partes inæquales divisio mechanica præferatur.*

SCHOLION VIII.

214. *Cæterum, quamvis mutationes Thermoscopii Florentini admodum sensibiles existant, ita ut spiritus vini per notabile intervallum ascendat, manu calida admota, iterumque descendat, ea remota: ubi tamen per insigne intervallum tempore hiemali descendit, ascensus intervalla decrementis frigoris non satis respondent. E. gr. hoc ipso* (a) *anno d.* 9 *Jan. h.* 8 *mat. liquor in Thermoscopio meo descenderat usque ad* 72*dum gradum scalæ frigoris, cum consueta Phænomena frigus intensum loquerentur: sed cum d.* 18 *Jan. eadem hora tempestate jam multo mitiore ad gradum* 80*mum subsisteret; hora tertia, qua nix*

(a) Scilicet 1713, quo prima horum Elementorum editio prodiit.

nix & glacies ad pristinum fluiditatis statum reducebantur, spiritu ad 72^{dum} hærebat. Scilicet ad eundem sæpius gradum depressus cernitur liquor, cum tamen Phænomena alia diversitatem caloris ac frigoris insignem manifesto prodant. Imo interdum depressio spiritus major, cum effectibus frigoris remissioris; minor vero, cum effectibus multo intensioris conjungi solet. Et hæc observantur, etiamsi Thermoscopium collocetur in loco, ad quem aëri externo liber patet aditus. Ratio Phænomeni hæc mihi videtur. Experientia constat, frigore invalescente, multum aëris ex fluidis expelli: id quod testantur vesiculæ tum superficiebus vitrorum in quibus continentur adhærentes. Extra dubium itaque positum videtur, frigore intenso ex spiritu quoque vini in Thermoscopio aërem ejici, & per tubi vacuam partem expandi. Cum adeo aër ambiens calidior rursus redditur, inclusi elater augetur spirituique ascensuro resistit (§. 146). Quoniam vero per experimenta MARIOTTI *(a) determinata quædam aëris quantitas in fluido salis instar dissolvitur; aër a frigore expulsus, crescente calore, sensim sensimque spiritui rursus permiscetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes semper erunt justis minores.*

EXPERIENTIA VI.

215. *Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus, & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exsiccabatur, ad pristinam redibat dimensionem. Multo autem brevior evadebat, ubi sub aqua per aliquod tempus ipsum detinueramus. Huc pertinent, quæ* SCHWENTERUM *expertum esse in* Geometria *(b) annotavimus. Et* Guilielmus MOLINEUX, *Armiger atque Societatis Dublinensis Secretarius, istiusmodi funem humectatum cum appenso pondere suspendit, eumque pro ratione exsiccationis resolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admovisset, ascendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque cessante rursus resolutus. Immo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit, celeriterque resolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito (c).*

COROLLARIUM.

216. Sola igitur humiditas aëris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipsosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLION.

217. *Humor nimirum dimensionem funis secundum diametrum auget. Sed cum gyri spirales filorum contortorum fere in circulares abeant, autopsia teste, dimensio secundum longitudinem decrescit. Abbreviationis igitur causa non modo ab insinuatione humoris in poros funium, sed & imprimis a spirali eorundem textura petenda.*

EXPERIENTIA VII.

218. *Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat 1′ 14″ circiter juxta mensuram Rhenanam, experti sumus. Cum enim eundem, duobus clavis utraque sui extremitate alligatum, juxta fenestram apertam extendissemus, & ope paucula ceræ Indiculum ligneum applicassemus, per complures dies non sine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum Sole oriente ros decideret; ita ut fere semicir-*

(a) *Essai de la nature de l'Air*, p. 97. & seqq.
(b) §. 129. p. 133.

(c) *Philos. Transact.* Anni 1685. n. 162. p. 1032. conf. *Acta Erudit.* A. 1686. p. 389.

micirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus descripsisse notaretur. Ast Solis radiis illustratus nervus iterum resolvebatur, atque Indiculum ultra terminum reducebat, in quo eum sub ortum Solis conspexeramus, cum fenestram cubiculi noctu clausam primum aperiremus. Non tamen singulis diebus æquales Indiculi itus reditusque notavimus. Eundem nervum sub aqua demersum sensibiliter contorqueri didicimus: satis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non secus ac si duo manibus prehendentes ejus extremitates ipsum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus quam eum eundem aquæ immitteremus, & radiis licet Solaribus exsiccatus ad pristinam longitudinem reducturi vires eludebat.

SCHOLION.

219. *Similia se expertum testatur* STURMIUS (*a*). *Non ignoro, quod alii* (*b*) *contrarium accidere affirmant; sed quid alii experti sint mihi quidem haud constat, cum circumstantias singulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prouti eandem expertus sum.*

PROBLEMA XLV.

220. *Hygroscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 20.

1. Funem cannabinum, aut nervum fidium, AB, juxta parietem extende super rotula B; alterique ejus extremo D pondus alliga, cui infixus sit stylus FG.

Tab. III. Fig. 20.

2. Eidem parieti affigatur lamina metallica HI; in partes quotcunque æquales divisa.

Dico Hygroscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem sensibiliter abbreviet, humore autem rursus expirato iterum resolvat (§. 215); pondus humore aëris aucto ascendet, imminuto descendet. Et quoniam index FG in lamina HI spatium monstrat per quod pondus ascendit vel descendit, intervalla vero ascensus & descensus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia sunt; instrumentum indicat, num dato hoc tempore aër plus alat humoris, quam alio habuit. Est igitur Hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. III. Fig. 21.

Si Hygroscopium sensibilius desideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero est, sive partes funis AB, AD, DE, EF, FG sint horizonti parallelæ, ut in schemate expressimus, sive ad eundem perpendiculares: prouti nempe quolibet in casu commodum visum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum præcedente.

Aliter.

(*a*) In *Colleg. Curios.* part. 1. tent. 14. phen. 5. p. 124. & seqq.

(*b*) *Traités des Barométres, Thermométres & Notiométres*, p. 94.

Aliter.

Tab. III. Fig. 22. 1. Funis cannabinus AC aut nervus fidium altera sui extremitate unco ferreo A alligetur, altera vero C in centro tabulæ ligneæ FF horizontaliter positæ firmetur.

2. Prope C infigatur pondus plumbeum D unius circiter libræ cum annexa regula DG.

3. Ex centro C in tabula describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aëris, qualem secum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rursus extemplo resolvatur (§. 215, 218.); evidens est quod, humore aëris aucto, Index quantitatem contorsionis vel resolutionis monstrare, consequenter humiditatis & siccitatis incrementa indicare debeat. Est igitur instrumentum Hygroscopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. III. Fig. 23. 1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero sui extremo suspendatur ex unco H.

2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.

3. Limbo pedamenti LM inscribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & spatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.

4. Globo infigatur stylus NO, cujus extremitas O limbi divisionem fere attingit. Tab. III. Fig. 23.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & siccitatis aëris ostensurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ proxime præcedens.

Aliter.

1. Parentur subscudes sulcatæ AB & CD ex ligno quercino. Tab. III. Fig. 24.

2. Intra crenas oppositas aptentur asserculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri possint.

3. In extremitatibus subscudium A, B, C, D clavis firmentur asserculi, & inter utrumque relinquatur spatium EGHF, cujus latitudo EG unius circiter digiti.

4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cujus axi in altera Machinæ facie index inferatur.

5. Tandem ex centro axis in eadem facie describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim, experientia teste, lignum abietinum humorem aëris facillime imbibat ac inde turgescat, humore autem rursus exspirato tabescat: si aëris humiditas augetur, asserculi AF & BH humore turgescentes propius ad se invicem accedunt; si illa rursus minuitur,

Tab. III. Fig. 24. iidem afferculi tabefcentes denuo a fe invicem difcedunt. Quoniam vero diftantia afferculorum nec minui poteft fine rotulæ L convolutione, nec augeri; index monftrabit incrementa humiditatis & ficcitatis aëris. Eft igitur machina conftructa Hygrofcopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 14. Manofcopium fuperius defcriptum in Hygrofcopium abit, fi globo evacuato E fubftituas fpongiam, aut materiam quandam aliam, quæ humorem facile imbibit. Solet autem fpongia primum aqua communi, deinde ubi bonam partem rurfus exficcata fuerit, aqua, vel aceto in quo aliquid falis Ammoniaci feu falis Tartari diffolutum fuerit, macerari atque in loco umbrofo denuo exficcari.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër humidus evadit, fpongia gravior reddita præponderat; fi ille levior redditur, hæc rurfus altius tollitur experientia tefte, adeoque index incrementa & decrementa humiditatis indicat. Eft ergo Hygrofcopium (§. 197). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

221. *Omnia Hygrofcopia, quæ hactenus defcripta funt, fenfim fenfimque a perfectione fua deficiunt, tandemque ab humiditate aëris parum aut nihil mutationis patiuntur. Ufus ultimi eft magis diuturnus, quam cæterorum omnium.*

SCHOLION II.

223. *In Hygrofcopio ultimo* GOULDIUS (*a*) *loco fpongiæ omnium maxime commendat oleum vitrioli, quod in dies in tantum augeri obfervavit, ut intra fpatium 57 dierum a tribus drachmis ad drachmas novem & 30 grana afcenderet. Enimvero non annotat, num etiam humiditatem tam prompte rurfus dimittat, quam eam attrahit; de quo valde dubito: adeoque præfenti inftituto oleum vitrioli minime congruum judico.*

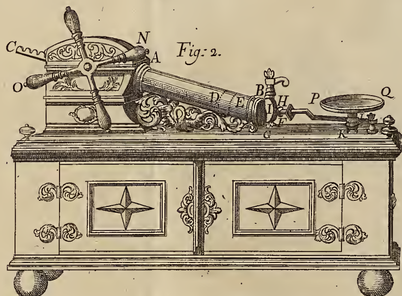
SCHOLION III.

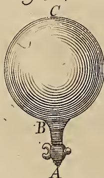
223. *Ceterum, quilibet, me non monente, videt ftructuram Hygrofcopiorum multis modis variari poffe.*

(*a*) In *Actis Erudit.* A. 1685. p. 315.

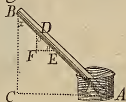
FINIS AEROMETRIÆ.

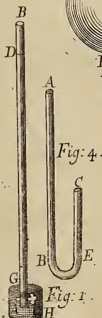
Fig: Aerom: Tab: I.

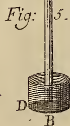


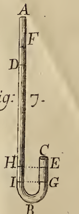


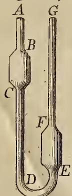


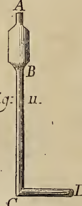












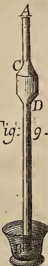
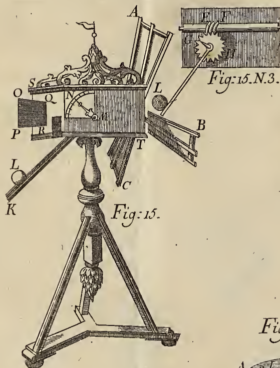


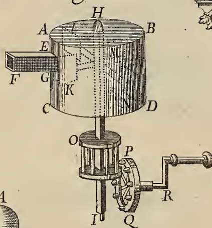
Fig: Aerom: Tab: II.

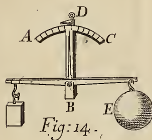


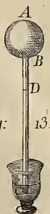


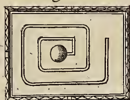












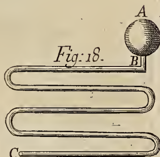
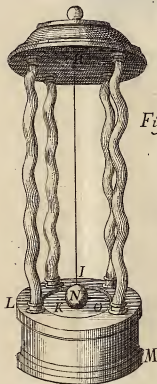
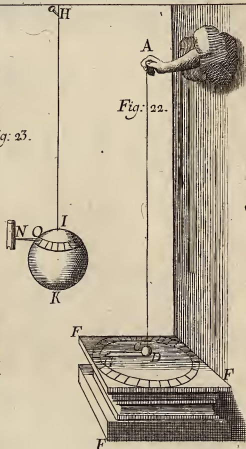
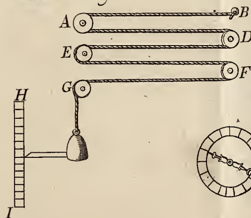


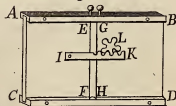
Fig: Aerom: Tab: III.

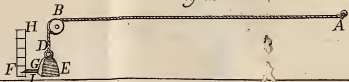














ELEMENTA HYDRAULICÆ.

PRÆFATIO.



N Hydraulica non modo Machinarum quibus aqua elevatur, atque fontium ſalientium conſtructio edoceri debet ; ſed explicandæ ſunt præterea Leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius ſtupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel ſoli Libri *Spiritualium* HERONIS aperte loquuntur; ita diffiteri non poſſumus, in poſteriore excolendo poſteris adhuc multum relictum eſſe, utut præclara jam dederint Viri de Hydraulica optime meriti MAJOTTUS, CASTELLUS, TORRICELLIUS, BORELLUS, GUILIELMINUS, MARIOTTUS & inprimis Celeberrimus VARIGNONIUS (*a*). Immo ipſa Machinarum Hydraulicarum conſtructio Matheſeos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod in dies magis magiſque excolatur. Si enim Machinas Hydraulicas fonteſque ſalientes ſpectes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari ſolet, quod

(*a*) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* An. 1703. p. 285.

quod non minus prodesse, quam delectare velit. Egregia scilicet vitæ humanæ commoda præstat, dum varias vias ostendit, per quas aqua ad locum datum derivari potest. Mirifice delectat, dum jucunda fontium salientium aliorumque admirandorum spectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad Scientiæ naturalis, tum ad Machinarum perfectionem tendunt: & si quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali distinctius cognoscetur; unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potissimum propositum sit Machinarum Hydraulicarum constructionem exponere, & ad causas suas revocare; non tamen Leges motus fluidorum prorsus insuper habebo, sed eas propositurus sum quæ ad ulteriorem disquisitionem viam sternunt, & præ reliquis scitu necessariæ sunt. Has meditentur inprimis illi, quos rerum naturalium cognitio solidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, nisi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydrostatica, proprietates aëris ex Aërometria perspexerit.



ELEMEN-

ELEMENTA HYDRAULICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Fluidorum a gravitate pendente.

DEFINITIO I.

1. Hydraulica est Scientia motus fluidorum, præsertim aquarum.

SCHOLION.

2. Quare cum in Hydrostatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex sublato autem æquilibrio motus nascatur; Hydraulica Hydrostaticam supponit. Unde contigit, ut nonnulli qui de Hydraulica scripsere Hydrostaticam cum ea conjunxerint.

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 1. 3. Per *Tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO III.

4. *Lumen* est apertura tubi.

DEFINITIO IV.

5. *Epistomium* vel *Clavicula* est instrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri potest.

SCHOLION.

6. Quoniam in Machinis hydraulicis epistomii creberrimus est usus, non inconsultum ducimus, ut ejus structura hic exponatur.

PROBLEMA I.

7. *Epistomium vel Claviculam construere.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus ABCD cum gemina tubi parte GH & EF, quartum altera GH cochlea instrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri possit; aut, si cochlea destituantur, tubo vel vasi afferruminetur.
2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti possit cylindrus solidus HI perforatus in K, & in L matrice, in O manubrio instructus, ut per cavitatem cylindri trajectus, mediante cochlea M, in hoc situ firmari, & ope manubrii O huc illucque versari possit.
3. Perforetur similiter uterque tubulus GH & EF.

Quodsi enim cylindrum solidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF respondeat; aqua in F effluere potest: si vero idem cylindrus HI soliditatem

foraminibus iiſdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, adeoque inſtrumentum eſt epiſtomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLION.

8. *Perfectiſſimam epiſtomii conſtructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumſtantiis ſingularibus, ſi qua omitti poſſint. Ita ex. gr. communiter omittitur cochlea* M *cum matrice, qua cylindrum* HI *intra cavitatem cubi* AC *firmandum eſſe diximus. Neque cochlea* F *ſemper adeſt, & tubus* GF *ſæpius horizontalis eſt.*

THEOREMA I.

Tab. I. Fig. 3. 9. *Locus* A *ad quem aqua ex loco alio* B, *ſive per alveum, ſive per tubos aut canales derivanda, humilior ſeu centro Telluris propior eſſe debet hoc ipſo altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat niſi vi gravitatis, gravitas vero ſit niſus verſus centrum Telluris (§. 4 *Mechan.*); per alveum fluere nequit, niſi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere poteſt. Neceſſe igitur eſt, ut locus ad quem aqua per alveum fluere debet centro Telluris propior ſit altero unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodſi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum deſcendat ex B in C, deinde rurſus aſcendat ex C in A: ſit DE linea horizontalis per C ducta, & BD atque AE ad eandem perpendiculares. Sit jam AE < BD, preſſio aquæ in tubo BC major eſt preſſione aquæ in tubo AC (§. 35 *Hydroſt.*). Iſta igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero ſi AE > BD; quamprimum aqua in tubo AC aſcendit ad altitudinem ipſi BD æqualem, alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34 *Hydroſt.*), ab ea igitur ad ulteriorem aſcenſum ſollicitari nequit (§. 75 *Mechan.*). Sed vi gravitatis deorſum nititur verſus C (§. 4 *Mechan.*), adeoque nec vi intrinſeca aſcendere poteſt. Ibi igitur ſubſiſtit; conſequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, niſi A ſit humilior B. *Quod erat alterum.* Tab. I. Fig. 3.

COROLLARIUM I.

10. Cum alveus vel tubus BC per quem aqua fluit ex B in C, ſit planum inclinatum (*§.* 258 *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari poſſunt, quæ in *Mechanica, cap. 6,* de deſcenſu gravium in plano inclinato demonſtrata ſunt.

COROLLARIUM II.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diverſos tubos fluentium eodem tempore acquiſitæ, ut tuborum longitudines reciproce (*§.* 302 *Mechan.*).

SCHOLION.

12. *Inſuper hic & in ſequentibus habemus reſiſtentiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi* (*§.* 933 Mechan.).

PROBLEMA II.

13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum.*

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (*§.* 911 *Mech.*); hoc eſt, inveſtigetur quam propior centro Telluris ſit locus ad quem aqua derivanda eſt, altero unde derivatur. (*§.* 904. *Mech.*).

2. Quod-

2. Quodsi locus ille hoc humilior fuerit; non alia re opus est quam ut aqua, vel per canalem, vel per tubos declives, ex loco excelsiore in humiliorem deducatur; prout vel magna, vel exigua ejus suppetit copia.

3. Ut aqua per intervalla nobis commoda visa effundatur, extremum tubi epistomio muniatur (§. 5).

4. Et quia, experientia teste, fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, sed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipsum assurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, sicque per ipsum celerius fluat.

5. Si tubus vel canalis per intervalla sufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua, remoto epistomio, continuo fluens intra puteum ex saxis exstructum colligatur necesse est; qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.

Tab. I. Fig. 3. 6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapsa rursus ascendere debet; deducenda est per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD (§. 9).

SCHOLION I.

14. *Utimur autem, in deducendis aquis, tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo est* 4, 5 *vel* 6 *digitorum, pro quantitate aquæ effundendæ, conjunguntur autem annulo ferreo* CD. *Tubo plumbeo* Tab. I. Fig. 4. *locus est, si aqua in altum elevanda ad fontes salientes; neque vero sanitati conducere deprehensa est aqua quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior superficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, nisi sumtibus parcas. Longitudo eorum est duorum aut unius & dimidii pedum, crassities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commissuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.*

SCHOLION II.

15. *In alveo quem prope fontem construxisti, ita aptandus est tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex superficie hauriat; quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eundem petentibus, superficiei vero insecta aliæque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad arcendas sordes lumini canalis primo cribrum ferreum, sed stanno obductum apponere, immo ad percolandam aquam turbidam spongiam. Ut aqua conservetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præstat.*

SCHOLION III.

16. *Ne aër interceptus cursum aquarum in canale intercipiat, sed exitus ei concedi queat, utque canalis ipse purgari possit; quoties opus fuerit; hinc inde est perforandus & obturaculo figuram coni truncati habente foramen obturandum.*

SCHOLION IV.

17. *Ceterum omni studio in deducendis aquis vitandus est aquarum ascensus; quia aqua ascendens majorem vim infert quam descendens.*

PROBLEMA III.

18. *Fontem naturalem arte construere.*

RESOLUTIO.

1. In loco elevato paretur fossa aggeribus undiquaque cincta, & variis meatibus

tibus ex cruſtis lapideis excitatis hinc inde diſtincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine inſtructum.

2. Foſſa hæc deſuper ſilicibus, calculis, & ad duos tresve pedes glarea operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari poteſt cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus diſtillabit aqua, & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur; atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLION.

19. *Si intra meatus foveæ ſat aquæ non contineatur ut perennis fluat; orificio meatus ultimi tubus cum epiſtomio aptandus.*

THEOREMA II.

Tab. I. Fig. 5. 20. *Si duo tubi æquales altitudines* AB *&* CD *atque æqualia lumina* E *&* F *habuerint, fuerintque ambo conſtanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia ſunt, & altitudines aquæ ſuper iiſdem etiam æquales, *per hypoth.* aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42 *Hydroſt.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum; conſequenter ſi aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus inclinati, ubi utriuſque altitudo eadem fuerit, ipſique fundi inter ſe æquantur (§. 47 *Hydroſt.*); ſi tuborum utcunque inclinatorum, modo æque-altorum, lumina fuerint æqualia, tubique conſtanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA III.

22. *Si duo tubi æquales altitudines* AB, *&* CD, *ſed lumina inæqualia* E *&* F *habuerint, fuerintque conſtanter pleni; quantitates aquarum effluentium eodem tempore ſunt in lumina* E *&* F. Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus diviſum in plura minora alteri E æqualia: per ſingulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundetur illi æquales, quæ per lumen minus effunditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effuſarum, ut lumen minus ad numerum partium in quas diviſum concipitur majus, hoc eſt, ut lumen minus ad majus (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

23. Si lumina fuerint circularia: quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & conſtanter plenis effuſæ ſunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium ſunt in ratione duplicata diametrorum. Patet eodem modo, quo Corollarium Theorematis præcedentis (§. 21).

SCHO-

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 6. 25. *Legem hanc experimentis non exacte respondere autor est* MARIOTTUS (*a*). *Observavit enim, si diameter luminis* F *erat diametri luminis* E *dupla, ex tubo minore plus quam quartam aquæ ex majore effluentis partem eodem tempore effundi, tuborum altitudine modica existente. Enimvero in Demonstratione abstrahimus ab omnibus obstaculis accidentalibus quæ irregularitatem inducere solent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet altitudo aquæ super lumine, minor quam ad latera vasis: aqua enim, in ea voluminis parte quæ lumini respondet, cavitatem assumit, cum effluenti non extemplo alia a lateribus succedere valeat. Quoniam vero hoc decrementum altitudinis majus est in tubo majore quam in minore, pressura quoque seu exeundi conatus minor erit in majore, quam in minore,* (§.44 Hydrost.) *Porro, dum aqua superior effluentis locum occupare nititur, vim qua premit ad descendendum impendit, non ad premendum. Unde denuo conatus ad exeundum minuitur. Tandem hic quoque habenda est resistentiæ aëris & affrictûs aquæ in superficie tubi & orificio imprimis ratio. Enimvero omnia illa impedimenta ad certas leges nondum revocata; immo hactenus nequidem constitutum est, quodnam eorum in casu quolibet dato prævaleat.* DECHALES (*b*) *affrictûs unice rationem habens, in aqua effundenda prærogativam majoribus luminibus tribuit, quia proportionaliter minorem superficiem habent; cum tamen ex modo dictis pateat* MARIOTTUM *prorsus contrarium expertum esse. Ipse vero* MARIOTTUS (*c*) *non diffitetur dari subinde causas quæ multas irregularitates inducant; ita ut nunc majoribus, nunc minoribus luminibus in aqua effundenda tribuenda sit prærogativa, & assertum suum experimentis confirmat.*

(*a*) *Traité du mouvement des Eaux.* Part. 3. disc. 1. p. 267.
(*b*) In *Tract. de fontibus naturalibus*, prop. 30. f. 132. Tom. 2. *Mund. Mathem.*
(*c*) Loc. cit. disc. 2. p. 176.

THEOREMA IV.

26. *Si duorum tuborum constanter plenorum* AB & CD *lumina* E & F *æqualia fuerint; quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut celeritates.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. aquam ex tubo AB effluere ea celeritate, quæ sit ad alteram ex tubo CD effusæ in ratione dupla. Quia hic tantum ratio habetur motus instantanei per foramen; motus aquæ ut æquabilis considerari potest, adeoque celeritates erunt ut spatia eodem tempore percursa (§. 33 *Mechan.*). Quodsi ergo filum aliquod aquæ in tubo AB extenderetur usque ad G, filum ex altero usque ad I; erunt longitudines EG & FI in ratione dupla seu celeritatum. Enimvero quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut fila ista seu cylindri EG & FI; quorum bases E & F cum æquales sint, *per hypoth.* altitudinum EG & FI rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sunt adeo etiam quantitates aquarum effluentium ut celeritates (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

27. *Si duo tubi habuerint lumina* E & F *æqualia, sed altitudines* AB & CD *inæquales, fuerintque constanter pleni; quantitas aquæ effluentis ex majore* AB *erit ad quantitatem aquæ effluentis ex minore* CD *eodem vel æquali tempore, in ratione subduplicata altitudinum* AB & CD.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 7. Cum vires aquas per lumina E & F expellentes sint gravitates absolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem, *per hypoth.* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia sunt vires mortuæ (§. 9 *Mechan.*), si quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & *a*, celeritates ut C & *c*; erunt vires ut A. C ad *a. c*, (§. 278 *Mechan.*), consequenter A. C ad *a. c* = AB : CD (§. 167 *Arithm.*). Est vero etiam A : *a* = C : *c* (§. 26), adeoque [cum porro sit A : *a* = A : *a*] A.C : *a.c* = $A^2 : a^2$ (§. 185 *Arithm.*). Quare $A^2 : a^2$ = AB : CD (§. 167 *Arithm.*) & hinc A : *a* = $\sqrt{AB} : \sqrt{CD}$ (§. 124 *Analys. finit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium sunt in ratione duplicata ipsarummet aquarum eodem tempore effusarum.

COROLLARIUM II.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium sunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione subduplicata altitudinum.

PROBLEMA IV.

30. *Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum* AB *&* CD, *una cum altitudine unius; invenire altitudinem alterius.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad numeros qui rationem aquarum effluentium exprimunt, & radicem altitudinis datæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).

2. Ducatur is in seipsum: erit factum altitudo CD quæsita (§. 28).

SCHOLION I.

31. *Cum ex altitudine data rarissime radicem perfectam extrahere liceat; ut altitudo quæsita exacte inveniatur, per regulas Arithmeticæ irrationalium operandum. Sit ex. gr. ratio data 3 : 5, altitudo data 7, reperietur radix altitudinis quæsita* $5\sqrt{7} : 3$. *Unde habetur altitudo ipsa quæsita* $\frac{25}{9} \cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION II.

32. *Quodsi cui leges Algorithmi irrationalium non fuerint perspectæ, is faciat; ut* 3 *ad* 5, *ita* 7 *altitudo data ad numerum quartum proportionalem* $\frac{35}{3}$, *& porro ut* 7 *ad* $\frac{35}{3}$, *ita* $\frac{35}{3}$ *ad altitudinem quæsitam; quæ ut ante* $= \frac{5.35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. *Sit enim universaliter* 3 : 5 = a : b, 7 = c; *reperietur per resolutionem Problematis altitudo quæsita* = $b^2 c : a^2$. *Sed quarta proportionalis ad* a, b *&* c *est* bc : a *& tertia proportionalis ad* c *&* bc : a *est ut ante* $b^2 c : a^2$. *Unde patet inferri posse*, ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæsitam: *id quod etiam ex demonstratione Theorematis quinti* (§. 27) *liquet. Atque hac analogia commodissime utuntur, qui a tricis Algorithmi irrationalium sibi metuunt.*

PROBLEMA V.

33. *Data ratione altitudinum tuborum constanter plenorum & per æqualia lumina aquas effundentium, una cum quantitate aquæ ex uno effusa; invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.*

RESO-

Resolutio.

1. Quæratur ad altitudines datas, & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effusæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque si radicem quadratam extrahas (§. 269 *Arithm.*), prodibit ipsa quantitas aquæ quæsita.

Ex. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effusa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(9.25:9)} = \sqrt{25} = 5$.

Theorema VI.

Tab. I. Fig. 7. 34. *Si duorum tuborum constanter plenorum altitudines* AB *&* CD *fuerint inæquales, lumina* E *&* F *itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione composita ex simplici luminum & subduplicata altitudinum.*

Demonstratio.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & l habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sint P & q. Porro altitudo tubi tertii $=$ A, lumen $=$ L, quantitas aquæ dato temporis effluentis Q; erit

$P : q = L : l$ (§. 22).
$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ (§. 27).
Ergo $PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 213 *Arithm.*).
Unde $Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 180 *Arithm.*) *Q. e. d.*

Corollarium.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$; consequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299 *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260 *Arithm.*); hoc est, si quantitates aquarum ex duobus tubis constanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina sunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

Theorema VII.

36. *Si altitudines duorum tuborum constanter plenorum* AB *&* CD *æquales fuerint; aqua per lumina* E *&* F *utcunque inæqualia eadem celeritate effluunt.* Tab. I. Fig. 6.

Demonstratio.

Illud per se patet, si præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia, aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adsit disparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus divisum in partes quotcunque, quæ singulæ minori lumini æquales sint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur ac si per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a pressione perpendiculariter imminentis aquæ evidens est, eandem in singulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

Tab. I. Fig. 7. 37. *Si altitudines tuborum constanter plenorum* AB *&* CD, *itemque lumina* E *&* F *inæqualia fuerint; celeritates aquarum effluentium sunt in ratione subduplicata altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum α, a & A, lumina eorundem L, l, & L, velocitates aquarum effluentium u, v & c. Quia L = L; erit $u : c = \sqrt{\alpha} : \sqrt{A}$ (§. 29). Est vero $\alpha = a$, *per hypoth.* adeoque $\sqrt{\alpha} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168 *Arithm.*) Porro ob $\alpha = a$, *per hypoth.* etiam $u = v$ (§. 36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

38. Cum, altitudinibus inæqualibus existentibus, aquarum per æqualia lumina fluentium celeritates similiter sint in ratione altitudinum subduplicata (§. 29), hæc vero ratio æqualis sit, si altitudines æquales: patet in genere celeritates aquarum ex tubis constanter plenis effluentium esse in ratione altitudinum subduplicata.

COROLLARIUM II.

39. Quadrata igitur velocitatum sunt ut altitudines (§. 260 *Arithm.*).

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 8. 40. MARIOTTUS (a) *multiplici experimento docuit, si ad vas* ABCD *applicetur tubus* EF, *plus aquæ per tubum æquali tempore effluere quam per idem lumen vasis* E, *tubo remoto, & motum aquæ eo magis accelerari, quo tubus* EF *longior. Cum altitudo vasis* AC *esset unius pedis, tubi vitrei* EF *longitudo trium pedum, diameter luminis trium linearum; intervallo unius minuti effundebantur* $6\frac{1}{6}$ *sextarii aquæ, tubo autem remoto nonnisi* 4 *circiter. Cum longitudo tubi* EF *esset* 6 *pedum, diameter luminis* F *unius digiti, aqua omnis intra* 37 *minuta secunda effluxit. Cum vero tubi dimidium* FH *rescinderetur, vas integrum intra* 45″; *tubo prorsus remoto intra* 95″ *evacuatum est. Tubo nimirum applicato, altitudo aquæ incumbentis & egressum orificio tubi proxime urgentis major est, adeoque motus aquæ magis acceleratur.*

(a) *Traité du mouvement des eaux*, Part. 3. disc. 6. p. 269. & seqq.

THEOREMA IX.

Tab. Fig. 41. *Si duo tubi* AB *&* CD *fuerint ejusdem altitudinis & lumina* E *atque* F *æqualia habuerint; tempora quibus deplentur sunt in ratione basium.*

DEMONSTRATIO.

Sit basis tubi CD dupla basis tubi AB. Quoniam altitudines æquales sunt *per hypoth.* quantitates aquarum in tubis contentæ basium rationem habent (§. 573 *Geom.*), adeoque ex hypothesi aqua in tubo CD dupla est aquæ in tubo AB. Concipiatur altitudo utriusque tubi in partes infinite parvas divisa, erit cylindrulus ejusmodi altitudinis in tubo majore CD duplus cylindruli in tubo minore AB. Uterque autem in utroque tubo eadem celeritate per lumen ejicitur (§. 36), & quia lumina æqualia sunt *per hypoth.* eædem quantitates aquæ eodem instanti fluunt per utrumque lumen. Ergo, eodem tempore quo cylindrulus HI effluit, nonnisi dimidium alterius LK ejicitur: ut adeo alterum dimidium expellatur opus est instanti altero. Tempuscula itaque, quibus cylindruli HI & LK effluunt

Tab. I. Fig. 5. fluunt, sunt in ratione subdupla, nempe ut bases tuborum AB & CD. Idem cum de ceteris eodem modo demonstretur, patet tempora quibus integri tubi evacuantur esse in ratione basium (§. 187 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

Tab. I. Fig. 1. 42. *Vasa cylindrica & prismatica* ABDC *ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decrescant secundum numeros impares ordine retrogrado sumptos.*

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG descendentis continuo decrescit in ratione subduplicata altitudinum decrescentium (§. 38). Velocitas gravis descendentis crescit in ratione subduplicata altitudinum crescentium (§. 87 *Mechan.*). Talis igitur est motus libellæ FG ex G in B descendentis, ac si inversa ratione ex B in G descenderet. Sed si ex B in G descenderet, æqualibus temporibus spatia crescerent secundum numerorum imparium progressionem (§. 86 *Mech.*). Ergo secundum eandem progressionem inverse sumptam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decrescunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege descendit, qua vi impressa per altitudinem ipsi GB æqualem ascenderet (§. 329 *Mechan.*).

SCHOLION.

44. *Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonstrari possunt, quæ nunc brevitatis gratia omittimus.*

PROBLEMA VI.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes singulis temporibus vacuandas; dato tempore quo depletur totum, itemque tempore quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes singulis horis evacuandas.

1. Fiat, Ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12, ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vasis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime superiores horæ penultimæ, quinque ulteriores horæ decimæ &c. 13 denique postremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora crescant in serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. altitudines vero, si numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, crescant in serie numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9 &c. (§. 42); erunt altitudines ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1, 4, 9, 16, 25, &c. (§. 110 *Analys. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144 complectitur omnes altitudinis vasis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 est quadratum ipsius 12 (§. 246 *Arithm.*), consequenter numerus partium æqualium, in quas altitu-

do dividenda, secundum seriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia distribuendus (*§. 42*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vasis substituere liceat vasa minora ipsis æqualia; data altitudine vasis intra datum temporis spatium deplendi, inveniri potest altitudo vasis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. *Patet ergo methodus Clepsydras construendi, quibus Veteres usos esse constat.*

THEOREMA XI.

48. *Aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium.*

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vasis vi solius gravitatis absolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam qua egreditur ab aqua supra orificium consistente pressa, in ratione subduplicata altitudinis istius aquæ tempusculo infinite parvo per foramen exeuntis, seu, quod perinde est, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ supra orificium (§. 37). Enimvero si aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ supra orificium æqualem; celeritas cadendo acquisita foret itidem ad eam qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione subduplicata altitudinis aquæ supra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87 *Mechan.*). Aqua igitur per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam cadendo ex altitudine aquæ supra orificium acquireret (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

49. *Si aqua per tubum* KE *descendens per lumen* G, *cujus directio verticalis, prosiliat; ad eam altitudinem* GI *ascendit ad quam libella aquæ* LM *in vase* ABCD *consistit.* Tab. Fig.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipsius celeritas est quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48); consequenter ea ipsi vis est qua ad altitudinem ipsi EN æqualem ascendere valet (§. 322 *Mechan.*). Quare cum directio luminis sit verticalis *per hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis existat, nec quicquam sit quod eandem mutet extra tubum; aqua sursum feratur necesse est ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vase consistit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

50. *Experientia constat, aquam per lumen* G *prosilientem elevari ad altitudinem ipsa* GI *minorem. Constat præterea, lumen* G *eo minus esse debere, quo minor est altitudo libellæ* LM *in vase* ABCD. *Immo propriis experimentis didici, minus esse debere lumen si mercurius salire debet, quam ut aqua saliat; consequenter si fluidum majore vi urgetur, quam si minore. Inde vero non concluditur Theorematis falsitas; sed tantum colligitur, subesse impedimenta quædam quæ ascensui resistant. In ea igitur inquirendum.*

SCHO-

SCHOLION II.

51. *Plerique præcipuam resistentiæ causam aërem allegare solent, per quem aqua saliens ascendit. Enimvero quamvis non negem aëris resistentiæ inter impedimenta locum aliquem esse concedendum, quæ obstant quominus ad eam præcise altitudinem ascendat unde decidit; causis tamen aliis majorem resistentiæ totalis partem tribuendam esse, mihi quidem satis probabile videtur. Aquas enim in vase ab aëre evacuato* (§. 40 *Aërom.*) *salientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aëre, ubi altitudo ascensus unius circiter pedis sit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua saliens longe infra libellam ascensum sisteret. Illud autem observare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramulosque dividi, in quot in aëre dispergitur; sed fere unitam versus eam plagam defluere, versus quam lumen* G *parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter salientis magis ab aëre resistente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen saltibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aëris resistentiam sensibiliorem esse puto. Ipsa enim aquæ in guttulas ramulosque divisio fieri nequit, nisi aliqua celeritatis parte imminuta; quemadmodum ex Regulis motus abunde constat.*

SCHOLION III.

52. *Cæterum hinc mirum non est, quod regula* MARIOTTI *defectum altitudinis a perpendiculo aquæ computandi, quam resistentia aëris potissimum superstruxit* (*a*), *& qua defectus isti in ratione duplicata altitudinum esse perhibentur, non satis exacte experientiæ respondeat. Quoniam tamen ejus aliquis esse potest usus; ideo non piget Tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum salientium altitudines tuborum per quos delabuntur, juxta illam assignantur, in pedibus quidem Parisinis & ejus digitis seu partibus duodecimis.*

Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.		Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.	
5′	5′	1″	55	55′	121″
10	10	4	60	60	144
15	15	9	65	65	169
20	20	16	70	70	196
25	25	25	75	75	225
30	30	36	80	80	256
35	35	49	85	85	289
40	40	64	90	90	324
45	45	81	95	95	361
50	50	100	100	100	400

SCHOLION IV.

53. *Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ ascendentis, quia observavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevetur quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus si languescit, posteriores in eas incurrentes retardantur: id quod ipsismet oculis suis videre poterit qui aquas salientes attentius contemplare voluerit. Atque inde est, quod, si lumen* G *angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua saliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, saltus altitudo statim major evadat. Huc pertinet, quod* TOR-

(*a*) *Traité du mouvement des eaux*, Part. 4. disc. 1. p. 304. & seq.

Tab. I. Fig. 9. Torricellius (a) *à se observatum annotavit.* „ *Quando, inquit, opposita manu foramen* G „ *penitus occluditur, deinde, retracta quam* „ *citissime manu, repente aperitur; videbantur primæ & præeuntes guttæ altius pervenire, quam sit deinceps culmen postquam* „ *aqua deorsum-fluere cœperit. Addo quod dispersionem in guttulas ipsa gravitas aquæ juvet.*

Scholion V.

54. *Maximum autem impedimentum in affrictu positum est: unde lumen seu orificium* G *optime levigatum requiritur.*

Scholion VI.

55. *Quamvis autem lumen non nimis ingens esse debeat, ut sufficiens aquæ copia constanter affluere possit; cum alias saltus non modo minuatur, sed prorsus impediatur; idem tamen nec nimis exiguum sit necesse est. Experimur enim, aquæ salientis altitudinem majorem esse si lumen majus, quam ubi minus fuerit. Certe* Mariottus (b) *observavit aquam salientem per lumina in eadem linea horizontali sita & in eodem tubo facta, quorum diametri erant* 1, 4, 6, 10, 12 &c. *linearum; notavitque altius ascendere eam quæ per majora egreditur, quam quæ per minora ejicitur.*

Theorema XIII.

Tab. I. Fig. 10. 56. *Aqua per tubum inclinatum* AB *vel per tubum quomodocunque inflexum* CD *descendens, per lumen* G *ad eam altitudinem in* L *vel* M *ascendit ad quam aqua in vase* HK *subsistit.*

(a) *De motu projectorum*, Lib. 2. *Oper. Geometr.* p. 192.

(b) *Traité du mouvement des eaux*, Part. 4. disc. 1. p. 303.

Demonstratio.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato AB, vel inflexo CD, eadem vi impellitur, qua impellitur ad lumen G in tubo NO (§. 34 *Hydrost.*). Sed vi impressa per lumen istud ascendit ad altitudinem altitudini libellæ ML æqualem (§. 49). Ergo etiam per lumen tuborum reliquorum saliens ad eandem altitudinem ascendere debet. *Q. e. d.*

Scholion.

57. *Veritatem Theorematis experimento confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea stanno obducta vas* HK *figuram parallelepipedi habens. Ad fundum afferruminari jussi quatuor tubos, quorum duo* NO & ST *sunt ad fundum perpendiculares, sed inæqualium diametrorum, tertius* AB *est inclinatus, quartus vero* CD *ex pluribus partibus diversimode inclinatis compositus; omnes una ad fundum pelvis* RZ *aquam salientem excipientis afferruminati. Denique in* M & L *ad vas aptati sunt tubuli inclinati, ut, si per canalem* a b *plus aquæ affluat, quam per lumina tuborum* G *salit, superflua per eos effluat: quo artificio quoque utendum, si experiri volueris quæ in antecedentibus de motu aquarum in tubis constanter plenis demonstrata sunt. Quamdiu igitur aqua eandem libellam* ML *tuebatur, altitudo salientium per omnes tubos erat eadem; neque augebatur, unius, duorum vel trium luminibus obturatis. Quodsi vero libella* ML *vel descenderet, vel obturatis tubulis in* M & L *ascenderet, salientium quoque altitudines omnes æqualiter decrescebant, vel augebantur.*

Theorema XIV.

58. *Aquarum per lumen horizontale vel ad horizontem inclinatum*

Tab. I. Fig. 11. D *salientium longitudines* DE *&* DF, *vel* IH *&* IG, *sunt in ratione subduplicata altitudinum in vase vel tubo* AB *&* AC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impressa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71 *Mechan.*), vi gravitatis autem deorsum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), nec vis una alteram impedire potest, quia directiones non sunt contrariæ; aqua a premente AB impulsa eodem tempore pervenit ad rectam IG ipsi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulsa eandem attingit, suntque rectæ IH & IG spatia, quæ interea vi impetus impressi descripsissent eædem aquæ. Sunt vero spatia IH & IG, quia motus per DF est uniformis (§. 490 *Mechan.*), ut celeritates (§. 33 *Mechan.*); celeritates in ratione subduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata salientium sunt in ratione subduplicata altitudinum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

59. Cum in medio non resistente omne corpus, vel horizontaliter, vel oblique projectum, Parabolam describat (§. 480, 482 *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum saliens Parabolam describit.

COROLLARIUM II.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, saliens arcuatum opus efficit, sub quo citra periculum madescendi deambulare licet; impetu quo abripiuntur guttæ descensum impediente.

SCHOLION I.

61. *Jucundum admodum spectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis solaribus illustrati Iridis coloribus superbiunt.*

SCHOLION II.

62. *Equidem tum aëris resistentia, tum aquæ facilis divisio impediunt, quominus arcus sint exacte parabolici; sed qui spectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

CAPUT II.

De Motu Fluidorum vi Aëris contigui producendo.

PROBLEMA VII.

Tab. I. Fig. 12. 63. *Construere Vas ad hortos irrigandos idoneum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat Vas cylindricum ABCD, exiguo orificio E instructum, ut digito appofito claudi possit. Tab. I. Fig. 12.
2. Fundus vasis CD constet ex lamina exiguis foraminulis pertusa.

Vel.

Tab. I. *Fig.* 13. Fiat vas sphæricum HB collo tenui HE instructum, & hemisphærium DCB sit, ut ante, foraminulis pertusum.

Dico, si utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fundi intrare; si digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ effluere; si tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula instar roris stillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi posse.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vase cum ambiente in eadem libella existat (§. 34 *Hydrost.*). Ast si digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua sint, ut juxta aquam effluentem aëri in vas aditus denegetur; aër ambiens impediet, quominus quidpiam aquæ effluere possit (§. 95 *Aërom.*). Si digitum removeas, aëris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem Atmosphæræ extensa in aquam in vase contentam & una cum aqua in aërem ad fundum AB gravitat. Quare cum pressio aëris per orificium in aquam æqualis sit resistentiæ aëris ad fundum (§. 34 *Hydrost.*); aquæ pondus hanc superabit, adeoque ea per fundum vasis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

64. *Siphonem construere, hoc est, instrumentum cujus ope liquor ex vase hauriri potest.*

RESOLUTIO.

Construatur vas FE, cujus pars media ABCD figuram cylindri, extremæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: sintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora quam quæ digito apposito commode claudi possunt. Tab. Fig.

Dico, si vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etsi superius orificium F exstet; si digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat; si denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

Aliter.

Cum globo AB connectantur duo tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F sint aperta. Tab. Fig.

Dico, si tubuli EF extremum liquori immergas & aërem ex vase per tubulum CD exsugas, liquorem in globum AB assensurum. Quodsi jam digito ad lumen D applicato siphonem extrahas, fore ut nihil effluat; ast si digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rursus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aërem exsugis, perinde est ac si vasis ab aëre evacuati orificium

Tab. I. Fig. 15. cium F in liquorem demergas, adeoque liquor in globi AB cavitatem ascendere debet (§. 101 *Aërom.*). Quodsi digito ad orificium D applicato siphonem extrahas, liquor ex eo per lumen F effluere nequit (*§. 95 Aërom.*). Quamprimum vero digitum ab orificio D removes, cum in F tantum resistat pondus atmosphæricum, liquor autem præter vim gravitatis ab eodem pondere atmosphærico per tubulum DC impellatur; resistentia a vi majore utique vincetur, adeoque liquor per F effluet. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

65. *Siphone secundo commodo utimur ad fluida specifice leviora a gravioribus quibus innatant separanda: unde Chymicis subinde non contemnendum præbet usum.*

P R O B L E M A IX.

66. *Siphonem construere cujus ope totus liquor ex vase quolibet in aliud quodcunque educi potest.*

R E S O L U T I O.

Tab. I. Fig. 16. Fiat tubus recurvus ABC, ita ut, orificio A in plano horizontali posito, altitudo minoris DB 31 pedes nunquam excedat. Ad communes usus altitudo dimidii, aut unius, vel alterius pedis sufficit. Quodsi brachium minus AB liquori immergatur, & per lumen C aër exsugatur; liquor ex vase tamdiu per tubum BC effluet, quamdiu lumen A sub liquore constituitur.

D E M O N S T R A T I O.

Quando aërem ex Siphone ABC exsugimus, in eo residuus dilatatur (§. 37 *Aërom.*), adeoque elater ejus debilior evadit (§. 79 *Aërom.*). Quare cum antea ponderi atmosphærico æquaretur (§. 34 *Aërom.*); nunc eodem minor est. Aqua igitur in tubum AB impellitur, donec elater aëris inclusi cum fluidi ascendentis gravitate pondus Atmosphæræ iterum adæquet (§. 93 *Aërom.*). Quodsi ergo non tanta fuerit altitudo BD, ut aqua intra tubum AB contenta, vi gravitatis respectivæ qua in Atmosphæram aquæ superficiei extra tubum incumbentem gravitat (*§. 28 Aërom.* & §. 34 *Hydrost.*), defectum elateris suppleat; in tubum BC descendet. Si jam orificium C infra libellam aquæ cui alterum A immersum est subsistit; gravitas aquæ respectiva in crure BC est ad gravitatem respectivam aquæ in crure AB, ut altitudo BE ad altitudinem BD (§. 41, 47 *Hydrost.*). Quoniam itaque nisus aëris in superficiem aquæ circa orificium A gravitantis & aquam ad ascensum urgentis continuatur per aquam in tubo BC contentam, utpote quæ ad descensum isto aëris nisu urgetur; aër ad orificium C resistens urgetur vi ponderis atmosphærici & gravitate respectiva aquæ, quæ est ut altitudo BE. Et eodem modo patet aëris nisui prope orificium A resisti vi ponderis atmosphærici [quod ob exiguam siphonis altitudinem BE pro eodem habere licet] & gravitate respectiva aquæ in tubo BA, quæ est ut altitudo BD. Cum igitur aëri ad orificium A minus resistatur quam ad orificium C; nisus illius ibidem prævalet,

 atque

Tab. I. Fig. 16. atque adeo aqua continuo per AB ascendit & per alterum BC descendit, quamdiu orificium A sub fluido demersum & alterum C sub libella constituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmosphærici aqua nonnisi ad altitudinem 32 pedum Rhenanorum elevari potest (§. 27 *Aërom.*); altitudo cruris AB, nempe BD, minor esse debet 32 pedibus Rhenanis, ut aqua per siphonem fluat.

SCHOLION I.

68. *Evidens adeo est, recte rejici artificium* HERONIS *ope Siphonis per montium vertices in oppositam planitiem aquas deducendi. Jubet enim* HERON, *ut extremitatibus Siphonis applicentur epistomia & ad nexum crurum infundibulum per quod aqua infundi possit, utrique siphonis cruri implendo sufficiens. Quoniam itaque aëris auxilio non modo est opus ad primum aquæ in crus minus ascensum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non potest ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmosphærico elevari solet. Suffragatur experientia: notum enim nobis est artificium* HERONIS *irrito successu fuisse tentatum, ubi altitudo major fuerat 32 pedibus Rhenanis.*

SCHOLION II.

Tab. II. Fig. 17. 18. 19. 69. *Illud quoque notatu dignum est, figuram siphonis ad arbitrium variari posse, modo orificium C sit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, si ex fluido extrahitur orificium A, fluidum omne per lumen inferius C egreditur, & quod in minore crure AB continetur secum veluti trahit. Quodsi sipho plenus ita constituatur ut lumen utrumque A & C sit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Videntur adeo fluida in siphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans descendens instar catenæ secum trahat leviorem.*

SCHOLION III.

70. *Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabulæ ligneæ AB infigæ alterum siphonis orificium C, quæ aquæ innatans & cum imminuta descendens id constanter ad eandem profunditatem demerget.* Tab. Fig.

SCHOLION IV.

71. *Denique notandum, fluere aquam per siphonem etiam interruptum, si nempe crura AD & EC conjungantur mediante tubo capaciore DE aëre pleno.* Tab. Fig.

PROBLEMA X.

72. *Diabetem construere; hoc est, vas quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.*

RESOLUTIO.

Fundo vasis AFGB afferruminetur Sipho inversus CDE, ea lege, ut crus longius DE ultra basin vasis exporrigatur, aut minimum ejus orificium sit in basi vasis; crus vero minus CD eandem non prorsus attingat; altitudo denique siphonis minor sit altitudine vasis AG. Tab. Fig.

Aliter.

Fundo vasis AFBG afferruminetur tubus DE, qui cruris majoris vicem sustinet; loco autem cruris minoris imponatur tubus alius capacior DC in C apertus. Tab. Fig.

Dico, si vas AFBG aqua vel alio liquore impleas; quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab.II. Fig.21. 22. Dum enim aqua infunditur, in tubo DC, seu crure minore siphonis, ad eandem altitudinem ascendit, ad quam in vase consistit (§. 34 *Hydrost.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE seu cruris longioris subsistit, consequenter per hoc nihil ejus effluere potest. Quamprimum vero plenum extiterit; ultra orificium D subsistit, adeoque vi gravitatis propriæ per tubum DE descendit; dumque semel fluit per siphonem CDE, tamdiu fluere debet quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immersum (§. *66*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

73. Quodsi vas non fuerit plenum, ad orificium E ore applicato aërem ex siphone CDE exsugas; liquor itidem omnis ex vase effluet (§. *66*).

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.23. 74. Hinc construi potest poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis; postquam sufficienter vinum hausisti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta, donec nihil amplius effluere sentis. Tum poculum KL alteri porrige, & jube ut ore ad orificium I applicato liquorem exsugat. Ubi igitur haustu absoluto poculum ab ore removerit, vinum adhuc fluens vestem madidabit.

SCHOLION I.

Tab.II. Fig.22. 75. *Si tubus* CD *vitreus fuerit, aërem in suprema ejus parte residuum una cum aqua fluente per tubum* DE *successive abripi observabis. Jucundum inprimis spectaculum, ubi aërem per tubulum vitreum fundo vasis in* E *infixum magna celeritate cum aqua defluentem conspicies. Hoc Phænomenon primus observavit* R. P. DE LA ROCHE *(a), cumque experimentum repeterem, varias adhuc circumstantias annotavi, unde usus in praxin redundat (b). Expertus inter alia sum, quod, cum diameter orificii* D *esset 6 linearum seu digiti dimidii, diameter vero inferioris* E *unius saltem lineæ, aër, tubum* DE *per superius* D *ingressus, per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impediverit. Hinc vero jam constat ratio, cur in diabetis istiusmodi aquæ fluxus interdum sistatur, antequam omnis effluxerit; continuandus tamen aliquantisper, si tubus* DC *elevetur; atque hinc manifestum mihi videtur, quod luminis tam superioris* D, *quam inferioris* E, *diameter eadem esse debeat, nec ipse tubus luminibus capacior.*

SCHOLION II.

76. *Quodsi altitudo tubuli* DE *major fuerit altitudine vasis* AG, *hoc non obstante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat; digito ad.* E *apposito, tubus* DC *attollatur, ita enim aër in tubo* DE *contentus dilatabitur, ac, elatere ejus imminuto* (§. 78 Aërom.), *aqua intra tubum* DC *altius assurgens in tubum* DE *sese præcipitem dabit. Quodsi itaque poculi* KL *operculo* K *tubus afferruminetur; ubi bibere volueris, non opus est ut sugas, sed operculum attolli sufficit.* Tab.II. Fig.23.

PROBLEMA XI.

77. *Aquam per siphonem interruptum elevare.*

RESOLUTIO.

1. Duo vasa æqualia AB & IK in eadem planitie collocentur, quorum unum AB sit apertum, alterum vero clausum, utrumque aqua plenum. Tab.II. Fig.24.

Xx 3 2. Ex:

(a) Vid. *Diarium Trevoltiense.* A. 1709. art. 86. p. 1709.
(b) In *Act. Erudit.* A. 1711. p. 13.

Tab.II. *Fig.*24. 2. Ex vase tertio QR undique clauso, & ab aqua vacuo, tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, sed non major quam 31 pedum esse potest) in vasa AB & IK, quorum prior fundum vasis AB fere attingit, alter SH operculo vasis IK afferruminatur.

3. Denique vasi IK afferruminetur tubus alius LN epistomio M instructus, & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN descendit, epistomio M aperto, aliam ex vase AB in vas QR per tubum DC ascendere debere.

DEMONSTRATIO.

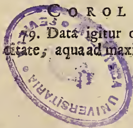
Cum enim gravitas aëris in tubo SH contenti, respectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla sit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde est ac si tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed in hoc casu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN descendit, per alterum DC ascendit (§. *66*). Ergo etiam in altero casu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vase QR jungitur, aqua per DC ascendere debet, dum per LN descendit. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

78. *Poterat idem eodem modo demonstrari, quo ascensum & descensum aquæ continuum in cruribus siphonis communis supra evicimus.*

COROLLARIUM.

79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem elevabitur, si in eadem altitudine collocentur plura vasa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, G &c. vasaque G & D, F & C, E & B tubis P *a*, M *b*, I *c*, vasa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vasis D, C & B tubi R, S, T cum epistomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores sint. Epistomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollit, atque ita porro. Tab.II. *Fig.*25.



SCHOLION.

80. *Aut magnum requiritur præcipitii perpendiculum, aut ingens vasorum apparatus, si ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem si in vasa* B, C, D, *mercurius infunderetur, tubus* BT 27 *digitorum responderet tubo* AE 31 *pedum* (§. 29 Aërom.); *sed hac ratione elevatio aquæ nimis sumtuosa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum respondet.*

THEOREMA XV.

81. *Fluidum per siphonem* ABC *eodem modo acceleratur, quo acceleratur fluidum per foramen vasis effluens a fluidi intra vas ad altitudinem profunditati orificii* C *cruris longioris* BC *infra libellam fluidi* AD, *cui crus siphonis minus* BA *immersum, æqualem consistente.* Tab.I. *Fig.*16.

DEMONSTRATIO.

Patet ex Demonstratione Problematis 9 (§. 66), vim qua fluidum per siphonem urgetur esse ut gravitatem fluidi absolutam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris supra libellam fluidi cui immersum; consequenter ut altitudinem

Tab. I. Fig. 16. dinem DE (§. 34 *Hydrost.*), quæ est excessus istius profunditas infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per siphonem accelerari debet quo acceleratur fluidum per vasis foramen effluens, si intra ipsum ad altitudinem DE consistat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

82. Quoniam aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium (§. 48); celeritas qua eadem per siphonem fertur eadem est, quam acquireret cadendo per profunditatem orificii extra aquam infra ipsius libellam DE.

COROLLARIUM II.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diversis vasis erumpentium celeritates sunt in ratione subduplicata altitudinum earum super foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diversos siphones fluentium erunt in ratione subduplicata profunditatum orificiorum per quæ effluunt infra libellam aquarum quibus crura minora siphonum immersa.

COROLLARIUM III.

Tab. II. Fig. 24. 84. Eodem modo patet, in siphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N effluentis eam esse, quam acquireret cadendo per altitudinem quæ est æqualis differentiæ tubi LN & partis tubi DC ultra libellam aquæ in vase contentæ (§. 77).

COROLLARIUM IV.

85. Similiter patet, per diversos siphones interruptos aquam fluere in ratione subduplicata earundem differentiarum tuborum LN & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vase AB computata.

SCHOLION.

86. *Hinc prono alveo fluunt alia in Theoria & Praxi siphonum utilia, quæ antecedentium gnarus sua sponte inde inferet.*

PROBLEMA XII.

87. *Aquam vi elastica aëris compressi movere.* Tab. II. Fig. 26.

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio assurgat tubus EF fundum non prorsus contingens, sitque apertura aliqua in G epistomio ad arbitrium obturanda. Quodsi jam per aperturam G sive ope follis, sive syringis, sive Antliæ Pneumaticæ, sive flatu oris vehementiore aërem intruseris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aër comprimetur in parte vasis reliqua (§. 17 *Aërom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 78 *Aërom.*). Cum adeo elater externi ambientis minor sit, si clauso epistomio G epistomium F aperias, aqua ex vase AD per tubum EF ab aëre sese expandente expelletur.

SCHOLION.

88. *Si aër ope Antliæ comprimitur, non opus est epistomio G, sed sufficit cochlea muniri aperturam. Tubus vero FE in cochleam desinit, ut ad Antliam firmari possit.*

PROBLEMA XIII.

89. *Vi aëris loco suo expulsi aquam movere.* Tab. II. Fig. 27.

RESOLUTIO.

1. Sit vas quodcunque BQ per diaphragma RH in duo receptacula distinctum.
2. In superiori sit catinus DB foramine in K pertusus, quod cochlea obturari possit.

3. Per

Tab.II. Fig.17. 3. Per ejus medium transeat tubus AC diaphragma RH non prorsus attingens & epistomio I munitus.

4. Fundo catini conferruminetur tubus DEL, ultra diaphragma ad fundum fere vasis inferioris HQ protensus, tuboque AC longior.

5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere assurgens.

Dico, si receptaculum superius BR aqua repleas per foramen K, & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo superiore BR ejiciatur, & per tubulum DL in inferius descendat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aër in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17 *Aërom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 78 *Aërom.*). Quodsi ergo epistomium I aperias, elater aëris inclusi fortior magis premit aquam in vase BR, quam externus ad A resistit. Aquam igitur ex vase BR per tubum AC expellit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

90. *Quodsi tubulus* AB *exiguo lumine fuerit instructus, ut aqua ex eo saliat; ingeniosa hæc machina ab inventore* HERONE *Alexandrino* Fons HERONIS *appellatur. Patet ex demonstratione aquam hic urgeri ad saltum vi elastica aëris compressi, quemadmodum in Problemate præcedente: consequenter fontem* HERONIS *pendere a modo ingenioso aërem intra vas vi structuræ fontis comprimendi.*

PROBLEMA XIV.

91. *Aquam per rarefactionem aëris expellere.*

RESOLUTIO.

1. Sint duo vasa ABCD & CDEF per diaphragma CD a se invicem separata, habeatque superius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipso capacitatis. Tab.II. Fig.18.

2. Ex diaphragmate CD ascendat tubulus IK fundum catini non prorsus attingens.

3. Per fundum catini exsurgat alius tubulus LM, cujus lumen L à diaphragmate exiguo intervallo distet.

Dico, si vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF supponantur, fore ut aqua ex vase AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aër in vase CEFD incalescit, rarefit (§. 23 *Aërom.*) ejusque elater intenditur (§. 146 *Aërom.*). Elater igitur aëris inclusi fortius premit aquam in vase AD contentam, quam externus ad M resistit; consequenter aqua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

92. *Si aqua vi aëris compressi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur quo accelararetur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem primitivi, seu ejus qui ad orificium tubi resistit.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aëris compressi per tubum ejicitur, vis quæ impenditur ad eam ejiciendam est excessus vis elasticæ aëris compressi supra vim elasticam aëris ad orificium tubi resistentis, reliqua ad vincendam resistentiam insumta. Quoniam igitur perinde est, sive aqua ejicienda urgeatur vi elastica aëris; sive vi gravitatis aquæ eidem æquali; motus ejus eodem modo accelerari debet quo acceleratur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ejus qui ad orificium tubi resistit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam constituta aqua æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis servat (§. 48).

COROLLARIUM II.

94. Et si diversimode compressus aër ejicit aquam, celeritates quibus ejicitur sunt in ratione subduplicata altitudinum, ad quas constituta aqua cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis æquilibrium servat (§. 38).

COROLLARIUM III.

95. Quoniam elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine (§. 80 *Aërom.*); si aër primitivus in vase, antequam comprimitur, fuerit idem cum exteriore ad orificium tubi per quem aqua ejicitur resistente, vis qua aqua ejicitur est ut differentia massarum aëris compressi & primitivi.

THEOREMA XVII.

96. *Si aqua vi aëris compressi salit, ad eam altitudinem ascendit ad quam constituta aqua æquilibrium servat cum excessu elateris aëris compressi supra resistentiam aëris ad orificium tubi.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aëris compressi saliens ea celeritate ejicitur quam acquireret cadendo per altitudinem ad quam constituitur aqua æquilibrium servans cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis (§. 92); dum vi aëris compressi urgetur, perinde est ac si per illam altitudinem descendisset. Enimvero si per eam ascendisset, ad altitudinem saliret isti æqualem (§. 322 *Mechan.*). Ad tantam igitur etiam salire debet, dum vi aëris compressi impellitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

97. Quia in fonte HERONIS vis elastica aëris in vase PR compressi æquilibratur columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem salit ad altitudinem æqualem altitudini orificii D a libella aquæ in vase HQ. Tab. II. *Fig.* 27.

COROLLARIUM II.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL descendit, quantum per orificium A ejicitur, adeoque altitudo orificii D supra libellam aquæ in vase HQ continuo decrescit; altitudo quoque saltus continuo decrescit.

COROLLARIUM III.

Tab.II. Fig.26. 99. Et cum in vase AD aër continuo magis magisque dilatetur, dum aqua per tubum EF salit (§. 7 *Aërom.*), ac præterea, aquæ libella in eodem vase AD continuo descendente, resistentia aquæ in tubo EF crescat (§. 34 *Hydrost.*); altitudo quoque aquæ salientis continuo decrescere debet (§. 95).

SCHOLION.

100. *Nimirum gravitas aquæ in tubo* EF *ultra libellam in vase* AD *consistentis superaccedit resistentiæ aëris ad orificium* F *& cum eadem unita agit, ita ut resistentia totalis quam experitur vis elastica aëris compressi aquam in vase ad ascensum per tubum urgens, componatur ex elatere aëris ad orificium* F *resistentis & gravitate aquæ in tubo* FE *ultra libellam in vase consistentis elevatæ. Sed quoniam, aqua in aëre saliente, resistentia ista æquatur columnæ aquæ 32 pedes Rhenanos alta* (§. 28 Aërom.), *tubus vero* EF *vix dimidii vel unius pedis in vase vacuo existit; resistentia aquæ in tubo vulgo non attenditur.*

PROBLEMA XV.

101. *Data ratione aëris primitivi ad compressum; invenire altitudinem saltus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam aër comprimitur in ratione ponderum (§. 73 *Aërom.*), vis autem elastica aëris primitivi æquilibratur columnæ aquæ 31 pedum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*); ex data ratione aëris primitivi ad compressum inveniri potest altitudo aquæ cum compresso æquilibrium servantis in vacuo (§. 302 *Arithm.*).
2. Quodsi ergo aqua in aëre libero salit, cum resistentia aëris prope orificium æquetur columnæ aquæ 31 pedum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*); altitudo inventa mulctanda est 31 pedibus Rhenanis, ut relinquatur altitudo saltus.

Ex. gr. Sit aër compressus duplus aëris primitivi, adeoque ratio primitivi ad compressum ut 1 ad 2; reperietur columna aquæ compresso æquilibratæ *62* pedum Rhenanorum. Quodsi ergo aqua in aëre libero salit, resistentia est 31 pedum, adeoque altitudo saltus itidem 31 pedum. Eodem modo patet, si aër compressus sit triplus vel quadruplus primitivi; fore altitudinem saltus in casu priore 62, in posteriore *93* pedum, & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis aëris rarefacti ad volumen condensati seu primitivi, datur ratio elateris quo rarefiens expanditur ad elaterem primitivi (§. 148 *Aërom.*); eodem modo inveniri potest altitudo saltus, si constet quantum eo gradu caloris qui aëri incluso inest idem dilatari possit.

SCHOLION.

103. *Ex his principiis alia bene multa deducere licet: sed nobis dicta sufficiant.*

CAPUT

CAPUT III.

De Machinis quibus Aqua elevatur.

DEFINITIO V.

104. *Valvula* seu *Assarium* est obturaculum vasis vel tubi, quod introrsum aperiri potest; ast quo magis contra fundum seu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

105. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regressum vero impedit.

PROBLEMA XVI.

106. *Valvulam seu assarium construere.*

RESOLUTIO.

Tab.II. Fig.29. Valvulæ simplicissimæ C conficiuntur ex corio, habentque figuram circularem, & ansula D clavis affigitur fundo vasis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur.

Tab.II. Fig.30. Fieri etiam possunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compressis AB & foraminibus circum circa pertusis; quæ alio orbiculo orichalceo CD sursum deorsumque mobili teguntur.

Tab.II. Fig.31. Parantur porro ex lamina cuprea E, & corio tenui obducuntur, circa cardinem in H mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G instruuntur.

Quemadmodum vero hactenus descriptæ valvulæ embolis potissimum conveniunt, ita in fundo vasorum vel tuborum sequente utendum:

1. Foramen A torno excavetur, tantisper in conum desinens. Tab.II. Fig.32.
2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum, & clavo aut tigillo transverso D impediatur ne inverti possit.

Vel foramen hemisphæricum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA XVII.

107. *Syringem, hoc est, Machinam construere, ex qua aqua attracta violenter expelli potest.*

RESOLUTIO.

1. Construatur cylindrus ABDC ex materia solida, intus cavus, inferius tubulo CDF instructus. Tab. III. Fig.33.
2. Immittatur embolus K ex corio, vel alia materia quæ humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipsum & cylindrum aëri vel aquæ nullus concedatur transitus.

Quodsi tubulo F aquæ immisso, embolum K extrahas, in cavitatem ab aëre vacuam ea ascendet (§. 101 *Aërom.*). Embolo igitur intruso, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM I.

108. Impetus aquæ eo major, ipsaque aqua per longius spatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM II.

109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius spatium aqua propellitur.

PROBLEMA XVIII.

110. *Construere Antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi potest.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 34. 1. Paretur cylindrus cavus ex materia solida in aqua verticaliter erigendus, cujus inferior basis I valvula introrsum hiante instruatur (§. 106.

2. Immittatur embolus EK valvula sursum hiante in L instructus.

3. Pro ejus faciliori extractione & depressione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam I elevat & in cavitatem cylindri seu tubi AD ruit (§. 101 *Aërom.*). Quodsi ergo idem rursus deprimatur, valvula I aquæ exitum negante (§. 104), valvula L aperitur & aqua ultra embolum ascendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIX.

111. *Construere Antliam, quæ per meram expulsionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 35. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata est, divisus in aqua collocetur.

2. Embolus F valvula G instructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi possit. Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depresso, valvula G aperitur (§. 104), & aqua in cavitatem cylindri BC ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed dum rursus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (§. 104), & sic aqua vi emboli, agitatione sæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si quod vitium contrahit hoc Antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, si vis sufficiens in* K *applicetur: ea enim attolli aquam palam est.*

PROBLEMA XX.

113. *Construere Antliam, quæ aquam attractam violenter aliorsum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in fundo valvula L instructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.

2. Immittatur embolus K sine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumescit, tornatus, & corio vel stupa vestitus.

3. In H afferruminetur tubus alius NH cum valvula sursum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (§. 105) & in cavita-

Tab. III. Fig. 36. cavitatem cylindri ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed cum rursus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

114. *Ingeniosæ hujus machinæ inventor fuit* CTESIBIUS, *qui primus de aqua Antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis Mechanicis & Hydraulicis suo ævo celebris*, VITRUVIO *autore* (*a*). *Ab eo Antliæ dicuntur* Machinæ CTESIBIANÆ.

SCHOLION II.

115. *Ejus vires, sublato affrictu, multiplicare studuit diu multumque in Theoria & Praxi aquarum elevandarum versatus* MORLANDUS (*b*). *Virga nimirum ferrea* D *inter trochleas* B & C, *evitandi affrictus gratia, sursum deorsum movetur* (§. 956 Mechan.) & *ponderibus* E, F, G, H *oneratur, ut aquam fortius per tubum plumbeum* TV *expellat embolus* LM *ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad basin superiorem* NO *cylindri orichalcei* RN *dextre aptatum sine omni fere frictione mobilis; ad quam tollendam & duodecim annorum studium, & multum argenti se impendisse fatetur laudatus inventor.* Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA XXI.

116. *Aquam ope catenarum situlis instructarum elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 38.

1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut prisma sexangulare MN circa axiculum ferreum mobile.
2. Eo in loco quo aqua elevari debet, constituatur cylindrus aut prisma simile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.
3. Situlæ S catenis connectantur, quæ utrumque cylindrum vel prisma ambiant. Alii situlas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod sæpius accidit) catenis dissilientibus fundum aquæ petant. Tab. III. Fig. 38.

Quodsi cylindrum superiorem OP convertas, inferior similiter convolvitur & situlæ per aquam trajectæ aquam hauriunt superius effundendam.

SCHOLION.

117. *Quoniam situlæ utrinque vacuæ in æquilibrio sunt; pondus elevandum est aqua in situlis ex altera parte contenta, ubi ab affrictu discesseris, qua in his Machinis non exigua est.*

PROBLEMA XXII.

118. *Rosarium construere ad elevandam aquam.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 39.

1. Tubus ligneus AB in aqua constituatur tantæ altitudinis, ad quam aqua elevanda.
2. Tum sub aqua, tum in superiori loco quo aqua elevanda, collocentur ut in Problemate præcedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles.
3. Ad funem, cujus extremitates inter se connexæ, circa cylindros GH & ED circumductum, aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor fit frictio) hemisphæria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

(*a*) Lib. 10. c. 12. conf. lib. 9. c. 9.
(*b*) *Elevation des Eaux* c. 4. art. I. p. 35. & seqq.

Tab. III. Fig. 39. Dum enim cylindris circumvolutis globi aut hemiſphæria per tubum AB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

SCHOLION.

Tab. III. Fig. 40. 119. *Alii utuntur priſmatibus quadratis loco tuborum & tabulis ligneis quadratis loco globulorum. Immo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis ſubſtituunt. Cæterum hæc Machina uſum quoque habet in foſſis & fluminibus a fæcibus purgandis. Ingens tamen affrictus eſſe ſolet, quem parum curare ſolent, ubi virium ad aquam elevandam compendium quæri neceſſitas nulla jubet: id quod & de aliis machinis, in quibus ingens affrictus eſt, notandum.*

PROBLEMA XXIII.

120. *Aquam tympano vel rota ſitulis inſtructa elevare.*

RESOLUTIO.

Structura admodum variari ſolet pro diverſitate quantitatis aquarum elevandarum, & altitudinis ad quam evehenda.

Tab. IV. Fig. 41. Si magna aquæ quantitas ad exiguam altitudinem elevari debet; tympanum conſtruitur AB in 8 cavitates diviſum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis vices ſuſtinet, ut aqua per ejus foramina E in ciſtam G effundi poſſit.

Tab. IV. Fig. 42. Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, ſitulæ ligneæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trajiciuntur, rota circumacta, & ſuperius in B effundunt.

Quodſi rotæ palmulas non in fronte gerant, ſpatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonniſi foramine in palmula ſuperiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rurſus effunditur. Tab. IV. Fig. 43.

Sunt qui ſitulas congiales A vel (quod præſtat, ne ſcilicet tantum aquæ perdatur) capſas quadratas unico foramine inſtructas B ad latus rotæ aptant: ſunt & qui helicibus CD à peripheria ad centrum fere tendentibus inſtruunt. Alios modos ſilentio præterimus. Tab. IV. Fig. 44. Fig. 45.

SCHOLION.

121. *Rotæ iſtiuſmodi ſtructura plurimum inter ſe variant: non tamen omnes ejuſdem notæ. Sunt enim, quæ multum aquæ inutiliter diſſipant, antequam in receptaculum commune effundatur. In praxi tamen ejus non ſemper habetur ratio, modo aquæ ſufficiens copia elevari poſſit.*

PROBLEMA XXIV.

122. *Cochlea* ARCHIMEDIS *aquam elevare.*

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB circumvolvitur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea deſignare ſolemus (§. 854 *Mech.*). Tab. IV. Fig. 46.
2. Cylindrus inclinetur ad horizontem ſub angulo 45 circiter graduum, ſitque orificium tubi B ſub aqua demerſum.

Quodſi cochleam ita circumagas ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem aſcendet tandemque in A effundetur.

Aliter.

Aliter.

Tab. IV. Fig. 47. 1. Basis cylindri tam superior, quam inferior, dividitur in 4 vel 8 partes æquales, & puncta divisionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c. in superficie cylindri descriptis, in quas transfertur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividuntur in tot partes æquales, quot sunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HI partes duæ, in CK tres &c. transferantur, ut adeo tota cylindri superficies in areas quadratas sit divisa.

2. Anguli diagonaliter oppositi connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenso facile designantur, & juxta harum ductum helice fulcetur cylindrus.

Tab. IV. Fig. 48. 3. Ad helicem firmentur asserculi admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.

4. Basibus denique circum circa affigantur asseres tenues & annulis ferreis minuantur, totaque superficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION I.

123. *Peripheria basium cylindri dividi potest in quotcunque partes æquales, & in lineas verticales puncta divisionum conjungentes transfertur distantia helicum, quoties fieri potest, in tot partes æquales subdividenda quot sunt lineæ verticales, ut inde divisiones earum determinentur, quemadmodum in resolutione Problematis præcepimus. Si diameter totius cochleæ 18 digitorum diameter axis 6 vel 4, distantia helicum 9 digitorum esse solet.*

SCHOLION II.

124. *Hac Machina exigua vi multum aquæ attolli posse, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non sufficit; sed quæ ab una effunditur, haurienda est ab altera, & ita porro.

PROBLEMA XXV.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelsiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requisiverit.

2. Intra turrim seu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis situlis instructæ (§. 120), vel sitularum catenis connexarum (§. 116), vel rosarii (§. 118), vel cochlearum *Archimedæarum* (§. 122), vel antliarum (§. 110, 111), viribus vel animatis vel inanimatis legitime applicatis, juxta regulas C. 17 *Mechanicæ* (§. 876 & seqq.) traditas.

3. Aqua effusa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati sint tubi per quos iterum descendet.

4. Ne aqua ultra latera aheni unquam assurgat, unus alterve ad summitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium refluat unde hauritur.

5. Hi

5. Hi tubi verticales conneĉtantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defossis, & ad eum usque locum protensis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in quos hient lumina horizontalium epistomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti possit (§. 5).

Aperto enim epistomio aqua in tubo verticali ascendet (§. 34 *Hydrost.*).

SCHOLION.

127. *Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inseritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochlea* ARCHIMEDIS, *ac cylindri superiores rosariorum & catenarum situlis instructarum instruuntur rotis radiatis, quibus aliæ dentatæ occurrunt. Ex. gr. Ponamus rosarium calcando moveri debere. Construendum igitur erit tympanum ingens* (§. 886 Mechan.), *cujus axi una infigenda rota stellata, occurrens radiatæ, de qua ante diximus. Jungitur autem rotæ radiatæ verticularis ad conservandum impetum. Quodsi equus eandem Machinam movere deberet, axi verticali temone instructo* (§. 888 Mechan.) *infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodsi homo partim trahendo, partim deprimendo, aquam ope rosarii elevare teneretur, tympano substitueretur axis cum scytalis & rota verticulari* (§. 882 Mech.). *Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vectis homodromi versando* (§. 884 Mech.) *infigenda rota radiata, quæ circumagat stellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentatæ dentes in plano, axem cum cylindro rosarii communem habenti, occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis casibus fieri debeat, modo Problemata Mechanica de potentiarum ad Machinas applicatione fuerint perspecta.*

CAPUT IV.

De Fontibus Salientibus.

PROBLEMA XXVI.

128. Construere fontes salientes.

RESOLUTIO.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiorem (§. 110 & seqq.) & intra vas satis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rursus descendat.
2. Cum tubis hisce conneĉtantur alii horizontales sub terra defossi, per quos aqua usque ad originem fontium salientium deducatur.
3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo sit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum prosiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 56).

SCHOLION I.

129. *Quodsi aqua saliens ad altitudinem datam ascendere debet, quæsito satisfieri potest per Schol. 3, Theor. 12* (§. 52).

SCHO-

SCHOLION II.

130. *Quodsi desideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per Theor. 3 Cor. 1 (§. 23), & per Theor. 5* (§. 27).

SCHOLION III.

131. *Si denique aquarum ex diversis unius fontis tubis salientium altitudines inæquales requirantur; quæsito potiemur per Theor.* 12 (§. 49) *& Theor.* 13 (§. 56): *ubi & observasse juvabit quæ superius in Scholiis Theor.* 12 (§. 50 & seqq.) *monuimus.*

PROBLEMA XXVII.

132. *Fontem construere, ex quo aqua erumpens pilam æneam projiciat, descensumque parantem continuo repellat.*

RESOLUTIO.

Tab.V. Fig.49. 1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate sua impetum impressum eludat.

2. Tubus, per quem aqua salit, BC sit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquæ sufficiens copia ex insigni altitudine in tubum BC deducatur.

Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum, & descendentem constanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus sit ad horizontem exacte perpendicularis, *per hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter ascendit. Quoniam vero ex insigni altitudine delapsa, *per hypoth.* & ex tubo ea celeritate erumpit quam cadendo per istam altitudinem acquireret (§. 48), magna quoque celeritate movetur (§. 91, 473 *Mechan.*), adeoque globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari ascendendi (§. 534 *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit ad quam vi impressa ascendere licet (§. 317 *Mech.*), vi gravitatis suæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215 *Mechan.*). In descensu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impresso, ut ante, ascendere cogit. Quamobrem globus in aëre pendulus sursum deorsum feretur, quamdiu aqua ex tubo saliens satis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi ascensum descensumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem substituere licet, ex. gr. avem cum alis expansis.

SCHOLION.

134. *Quoniam globus, ut ex alto rursus descendens in aquam salientem incurrat, in eadem constanter linea perpendiculari ascensus descensusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime exposita.*

PROBLEMA XXVIII.

135. *Construere fontem, qua aquam versus diversas plagas projiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB aquam advehens verticalis & ipsi infixi sint alii horizontales DE & GH, alii, ad horizontem versus diversas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem versus plagas illis intermedias reclinati, ut FL. Tab.V. Fig.50.

Tab.V. Fig.50. Quoniam aqua directionem luminis per quod prorumpit retinet; per lumen A saliens perpendiculariter ascendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diversæ amplitudinis (§. 59), & ad diversas plagas tendentes describet. Fons igitur aquam versus diversas plagas ejicit.

Aliter.

Tab. IV. Fig.51. Tubus AB per quem aqua salire debet sit superius clausus in A, & luminis loco vel undiquaque, vel in dimidia superficiei parte, foraminulis exiguis pertusus.

Quodsi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis; aqua versus omnes plagas per foraminula saliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapsus (§. 58) satis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodsi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere assurgentem epistomio C instruas; eo aperto, spectatores veluti ab imbre improviso madidati recedent.

SCHOLION.

137. *Probe autem tenendum est, luminum per quæ aqua egreditur diametros ipsorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aëris resistentia aliaque impedimenta* (§. 50. & seqq.) *impetum aquæ statim eludant. Ipsi quoque fontes sufficientem aquæ copiam suppeditare; aquæ impetu sufficiente gaudere debent.*

PROBLEMA XXIX.

138. *Fontem construere, ex quo aqua instar pluviæ prosiliat.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig.52. Tubo, ex quo aqua salire debet, afferruminetur globus, vel corpus lenticulare ex duobus segmentis sphæricis compositum AB, ex lamina metallica confectum, cujus superior superficies minimis foraminulis pertundatur.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu versus superiorem laminam AB propulsa sub forma tenuissimorum filamentorum in varias guttulas mox dispergendorum prosiliat.

PROBLEMA XXX.

139. *Fontem construere, ex quo aqua prosiliens ad modum lintei expanditur.*

RESOLUTIO.

Tubo AB afferruminentur duo segmenta sphærica C & D, quæ fere se invicem tangant &, mediante cochlea E, ad eum situm facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat, prout usus postulaverit. Tab. IV. Fig.53.

Alii vel in tubis lumine destitutis, vel in corporibus sphæricis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam saliens ad modum lintei expanditur, si impetus fuerit sufficiens.

PROBLEMA XXXI.

140. *Fontem construere, quæ aquam spumescentem jucundo spectaculo ejiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari possit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur. Tab.V. Fig.54.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens spumescet, ac fere nivis aërem opplentis floccos æmulabitur.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

141. *Fontem construere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque sitos derivari possit, & directionem luminis retineat; non alia re opus est, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abscondantur, quorum orificia hient per eas partes unde aqua prosilire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquæ salienti figuras varias conciliare licet, concipi potest. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.*

PROBLEMA XXXIII.

143. *Construere fonticulum salientem, qui, ubi salire desiit, clepsydræ instar inverti potest.*

RESOLUTIO.

Tab.V. Fig.55. 1. Fiant duo vasa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua saliens consumere debet; tantoque majori intervallo PN a se invicem remota quanto major aquæ salientis altitudo desideratur (§. 49).

2. Sit BAC tubus recurvus in C epistomio instructus, & DEF tubus alius itidem recurvus in D epistomio munitus.

3. In I & K sint tubuli alii utrinque aperti, & fundos vasorum NO & LM fere attingentes: quousque similiter tubi QR & ST pertingunt.

Quodsi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epistomio C, ea prosiliet fere ad K, & delapsa per tubulum I apertum in vas NO, ruet aëremque contentum per tubum QR expellet. Ubi vero aqua omnis ex vase LM effluxerit; machina inversa, delapsa ex vase NO salientem efficiet. Tab.V Fig.55.

COROLLARIUM.

144. Si vasa LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ spatium tota effluat; Clepsydram habebimus salientem in suas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA XXXIV.

145. *Construere malluvium cum fonticulo saliente.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vasis, cui aqua infunditur. Tab.V. Fig.56.

2. Ex vase descendat tubus ab L usque ad M, ubi versus I inflectitur.

3. In K applicetur epistomium, quo aperto aqua prosiliet fere ad L usque (§. 49).

4. FG sit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, si aquæ salienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia superius exposita (§. 135 & seqq.).*

PROBLEMA XXXV.

147. *Flatu oris aquam salientem efficere.*

RESOLUTIO.

1. Sit AB sphæra vitrea vel metallica, & Tab.V. Fig.57.

 2. In

Tab.V. Fig. 57. 2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C instructus, & in D infimum sphæræ punctum fere attingens.

Dico: si aërem per tubulum CD exsugas, & orificium C in frigidam statim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in sphæram ascendat. Quodsi iteratis suctionibus ultra medietatem fuerit repleta, & ore in C applicato aërem per tubulum infles, remoto ore aqua prosiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aërem exsugis, in sphæra AB inclusus rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerso tantum fere aquæ ascendere debet, quantum aëris fuerit eductum (§. 149 *Aërom.*). Quodsi vero per tubulum CD aërem infles, is per aquam specifice graviorem (§. 57 *Aërom.*) ascendet (§. 99 *Hydrost.*); consequenter aër inclusus comprimetur (§. 5 *Aërom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

148. Quodsi hanc sphæram aquæ ebullienti immittas; aër rarefiet (§. 23 *Aërom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD salire debet.

SCHOLION.

149. *Fonticulus hic ab inventore* HERONE *nomen* Pilæ HERONIS *sortitus est.*

PROBLEMA XXXVI.

150. *Fonticulum construere accensis candelis salientem.*

RESOLUTIO.

Tab.V. Fig. 58. 1. Ex lamina metallica fiant duo vasa cylindrica AB & CD.

2. Jungantur tubis utrinque apertis KL, ut aër ex superiore in inferius descendere possit. Tab.V. Fig. 58.

3. Tubis afferruminentur candelabra H;

4. operculo vero basis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epistomio G instructus, & ad fundum fere vasis protensus.

5. In Q sit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi possit.

Dico, candelis in H accensis, aquam per tubum EF salire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis 14 (§. 91).

SCHOLION.

151. *Hoc eodem artificio efficies statuam ad præsentiam Solis, vel candelis accensis, lacbrymas effundentem. Neque enim alia re opus est, quam ut ex cavitate in qua aër rarefit tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.*

PROBLEMA XXXVII.

152. *Fontem intermittentem construere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vasis AB ascendat tubus EF utrinque apertus, foramine in M exciso. Tab.V. Fig. 59.

2. Tubus hic afferruminetur tam vasi superiori in H, quam inferiori in E.

3. Vas superius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi possit; in basi autem inferiore multa foraminula, per quæ destillare queat.

4. In vase inferiore sit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat nisi ad altitudinem EM constituta.

Dico

Tab.V. Fig.59. Dico, aquam ex hoc fonte per intervalla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine M aperto aëri externo per tubum EF in vas superius AB aditus pateat; aëris inclusi elater æqualis est ponderi atmosphærico (§.33 *Aërom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vase contentæ ipsi juncta pressionem majorem efficit, quam resistentia ponderis atmosphærici ad foraminula, adeoque aqua destillare debet. Quamprimum vero aqua delapsa foramen M occludit, ut nullus amplius aër in locum aquæ delapsæ succedere possit; perinde est, ac si vas quoddam exiguo orificio instructum inverteres, adeoque fluxus aquæ per foraminula sistetur (§. 95 *Aërom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque assurgit, per foramen G in cavitatem vasis CD descendit. Ea igitur defluente, foramen M rursus aperitur, aërique aditus in vas superius AB denuo conceditur. Unde patet aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus adeo fontem intermittentem. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Fig.60. Quodsi fonticulum per intervalla salientem desideres, fiant omnia ut ante, nisi quod loco foraminulorum aptandi sint tubi recurvi PQT & RSV.

Aliter.

Tab.V. Fig.61. 1. Sit tubus EF aquam advehens in cavitatem vasis AB.

2. Ex hoc vase descendat sipho GHI in minus CD lumine conveniente in L instructus.

Quamprimum aqua ultra siphonem in AB ascenderit, per siphonem fluet, donec vas exhauriatur, (§. 72) adeoque tamdiu per lumen L saliet. Quodsi igitur efficias, ut plus aquæ per lumen L saliat quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermittentem. Tab.V. Fig.61.

SCHOLION I.

153. *Hoc posteriori artificio haud difficulter efficies, ut statuæ aquas evomant ex improviso in adstantes.*

SCHOLION II.

154. *Priori autem superstructa est lampas, quam in gratiam amici inventam publici deinde juris feci (a), & in sequenti Problemate denuo exhibeo.*

PROBLEMA XXXVIII.

155. *Lampadem construere, quæ eandem quantitatem olei ellychnio constanter affundit; & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vasculum cylindricum ACDB, cui oleum infundi possit; & ipsi afferruminetur aliud minus formam parallelepipedi habens FED, & rostro FH instructum pro recipiendo ellychnio. Tab. VI. Fig.62.

2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam fornici AC.

3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vasculi AB parieti adhæreat, quem *Tracheam* appello.

 Ejus

(a) In *Actis Erudit.* A. 1711. p. 30. & seqq.

Tab. VI. Fig. 62. Ejus osculum superius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O superficiem olei ad libellam HI constituti lambit.

4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque similiter apertus & ad eandem olei libellam HI protensus.

5. Fundo vasis DB afferruminetur tubulus QR, cujus osculum superius Q ultra libellam olei tantillo emineat, & transeat per matricem cochleæ qua vas ABDC ad pedamentum VTX firmatur.

6. Intra hoc fiat vasculum cavum *ab* & in G foramen exiguum, per quod aëri externo in cavitatem DKLB pateat aditus.

7. Denique in fornice fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas (si quando opus fuerit) a sordibus purgari queat.

Dico, si lampas a pedamento avulsa invertitur &, digito ad foramen G applicato, oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingressum per tubulum NM, vase in latus DC inclinato, in proprium receptaculum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rursus firmata munere suo, ut decet, fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI consistit, ne guttula quidem una per MN effluere potest, vi eorum, quæ ad Problema præcedens demonstrata sunt (§. 152). Insensibili autem ejus quantitate absumta, aër per tracheam OP ingreditur & oleum per MN destillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas constanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.* Tab. VI. Fig. 62.

Quodsi lampas in locum calidum deferatur, aër supra oleum rarefit (§. 23 *Aërom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91); quod cum ultra libellam HI assurgat, per tubulum QR in vasculum *ab* defluit, consequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi potest. *Quod erat secundum & tertium.*

SCHOLION.

156. *Ut demonstratio ocularis evaderet; vas* ABCD *ex vitro fieri curavimus, observavimusque Tracheam* PO *non nimis arctam esse debere, si desideres ut olei vel minima quantitas absumta statim refundatur. Etenim gutta olei aëri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, nisi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas* ACKL *abripiatur. Unde simul colligitur operam dandam esse ut orificium tracheæ sit bene politum.*

PROBLEMA XXXIX.

157. *Construere fonticulam salientem, in quo avicula tantum aquæ sorbeat, quantum ex illo profluit.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates divisum, quarum superior AEPD in duas alias AC & CB per diaphragma CN subdividitur. Tab. VI. Fig. 63.

2. In Q, R, & S fiant foramina cochleis munienda ut aqua infundi & effundi possit, prout usus postulaverit.

3. Ex

Tab. VI. Fig. 63. 3. Ex vase AC in vas DF descendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum vero hujus non prorsus contingens, atque clavicula P instructus.

4. Ex vase DF in vas BC assurgat tubus KI basi illius superiori afferruminatus, hujus vero basin superiorem non prorsus attingens.

5. A fundo fere vasis CB ascendat alius tubus LM, transiens per fundum phialæ O aquam salientem excipientis, epistomio T instructus.

6. Denique per rostrum, corpus & pedes aviculæ vasi CA insistentis ducatur siphon inflexus ZV.

Dico si epistomia P & T aperias, vasis AC & BC aqua repletis & rostro aviculæ aquæ immerso, fore ut aqua per tubulum LM saliat & avicula eam sorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum, epistomio P aperto, aqua per tubulum GH; ex vase AC in vas DF descendit; aqua ex phiala per rostrum avis ascendere debet (§. 77). Dum vero per siphonem ZV semel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhausta (§. *66)*. Enimvero quamdiu aqua per tubum GH descendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM salire debet (§. *89*). Habemus ergo fonticulum salientem, & aviculam tantum aquæ sorbentem quantum ex illo profluit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

158. *Eadem prorsus structura est fontis* Kircheriani, *in quo avis tantum aquæ sorbet quantum a serpente in poculum exspuitur. Absconde enim tubum* LM *intra corpus serpentis & eum inflecte, ut lumen* M *per os hiet: nec difficulter forma fontis in* Kircheriani *mutabitur.*

PROBLEMA XL.

159. *Fontem construere in vase vitreo clauso salientem.*

RESOLUTIO.

1. Sit sphæra vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum. Tab. VI.

2. Per cochleam transeat tubulus DC, Fig. 64. exiguo lumine in C, sed ampliore in D instructus, cujus pars major sit extra vitrum.

3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, sed altero CD multo longior EF.

4. Sint duo vasa IK & LM mediante tubo HN inter se connexa & basi superioris IK afferruminetur tubulus GH,

5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, si vas IK & aliquam sphæræ A partem aqua repleas, aquam ex sphæra per tubulum EF in vas LM descensuram & per tubulum DC in sphæram ascensuram, per lumen exiguum C saliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF descendit, aër in sphæra dilatatur (§. 36 *Aërom.*), adeoque elater ejus minuitur (§. 78 *Aërom.*). Quare cum inclusus ante dilatationem ponderi atmosphærico æqualis existeret (§. 33 *Aërom.*), quo aqua in vase IK premitur (§. 21 *Aërom.*); inclusus post dilatationem ad lumen C minus resistit, quam externus aquam in vase IK premit. Aqua igitur per tubulum DC ascendere & quia

Tab. VI. Fig. 64. quia lumen C exiguum *per hypoth.* salire debet (§. 55). *Quod erat unum.*

Cum vero fonticulus hic saliens sit sipho interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ salientis continuatio intelligitur per ea quæ de continuatione motus fluidorum in siphonibus demonstrata sunt (§. 66). *Quod erat alterum.* Tab. VI. Fig. 64.

SCHOLION.

160. *Ex demonstratione apparet aquam per tubulum* DC *salire debere; modo orificium* D *in aquam immergatur, orificio* F *extra eam constituto. Unde structura fontis multis modis variari potest.*

CAPUT V.

De variis Machinamentis Hydraulicis.

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. 65. 161. *Fores construere, quibus apertis aqua conspergatur ingrediens.*

RESOLUTIO.

1. Ad latera valvarum juxta superliminare collocentur vasa AB & CD aqua plena, quibus
2. tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG sub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epistomia, cum valvis P & Q ita connexa ut iis apertis & ipsa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L prosiliet & ingredientem madidabit (§. 49).

SCHOLION.

162. *Eodem artificio riscum construes, quo aperto, facies aperientis aqua conspergatur.*

PROBLEMA XLII.

163. *Efficere, ut in horto vel crypta deambulans subito aquis ex terra prosilientibus conspergatur.*

RESOLUTIO.

1. Sub terra ita abscondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depressa embolus movetur, paulo ultra ipsius superficiem promineat. Tab. VI. Fig. 66.
2. Embolus F sit valvula instructus, & ita aptetur ut a pede calcantis depressus a lamina elastica H rursus attollatur.
3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
4. Fundo antliæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra superficiem terræ paulo promineat.

Dico, aquam per M prosilire debere, si pede in G insistas.

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in superiorem antliæ AB partem delapsa urget valvulam E, quæ, cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc transitum concedit, in tubo LM usque ad N ascensuræ (§. 34 *Hydrost.*). Quodsi jam pede calcantis embolus

Tab. VI. Fig. 66. bolus F deprimatur, valvula E clausa aquæ regressum in superiorem antliæ partem impedit (§. 104), quare per tubum LM cum impetu ejicitur. Remoto autem pede ab embolo GF, pistillum situi suo restituitur ope elateris H. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

164. *Cum aqua ex altitudine quadam delapsa, ad eam fere rursus ascendat (§. 49); quæ tubo* CD *advehitur, ex vase intra terram defosso & in planitie replendo illuc derivari debet.*

SCHOLION II.

165. *Quodsi vero aqua per tubum* CD *advecta ex altitudine quadam fuerit delapsa; in* I *aptanda valvula, cui deprimendæ solum aquæ pondus non sufficiat: vel totum Machinamentum alia ratione construi deberet.*

PROBLEMA XLIII.

166. *Construere Machinam, quæ aquam insigni cum impetu elevet.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 67.
1. Construatur antlia compressiva AB (§. 113).
2. Ex ea transeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco parati altitudo sit 2 pedum, diameter octo digitorum.
3. Tubus CD sit valvula in D instructus, quæ in cavitatem vasis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epistomio O pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Dico, hanc Machinam aquam ad insignem altitudinem elevaturam. Tab. VI. Fig. 67.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur & aqua in antliam AB ascendit (§. 107): quo rursus depresso, illa clauditur, & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI ejicitur (§. 105). Quo facto, cum epistomium O sit clausum, aër in cavitate vasis HI comprimitur (§. 17 *Aërom.*). Quodsi itaque sufficienter fuerit compressus; aperto epistomio, aqua insigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli continuata, aër in eodem compressionis gradu conservari potest; hæc Machina aquam continuo ejicit.

PROBLEMA XLIV.

168. *Hydraconsisterium, hoc est, Machinam construere, quæ aquam ad incendia restinguenda ad datam altitudinem & in datum locum evomat.*

RESOLUTIO.

1. Fiat cista AB figuram parallelepipedi habens, & rotis C instructa, ut commode ad locum incendii advehi possit. Sunt & qui cistam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rota. Tab. VII. Fig. 68.
2. Intra cistam firmetur Machina Ctesibiana cum gemino cylindro (§. 113).
3. Ad agitandos embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.

Tab. VII. Fig. 68. 4. Tubus per quem aqua ejaculatur, immittatur alteri mobili GH, qui ad locum desideratum commode dirigi potest.

Si enim continuo aqua in cistam AB infundatur, & emboli nunc eleventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum desideratum ejaculabitur (§. *cit.*). Machina igitur ad restinguenda incendia commode utimur.

SCHOLION I.

169. *Belgæ aliique ipsorum exemplo excitati tubo mobili* GH *substituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infestata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout necessitas postulaverit. (Vocatur tubus istiusmodi Germanis* ein Schlauch.) *Unde apparet, hac ratione hydraeontisteriis esse locum, etiamsi flamma in conclavibus ædificii tantum sæviat, nec per tectum ac fenestras foras erumpat.*

SCHOLION II.

170. *Non inutiliter Machinæ* Ctelibianæ *substituere licet alteram* in Probl. 43 (§. 166) *descriptam, quia aquam non per intervalla, sed continuo ejaculatur.*

PROBLEMA XLV.

171. *Efficere, ut ad speculum aut objectum aliud accedens aqua ex improviso conspergatur.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 69. 1. Sit AB cista aqua plena, cujus fundo afferruminetur tubus recurvus CDEF.

2. Pars tubi intra cistam AB paulo infra embolum elevatum foraminibus nonnullis pertundatur.

3. Denique embolus G ita immittatur, ut cessante vi deprimente, per elaterium rursus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet, ac in tubo EF eo usque ascendet, donec in eadem altitudine subsistat, ad quam aqua intra cistam AB constituitur (§. 34 *Hydrost.*). Quodsi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, adeoque eadem ex improviso conspergeris. *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 69.

SCHOLION.

172. *Quodsi aqua ex alto delabatur, sufficit, ut pede deprimatur valvula, quæ aquæ aditum in tubum* EF *concedat* (§. 165).

PROBLEMA XLVI.

173. *Construere speculam, in qua speculator constitutus sonum ingentem cornu edat.*

RESOLUTIO.

1. In superiore loco speculæ constituatur vas aqua plenum AB, & in inferiore aliud aëre plenum CD, contra omnem vero aëris accessum optime munitum. Tab. VI. Fig. 70.

2. Ex vase superiori AB in inferius CD transeat tubus EF epistomio L instructus.

3. Ex vase inferiori CD ascendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os speculatoris, cui cornu K sit afferruminatum.

Etenim laxato epistomio L, aqua ex vase AB per tubum EF descendit, & ingenti celeritate aërem ex vase CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem sonum parit, qui aëre in cornu inflato audiretur.

SCHO-

SCHOLION I.

174. *Simili artificio sonos alios produces.* KIRCHERUS (*a*) *cantum singularum fere avicularum notis musicis exprimere, & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerpsit* SCHOTTUS (*b*) *quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

SCHOLION II.

175. *Huc referenda quoque sunt Organa Hydraulica jam veteribus nota & a* VITRUVIO (*c*) *descripta, a* PERRALTIO *in notis schematismo nitido egregie illustrata: de quibus, cum non amplius in usu sint, hic dicere non attinet.*

PROBLEMA XLVII.

176. *Ventum excitare ad flammam conservandam aptum.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 71.

1. Ad basin dolii superiorem AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut sex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur.
2. Tubus EC hinc inde instruendus est tubulis F, aut, si mavis, foraminulis, ut ab aqua descendente aër una in dolium abripiatur.
3. In basi inferiori CG, e regione luminis E, sita sit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.
4. In G aptetur tubus I angustior eo per quem aqua delabitur, ut delapsa ex dolio iterum effluat.
5. Denique in H sit tubus ad eum locum protensus, quo ventus spirare debet.

(*a*) *Musurgia* lib. 9. part. 5.
(*b*) In *Magia Universali Naturæ & Artis*, Part. 2. lib. 6.
(*c*) Lib. 10. c. 13. f. m. 325.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac dispergitur, aër ingenti impetu per tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide spirantem (§. 166 *Aërom.*). Tab. VII. Fig. 71.

SCHOLION I.

177. Franciscus Tertius DE LANIS (*d*) *autor est, se vidisse hoc artificio ventum majorem fuisse excitatum, quam qui follibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

SCHOLION II.

178. *Enimvero opus non est, ut tubus* CE *sit rotundus & vas* ABCG *figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, ex. gr. quadrata fieri potest. Unde quidam, loco Dolii, cameram ex lateribus construunt. Opera tantummodo danda, ne aër ex vase* ABCG *ullibi, quam per tubum* H *erumpere possit.*

SCHOLION III.

179. *Succedit etiam artificium, si nullum adsit dolium; sed aqua per tubum quadratum* AB *nullis spiraculis instructum tantum delabatur, ad quem aptatus sit tubus* GH, *unde ventus spirat. Quodsi usus postulaverit ut ventus interrumpatur; obturato orificio* H, *aperiatur aliud* I *vento exitum concedens.* Tab. VII. Fig. 72.

PROBLEMA XLVIII.

180. *Duo vasa construere, quorum unum, utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, nisi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ* Vasa concordiæ *vocantur.*

RESOLUTIO.

1. Sint AB & CD duo Vasa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter se communicent. Tab. VII. Fig. 73.

 2. In

(*d*) In *Magisterio Naturæ ac Artis*, lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

Tab. VII. Fig. 73. 2. In utroque vase aptetur ad fundum diabetes (§. 72), ita ut orificium tubi minoris I sit infra orificia E & H tubi recurvi EFGH.

Quodsi vas AB vino repleatur, donec lumen I sit in libella ejus; nihil effluet (§. 72). Sed si vas alterum CD aqua adimpleas totum; per tubum EFGH vas alterum AB ingreditur (§. 34 *Hydrost.*), & quantitatem liquoris ibidem auget. Quare cum jam utrinque liquor ultra orificium I ascendat; per M omnis aqua ex vase CD, per L vero vinum omne ex vase AB effluet (§. 72). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLIX.

181. *Vas construere, quod tantum vini effundit, quantum aquæ infunderis.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 74. 1. Fiat Vas ADBC in duas cavitates per diaphragma GF divisum, & undiquaque contra accessum aëris probe munitum.

2. Operculo AC afferruminetur tubulus HI per cavitatem unam GB ad fundum fere vasis CB pertingens.

3. Cavitates duæ inter se communicent tubo recurvo LFK.

4. Denique cavitati alteri immittatur tubulus NM, & utraque cavitas instruatur foramine cochlea munito, ut, si opus fuerit, liquor infundi & rursus effundi possit.

Quodsi enim cavitatem AF vino repleas, nihil infusi per MN effluet (§. 34 *Hydrost.*). Enimvero si per tubulum HI aquam cavitati alteri affundas; aër per tubum KFL in cavitatem alteram propellitur, adeoque vinum per tubum MN expellit. Tab. VII. Fig. 74.

PROBLEMA L.

182. *Vas construere, quod liquorem excipit donec fuerit plenum, si constanter eum affuderis; sed ne guttam amplius admittit, ubi semel cessaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in duas cavitates ACD & CDB dividatur, quarum superior aperta esse potest. Tab. VII. Fig. 75.

2. Ad diaphragma in cavitate superiore AD aptetur diabetes GF: sub diaphragmate autem in cavitatem inferiorem hiet tubulus H.

Quodsi aquam constanter affundas, ea per diabetem GF defluet in cavitatem inferiorem BCD, aëremque per tubulum H expellet (§. 72). Sed si aliquamdiu desistas, aër tubum longiorem diabetæ replebit, excepta parte FE aquæ immersa. Nihil ergo amplius per tubum istum in cavitatem BCD defluet.

PROBLEMA LI.

183. *Vas construere, ex quo per idem orificium, vel aqua, vel vinum fluit, prout desideraveris, vel etiam mixtum ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in duas cavitates divisum. Tab. VII.

2. In operculo vasis AE fiant duo foramina F & G, per quæ aëri in utramque cavitatem aditus patet. Fig. 76.

3. In

Tab. VII. Fig. 76. 3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB descendere possunt.

4. Ex tertia hac cavitate procedat tubulus M.

Quodsi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini cessabit, fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodsi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent. Tab. VII. Fig. 76.

SCHOLION.

184. *Ex his principiis innumera alia derivare licet.*

CAPUT VI.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIO VI.

185. *Alveus Fluminis* est cavitas in superficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO VII.

186. *Alveus naturalis est*, qui a natura effectus est. *Alveus* vero *artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLION.

187. *Istiusmodi alveos artificiales parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas* (§. 924 Mech.). *Germanico idiomate alveus naturalis* der Wilde Bach, *alveus autem artificialis* der Muhlgraben *appellatur.*

DEFINITIO VIII.

188. *Sectio alvei* est planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur.

SCHOLION.

189. *Ponamus aquam intra alveum totam subito abire in glaciem, & secari plano ad fundum alvei perpendiculari. Quæ hinc prodit sectio, erit ea quæ nobis hic sectio alvei vocatur.*

DEFINITIO IX.

190. *Sectio naturalis* est sectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* sectio alvei artificialis.

SCHOLION.

191. *Definitio adeo sectionis Fluminis, quam dedimus cum de molendinis ageremus* (§. 913 Mech.), *est sectionis artificialis, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.*

COROLLARIUM I.

192. Quoniam constat alveos naturales figuram habere prorsus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commode reduci nequit; sectio naturalis figura plana irregularis est.

COROLLARIUM II.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedi habent; sectio artificialis est rectangulum parallelogrammum (§. 162 *Geom.*).

SCHOLION.

194. *Qualis figura sit sectio artificialis, jam ostendimus alibi,* (§. 914 Mech.). *Potest vero figura quæcunque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus basis latitudini fluminis æqualis. Unde in sequentibus per sectionem intelligemus rectangulum, cujus*

latitudo eadem cum latitudine fluminis, nisi res ipsa loquatur posse quamcumque sectionem supponi.

DEFINITIO X.

195. *Sectiones* dicuntur *aqueveloces*, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero sit velocitas seu celeritas media, commodius docebitur deinceps.

DEFINITIO XI.

196. *Sectio velocior* est, per quam aqua celerior fluit; *Sectio tardior*, per quam fluit tardior.

DEFINITIO XII.

197. *Flumina in statu manente* sunt, si superficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, sed eadem manet in eodem loco profunditas.

SCHOLION.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi sit profundius, alibi minus profundum.*

DEFINITIO XIII.

199. *Flumen intumescit*, si superficies aquæ intra alveum attollitur; *detumescit*, si eadem deprimitur.

THEOREMA XXVIII.

200. *Aquæ libere fluentis in alveo declivi cursus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter pressionem quam inferior sustinet a superiori.*

DEMONSTRATIO.

Aqua enim fluidum grave est & quidem gravitatis eximiæ (§. 64 *Hydrost.*). Sed gravia per declivia, seu ad horizontem inclinata, motu accelerato deorsum ruunt (§. 284 *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu accelerato ruere debet, atque adeo cursus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem assurgit; inferiori incumbit superior. Enimvero motus aquæ, ob pressionem quam à superiore sustinet, perinde ac cadendo per aliquam altitudinem acceleratur (§. 48). Ergo cursus fluminis acceleratur quoque per pressionem quam aqua inferior a superiore sustinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

201. Quo declivior adeo fundus alvei est, eo celerius aqua per eundem decurrit.

COROLLARIUM II.

202. Quo profundior aquæ in alveo horizontali altitudo est, ad quam intra alveum assurgit, eo celerior cursus fluminis.

COROLLARIUM III.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur quam ab eo remotior; quo fundo propior, eo cursus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM IV.

204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquisita est ut radix altitudinis AD (§. 288 *Mechan.*); aqua etiam, si libere fluit per canalem declivem AB, in B eandem celeritatem acquirere debet quæ est ut radix altitudinis AD. Tab. VII. Fig. 77.

COROLLARIUM V.

205. Quod si aqua per foramen B egrederetur ex vase in quo ad altitudinem BF ipsi AD æqualem consisteret; ejus quoque celeritas esset ut radix altitudinis BF sive AD (§. 48). Aqua igitur per canalis inclinati sectionem eadem velocitate movetur, ac si flueret ex vase per lumen sectioni

con-

congruens a superficie aquæ tantundem remotum, quantum sectio ab horizontali per initium canalis ducta distat.

THEOREMA XXIX.

206. *In qualibet sectione canalis inclinati celeritas aquæ libere fluentis major est in fundo quam in superficie.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 77. Ducatur per originem canalis A linea horizontalis AE, sitque sectio, per quam aqua fluit BC, quæ est ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipsi DB parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230 *Geom.*) & FG = EC (§. 238 *Geom.*); consequenter FB > FG vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea est quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB haberet (§. 303 *Mechan.*), Major igitur celeritas in B quam in C (§. *cit.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

207. *Sequitur ex iis quæ demonstrata sunt, fluminis cursum continuo celeriorem fieri debere, quo longius juxta fluvium progrederis: id quod tamen experientiæ parum convenire videtur. Tenendum itaque, & ripas, & fundi inæqualitates causari resistentias, per quas celeritas continuo imminuitur, immo modo acquisita rursus extinguitur. Sed de his impedimentis accidentalibus nostrum jam non est dicere. Id tantummodo inculcandum esse censemus, cum declivitas fundi exigua sit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam esse; cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad descensum impediatur* (§. 261 Mech.).

DEFINITIO XIV.

208. Per *celeritatem*, seu *velocitatem mediam*, intelligo eam qua si aqua flueret omnis per sectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. *Hinc intelligitur, cur sectiones æqueveloces definiverimus per eas per quas aqua eadem celeritate media fluit* (§. 195). *Quoniam enim aqua inferior celerior fluit superiori ob diversam pressionem, & fundi declivitas diversa diversæ quoque celeritatis causa est; per sectiones eadem celeritate variabili non fluit aqua, nisi eædem & æquales, & similes fuerint, adeoque Theoremata de sectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem quam habere possunt, nisi variabilis celeritas ad mediam quandam constantem reduceretur.*

THEOREMA XXX.

210. *Per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.*

DEMONSTRATIO.

Per sectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195). Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per sectionem fluat, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208), & sectiones æquales sint *per hypoth.* per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

211. Quodsi ergo sectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris

joris æquetur (§. 20 *Arithm.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem: consequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM II.

212. Et quoniam per sectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplam quadrupla aquæ quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210); Quantitates aquarum per æqueveloces sectiones fluentes eodem tempore sunt inter se ut sectiones.

THEOREMA XXXI.

213. *Per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ sectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate qua fluit per A. Concipiatur sectio infinite parvæ crassitiei, & huic respondens aqua transeat tempusculo infinite parvo per sectionem A. Quoniam celeritas media in sectione B dupla est *per hypoth.* dum aqua a sectione A distat intervallo crassitiei isti respondente, altera a B duplo istiusmodi intervallo distare debet (§. 33 *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ tempusculo infinite parvo eodem, fluit per sectionem B. Jam cum tempus quodcunque in istiusmodi tempuscula æqualia resolvi possit, & singulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonstrata*; evidens est quod, omnibus istis tempusculis simul sumtis, hoc est dato quocunque tempore, aquæ per sectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum quacunque; per sectiones æquales eodem tempore fluentes æquæ sunt ut velocitates mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

214. *Si sectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes sunt in ratione composita sectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per sectionem S, celeritate media C, quantitas aquæ Q; & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque sectionem *s*, alia quacunque celeritate *c*, quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per sectionem S, celeritate *c*, quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per sectiones inæquales *s* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eædem in ratione sectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales sectiones S, diversa celeritate C & *c* fluunt; erunt eædem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus adeo $Qm : mq = SC : sc$ (§. 213 *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : sc$ (§. 181 *Arithm.*): consequenter quantitates aquarum Q & *q*, per sectiones inæquales nec æqueveloces, fluentes sunt in ratione composita sectionum S & *s* atque celeritatum mediarum C & *c* (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

215. Si $Q = q$, erit $SC = sc$, adeoque $S : s = c : C$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si eodem tempore quantitas aquarum per inæqua-

inæquales ſectiones diverſa celeritate media fluunt, erunt ſectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM II.

216. Quodſi præterea fuerit $S = s$, erit etiam $C = c$, adeoque ſi quantitates aquarum eædem per æquales ſectiones fluunt; celeritas media eadem eſt: conſequenter ſectiones æqueveloces ſunt (§. 195).

COROLLARIUM III.

217. Quodſi ponatur $C = c$; erit etiam $S = s$, adeoque ſi celeritas media eadem, & quantitates aquarum eodem tempore per utramque ſectionem fluentes æquales; conſequenter ſi ſectiones æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fundunt (§. 195); æquales ſunt.

COROLLARIUM IV.

218. Quoniam $Q : q = SC : sc$ (§. 214); erit $qSC = Qsc$ (§. 297 *Arithm.*) & hinc $C : c = Qs : qS$ (§. 299 *Arithm.*) hoc eſt, celeritates mediæ ſunt in ratione compoſita ex reciproca ſectionum & directa quantitatum aquarum quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA XXXIII.

Tab. VIII. Fig. 78. 219. *Si fluvius fuerit in ſtatu manente; per omnes ſectiones quomodocunque inæquales* AB, CD, EF, GH *aqua eadem quantitas eodem tempore fluit.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per ſectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere quam per ſectionem AB; inter ſectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, adeoque fluvius in alvei ABCD parte continuo intumeſcit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de ſectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in ſtatu manente (§. 197). Hoc cum ſit contra hypotheſin, aquæ per ſectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per ſuperiorem quamcunque. Tab. VIII. Fig. 78.

Ponamus ex adverſo per ſectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per ſectionem AB: inter ſectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, adeoque fluvius in parte alvei ABCD continuo detumeſcit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de ſectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in ſtatu manente (§. 197) *contra hypotheſin.* Aquæ igitur per ſectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per ſuperiorem quamcunque.

Quoniam itaque, per ſectionem inferiorem aliquam nec minor nec major quantitas fluere poteſt, quam per ſuperiorem quamcunque; per omnes omnino ſectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

220. Quoniam ſectiones AB, CD, EF, GH inæquales ſunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per ſingulas fluunt; aqua per ſectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

COROLLARIUM II.

221. Flumen igitur coarctando, aquæ celeritas augetur: conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altius aſſurgere (§. 205), adeoque fluvius intumeſcere debet (§. 199).

COROLLARIUM III.

222. Ex adverso, flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur: consequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aquæ ibidem altitudo imminui (§. 205), adeoque fluvius detumescere debet (§. 199).

COROLLARIUM IV.

223. Quoniam in quibuscunque fluvii sectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§. 219), sectiones vero inæquales sunt *per hypoth.* celeritates mediæ in duabus quibuscunque fluminis sectionibus sunt ut sectiones reciproce (§. 215).

SCHOLION.

224. *Quæ Corollariis tribus prioribus continentur, experientiæ consona sunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorem esse, ubi minor est fluvii latitudo: ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, nisi forsan ex accidente adsit quædam vorago. Usu quoque in praxi receptum est, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.*

THEOREMA XXXIV.

225. *Si fluvius intumescit; aqua fluens per quamlibet sectionem dato quodam tempore est ad aquam quæ ante intumescentiam ibidem fluxerat, in ratione composita sectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad sectionem & celeritatem mediam pristinam.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim fluvius intumescit, aqua intra alveum fit altior, consequenter non modo sectio, verum etiam celeritas media (§. 199, 205) augetur. Nova igitur sectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam pristina. Quoniam vero sectio major jam facta & pristina spectari possunt instar sectionum duorum fluminum, per quas aqua diversa celeritate fluit; cum fluvius intumescens a seipso differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, sed ejusdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit; aqua fluens per sectionem auctam celeritate media aucta, erit ad aquam fluentem æquali tempore per sectionem pristinam celeritate pristina, in ratione composita sectionis auctæ ad sectionem pristinam, & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediam pristinam. (§. 214). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

226. Erit adeo augmentum aquæ fluentis ad aquam pristinam æquali tempore fluentem, ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in sectiones ad factum ex sectione pristina in celeritatem (§. 193 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

227. Quodsi sectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit; cum parallelogramma ejusdem basis altitudinum rationem habeant (§. 389 *Geom.*), augmentum aquæ fluentis post intumescentiam erit ad aquam fluentem ante eandem, ut differentia factorum ex altitudine aquæ aucta in celeritatem mediam auctam & ex altitudine pristina in celeritatem pristinam ad factum posterius; id quod in alveo artificiali semper locum habet (§. 193).

SCHOLION.

228. *Quando de altitudinibus sectionum vel aquæ in alveo fuerit sermo, per eam intelligitur ea perpendiculi a superficie aquæ in fundum demissi pars per quam aqua continuo fluit, ita ut, si fluxus omnis protinus cessare ponatur, nulla aqua in defluentis locum succedente, nihil prorsus aquæ in ea remanere intelli-*

telligatur. Etenim aquæ in cavitatibus fundi stagnantis nulla in fluxu habenda ratio est, cum perinde sit ac si prorsus abesset, fundo plano existente. Vulgo Autores, qui de aquis currentibus scripsere, perpendiculum istud per quod aqua fluit, Altitudinem vivam *vocare solent, quod sit altitudo aquæ vivæ: aqua enim currens ad differentiam stagnantis viva appellari solet* (§. 10 Mech.).

THEOREMA XXXV.

Tab. VIII. Fig. 79. 229. *Si fuerit* AB *canalis declivis, &* BC *altitudo sectionis continuetur donec lineæ horizontali* AL *per initium ejus* A *ductæ ubi superficies aquæ canalem secat in* L *occurrat, & circa axem* LB *describatur Parabola quæcunque* LGH; *semiordinata* CG *exponet celeritatem aquæ in* C, BH *celeritatem fundo proximam, & semiordinatæ intermediæ inter* CG *&* BH *celeritates quascunque in perpendiculari* BC *inter* C *&* B *intermedias.*

DEMONSTRATIO.

Celeritas enim aquarum in C & B sunt in ratione subduplicata rectarum EC & FB (§. 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL *per hypoth.* erit CE ipsi BF parallela (§. 256 *Geom.*). Quamobrem cum sit LC : LB = CE : BF (§. 268 *Geom.*); celeritas in C & B etiam in ratione subduplicata rectarum CL & LB existunt (§. 124 *Anal. fin.* & §. 156 *Arithm.*). Enimvero semiordinatæ Parabolæ CG & BH sunt itidem in ratione subduplicata rectarum CL & BL (§. 402 *Analys. fin.*). Ergo etiam celeritates in C & B sunt ut semiordinatæ CG & BH (§. 156 *Arithm.*), adeoque semiordinatæ CG & BH celeritates in C & B exponunt. Et quoniam de singulis semiordinatis intermediis idem eodem modo constat; semiordinatæ quoque intermediæ celeritates intermedias exponunt. *Q. e. d.* Tab. VIII. Fig. 79.

COROLLARIUM I.

230. Si ergo BC fuerit perpendiculum sectionis fluminis; spatium Parabolicum CGHB est complexus omnium velocitatum istius sectionis.

COROLLARIUM II.

231. Quoniam $CG^2 : BH^2 = CL : BL$ (§. 402 *Anal. fin.*), adeoque $BH^2 - CG^2 : BH^2 = BC : BL$ (§. 193 *Arithm.*); sunt vero celeritates aquæ in B & C, ut BH ad CG, perpendiculari sectionis existente CB (§. 229); datis celeritatum in C & B ratione, ac altitudine sectionis BC, inveniri potest axis Parabolæ BL.

COROLLARIUM III.

232. Cum ducta IG ipsi BC parallela sit CG = BI (§. 238 *Geom.*), adeoque IH differentia semiordinatarum CG & BH, consequenter ut BC ad HI ita CG + BH ad parametrum (§. 404 *Anal. fin.*); datis CG & BH in eadem mensura qua datur perpendiculum sectionis BC, in eandem quoque mensura reperietur parameter parabolæ mensurantis celeritates & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA LII.

233. *Dato angulo inclinationis alvei seu canalis* ABD, *una cum altitudine seu perpendiculo sectionis* BC, *& celeritatum in* C *&* B *ratione; invenire distantiam fundi ab horizontali* AL *per initium alvei ducta, atque distantiam* AF *ab initio alvei, una cum hujus longitudine* BA.

Resolutio & Demonstratio.

Tab. VIII. Fig. 79.

1. Quoniam BD parallela ipsi AL *per hypoth.* angulus BAL angulo inclinationis ABD æqualis est (§. 233 *Geom.*). Et quoniam rectus ABL recto FBD æqualis; demto communi ABF; erit FBL angulo inclinationis ABD æqualis (§. 91 *Arithm.*). Dantur itaque in triangulo BFL, præter rectum ad F, anguli obliqui FBL & FLB, itemque in triangulo ABF præter rectum ad F obliqui BAF & FBA.
2. Ex datis CG & BH, una cum BC, inveniatur axis seu altitudo Parabolæ BL (§. 231). Unde porro
3. calculo trigonometrico definietur recta BF (§. 36 *Trigon.*) & hinc tandem
4. recta AF, atque AB (§. *cit. Trig.*).

Theorema XXXVI.

234. *Si semiordinatæ Parabolæ mensurantis celeritates aquæ intra minutum secundum seu tempus quodcunque datum per perpendiculum sectionis fluentis* CG *&* BH *sint æquales spatiis quæ aqua per extrema perpendiculi sectionis* BC [illegible]s *dato tempore describit, & in par*[illegible]*us hujus assignentur; spatium Parabolicum* BCGH *definiet quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum* BC *tempore isto fluentem.*

Demonstratio.

Concipiatur perpendiculum sectionis BC divisum in particulas infinite parvas, quæ designabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC constitutas. Quoniam vero semiordinatæ ad BC applicatæ sunt æquales spatiis, intra tempus datum veluti minutum secundum, descriptis ab iisdem particulis aquæ; arcus Parabolicus GH terminabit omnem aquam quæ initio hujus temporis in BC constituebatur: consequenter spatium BCGH definit quantitatem aquæ per perpendiculum BC intervallo unius minuti secundi fluentis. *Q. e. d.* Tab. VIII. Fig. 79.

Corollarium I.

235. Quoniam spatium parabolicum GCL $= \frac{2}{3}$ LC. CG & BLH $= \frac{2}{3}$ BL. BH (§. 104 *Anal. infin.*), BCGH vero illorum spatiorum differentia; si ex datis spatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi sectionis fluens intra tempus datum describit, quæratur axis parabolæ (§. 231); quantitas aquæ intra tempus datum per perpendiculum fluens determinari potest.

Corollarium II.

236. Quoniam in sectione artificiali perpendicula omnia æqualia sunt (§. 193); aqua fluens per totam sectionem reperitur, si quantitas fluentis per perpendiculum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri possit (§. 235): etiam quantitas per totam sectionem artificialem fluens definiri potest.

Definitio XV.

237. Velocitates aquæ transeuntis per extrema C & B perpendiculi sectionis dico brevitatis gratia *celeritates terminales*. Dantur autem celeritates terminales per spatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C describit.

Problema LIII.

238. *Datis celeritatibus terminalibus, una cum perpendiculo sectionis; invenire celeritatem mediam.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 79. 1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis, investigetur quantitas aquæ per perpendiculum istud tempore dato fluens (§. 235).

2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendiculum sectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculi sectionis. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis investigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendiculum istud BC fluens, spatium parabolicum BCGH prodit (§. 234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fluit eodem tempore, quæ variabili fluit (§. 208); & ob celeritatem eandem in singulis perpendiculi partibus, etiam infinite parvis (*§. cit.*), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendiculum sectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media basis, æquatur spatio parabolico BCGH. Quamobrem si area spatii hujus parabolici dividatur per perpendiculum sectionis BC; prodibit celeritas media quæsita (§. 375 *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LIV.

239. *Datis celeritatibus terminalibus* CG *&* BH, *una cum sectionis perpendiculo* BC; *punctum* K *in eodem definire per quod aqua celeritate media fluit.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quæratur celeritas media (§. 238) & Tab. VIII.

2. Ex semiordinata Parabolæ velocitates exhibentis BH quæ maximam celeritatem repræsentat, resecetur recta BM mediæ æqualis. Fig. 79.

3. In M erigatur perpendicularis MO secans Parabolam in O.

4. Denique ex puncto O demittatur perpendicularis ad axem Parabolæ OK, quæ erit semiordinata puncto O respondens (§. 370 *Anal. fin.*): atque adeo BK est distantia puncti perpendiculi a fundo, in quo aqua celeritate media movetur.

5. Hinc porro calculo definitur profunditas puncti K, in quo aqua movetur celeritate media, inferendo (§. 404 *Anal. fin.*) ut parameter quam ex datis reperire licet (§. 232) ad aggregatum ex celeritate minima CG & media KO, ita harum celeritatum differentia MI ad profunditatem quæsitam KC.

PROBLEMA LV.

240. *Data longitudine canalis inclinati* AB, *una cum angulo inclinationis* BAF, *& perpendiculo sectionis* BC; *invenire celeritates terminales, atque mediam, una cum axe Parabolæ celeritates mensurantis* BL, *& verticis* L *ab initio canalis* A *distantia.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB, & angulo inclinationis BAF, invenitur in triangulo ABF distantia fundi ab horizontali BF, & in

Tab. VIII. Fig. 79. triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188), distantia verticis Parabolæ ab initio canalis AL, una cum axe Parabolæ BL (§. 36 *Trigon.*).

2. Subducta altitudine sectionis BC ab axe Parabolæ BL modo invento, relinquitur CL. Unde datis abscissis LC & LB reperitur semiordinatarum CG & BH ratio (§. 402 *Anal. fin.*); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque

3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri potest (§. 238.

Axioma I.

241. *Eadem vi, uno eodemque momento, duplex motus produci nequit.*

Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe si simul agat in B & C, pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito absurdum habetur.

Scholion.

242. *Veritas hujus Axiomatis per Experimenta Hydrostatica confirmatur. Etenim corpus grave in fluido specifice leviori descendit excessu ponderis sui supra pondus fluidi mole æqualis* (§. 88 Hydrost.)*; quod vim gravitatis reliquam impendat in pressionem fluidi motui resistentis* (§. 114 Hydrost.)*, Experimentorum consensu. Vis igitur qua fluidum subjectum premitur, non simul impenditur in descensum; nec vis qua motus descendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam subjectam.*

Theorema XXXVII.

243. *Aquæ per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob pressionem quam inferior a superiori sustinet.*

Demonstratio.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob pressionem quam inferior a superiori sustinet, ita ut inferior celerior moveatur quam vi descensus per declive acquisivit (§. 284 *Mechan.*). Quoniam motus per declive descendentis acceleratur gravitate respectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§. 261 *Mech.*); aut vis illa qua agitur in planum inclinatum simul impendi deberet ad descensum, aut vis qua acceleratur motus descendentis simul impendenda esset pressioni aquæ subjectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, seu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod absurdum (§. 241). *Q. e. d.*

Scholion I.

244. *Alii ita adstruunt veritatem Propositionis præsentis. Si aqua in B omnem habet celeritatem quam descensu per planum inclinatum* AB *acquisivit, ea est, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino* A *ad eandem horizontalem* DB*, nempe per altitudinem* AD *vel* BF *acquisivisset* (§. 303 Mech.). *Ponamus jam aquæ* B *motum quoque accelerari ob altitudinem incumbentis superioris: erit ergo major celeritas ea quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc absurdum existimant, cum fluxus aquæ sit effectus gravitatis quæ in descen-* Tab. VIII. Fig. 79.

sum perpendicularem tota insumitur. Sed evidentia hujus demonstrationis pendet ab Axiomate nostro. Tacite enim supponitur in descensu perpendiculari nullum esse effectum aquæ superioris in inferiorem, sed quamlibet aquæ guttam ita accelerari ac si sola descenderet in medio non resistente. Id vero recte supponi, ex eo intelligitur quod vis quæ ad accelerandum motum guttæ superioris impenditur, non una impendi possit in pressionem qua inferioris guttæ acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua superior vel quiescit, vel lente admodum descendit, inferioris motu per foramen accelerato. Hic enim vis quæ ad motum per pressionem accelerandum impenditur, non una consumitur in descensu prementis.

SCHOLION II.

245. *Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur quam in superficie; propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in superficie & in fundo; major vero cum ibidem sit resistentia quam prope superficiem, magis quoque retardetur.*

SCHOLION III.

246. *Inprimis autem notandum est, quod* MARIOTTUS *(a) annotavit aquam in alveo naturali fluminis, ob eam quam patitur resistentiam* (§. 207) *brevi temporis spatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro infert, si declivitas alvei imminuatur, celeritatem denuo successive, sed brevi temporis spatio imminui, ut per istam alvei partem lentius fluat aqua quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari possit, ut in sequente alvei parte aqua celerius fluat quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diversis alvei naturalis partibus diversa sit aquæ fluentis celeritas.*

(a) *Traité du mouvement des Eaux*, Part. 4. disc. 4. p. 430. Oper.

SCHOLION IV.

247. *Nulla in hoc difficultas posita est, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo* (§. 221), *Experientia suffragante* (§. 224). *Etenim tum initium canalis, ob altitudinem aquæ auctam cui pars alvei naturalis respondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalis inclinati* A *ibi statuitur, ubi planum inclinatum ejusdem* BA *concurrit cum superficie aquæ* AC, *quemadmodum ex Demonstrationibus anterioribus intelligitur; ut determinari possit descensus perpendicularis* EC *aquæ in superficie. Etenim aqua in* C *dici nequit descendisse intervallo* EC, *nisi aliquo tempore fuerit in* A. *Sed idem mox ostendemus apertius* (§. 249).

Tab. VIII. Fig. 79.

SCHOLION V.

248. *Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque assumi posse aquam per perpendiculum sectionis eadem celeritate moveri; non tamen assumere licet quod per totam sectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem resistentiam tardior esse soleat quam in medio. Quodsi istiusmodi canales inclinati, quales in Theorematis antecedentibus supponimus, essent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret sine ulla immutatione.*

THEOREMA XXXVIII.

249. *Si in canale inclinato* AB *sectio* BC *obstruatur, ut aqua nonnisi per partem* BI *fluere possit; aqua intumescet & ad statum manentem reducta celerius fluet per sectionem* BI *quam ante; initio canalis* G *ultra priorem* A *promoto.*

Tab. VIII. Fig. 80.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 80. Etenim dum ſectio BC ex parte obſtruitur, per partem reſiduam apertam BI priſtina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit quæ ad ſectionem BC nondum obſtructam ferebatur; neceſſe eſt aliquid ejus continuo remanere, adeoque altitudinem fieri majorem, conſequenter aqua intumeſcit (§. 199). *Quod erat primum.*

Enimvero quando ad ſtatum manentem reducitur, non amplius intumeſcit (§. 197), adeoque per ſectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Neceſſe igitur eſt ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat ſecundum.*

Jam dum aquæ ſuperficies AC attollitur in OG, *vi num.* 1. evidens eſt, quod ea canalem BA non amplius in A, ſed in G ſecet. Initium adeo canalis G ultra terminum priſtinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

250. Quoniam ibi vertex Parabolæ FKE, ubi ſectionis perpendiculum BI productum horizontalem GF per initium canalis declivis AB ſecat, & ſemiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores ſunt rectis BD & IL, quæ ante intumeſcentiam aquæ ſeu obſtructionem ſectionis eaſdem in iiſdem punctis exponebant (§. 249); Parabola FKE quæ metitur celeritates in perpendiculo IB majoris amplitudinis eſt, quam altera HLD quæ metitur velocitates in perpendiculo majoris ſectionis BC.

COROLLARIUM II.

251. Quodſi impedimentum quo obſtruitur ſectio fuerit minor IO, veluti IN; aqua ad O uſque intumeſcere nequit, adeoque per NO ſupra impedimentum effluit. Tab. VIII. Fig. 80.

COROLLARIUM III.

252. Celeritas aucta aquæ per ſectionem minorem fluentis BI, in B ea eſt quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas priſtina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquiſiviſſet (§. 303 *Mech.*). Quare cum celeritates per BN & BM acquiſitæ ſint in ratione ſubduplicata rectarum BN & BM (§. 87 *Mech.*); erit celeritas aucta in B ad celeritatem priſtinam, ut radix rectæ BM ad radicem alterius BN.

THEOREMA XXXIX.

253. *Aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluit, qua fluit ex vaſe pleno cujus eadem quæ ſectionis altitudo.*

DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali cum nulla ſit declivitas, aqua non fluit niſi quatenus ſuſtinet preſſionem inferior a ſuperiori. Ex vaſe aqua pleno per foramen ſimiliter fluit aqua vi preſſionis ejuſdem; quod utrumque per ſe manifeſtum eſt. Quodſi ergo lumen vaſis ſit ſectioni canalis æquale ac ſimile, & altitudo fluidi utrobique eadem ſit; cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adeſt diverſitatis ratio. Quamobrem aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vaſe pleno, cujus eadem quæ ſectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION I.

254. *Sane si canalem horizontalem tegas quodam operimento, convenit is cum vase pleno, cujus eadem quæ sectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo quæ ante: consequenter pressio ab eadem pendens nullo modo varietur.*

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 255. In sectionis adeo perpendiculo BC canalis horizontalis AB, quodlibet punctum, D, E, vel B eandem celeritatem habet quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis; nimirum aqua in B habet celeritatem quam acquisivisset cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset; & similiter aqua in D celeritatem habet quæ cadendo per altitudinem DC acquiritur.

COROLLARIUM II.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC, (§. 86 *Mechan.*), seu celeritates ipsæ in ratione subduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87 *Mechan.*).

COROLLARIUM III.

257. Quare si circa altitudinem sectionis BC describatur Parabola CFGH; exponent semiordinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, C (§. *præc.* & §. 402 *Anal. fin.*).

COROLLARIUM IV.

258. Quodsi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi sectionis BC determinetur; spatium parabolicum BCH quantitatem aquæ exhibet quæ eodem tempore per sectionem fluit quo aqua per B fluens describit spatium BH; id quod eodem modo patet, quo supra idem in canale inclinato evicimus (§. 234).

COROLLARIUM V.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per perpendiculum BC, eo tempore quo aqua per B fluens ex B in H progreditur, est æqualis rectangulo ex BH in duas tertias partes altitudinis sectionis BC, vel ex BC in $\frac{2}{3}$ BH (§. 104 *Anal. infin.*); consequenter in ratione composita ex ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium. Tab. VIII. Fig. 81.

SCHOLION II.

260. *Hinc jam porro eodem quo supra modo determinantur alia fluxum aquæ in canali horizontali concernentia.*

SCHOLION III.

261. *Resistentias quas patitur cursus fluminis, cum ab obstaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.*

SCHOLION IV.

262. *Ceterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta sunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vasorum lateribus insculpta applicari possunt atque solent* (§. 48).

THEOREMA XL.

263. *Si aqua per canalem horizontalem fluit; celeritas media est ad maximam ut 2 ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Aquæ enim quantitas est ut $\frac{2}{3}$BH.BC (§. 259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum fluentis, si BI $= \frac{2}{3}$ BH (§. 375 *Geom.*); eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, si per singula puncta eadem celeritate BI moveatur. Est igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero BI $= \frac{2}{3}$ BH *per demonstrata.* Ergo BI : BH $= \frac{2}{3}.\ 1 = 2:3$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 264. Quoniam aucta altitudine sectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine sectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM II.

265. Similiter quia imminuta altitudine sectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine sectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM III.

266. Si ex semiordinata maxima Parabolæ celeritates aquæ per sectionem canalis horizontalis fluentis BH resecetur BI = $\frac{2}{3}$ BH, & super BI construatur rectangulum CBIM, cujus latus IM Parabolam in K secat; demisso ex K in altitudinem BC perpendiculari KL, erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM IV.

267. Quodsi jam porro inferatur, ut quadratum spatii BH, quod aqua celeritate maxima fluens dato tempore emetitur, ad quadratum spatii LK quod celeritate media describit eodem tempore, ita altitudo sectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L per quod aqua celeritate media fluit infra superficiem aquæ LC (§. 402 *Anal. fin.*). Tab. VIII. Fig. 81.

SCHOLION.

268. *Punctum istud a nonnullis* Centrum velocitatis *appellari solet; quia velocitas ipsi conveniens in locum omnium velocitatum inæqualium assumi potest.*

CAPUT VII.

De Percussione Fluidorum.

DEFINITIO XVI.

269. *Percussio fluidi* est actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus, sive fluidum sive solidum, impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum est alias (§. 523, 526 *Mechan.*).

COROLLARIUM I.

270. Quoniam percussio dato aliquo tempore absolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu sunt; tota illa quantitas impingit, adeoque corpus percutit quæ tempore isto affluit, ac ideo percussio fluidorum successiva est.

SCHOLION.

271. *Fluida nempe consideranda veniunt instar multitudinis globulorum, quorum diversæ series sibi mutuo succedentes in corpus quod percutitur impingunt. Ut adeo appareat pro diversa densitate variari globulorum simul incurrentium, pro diversa celeritate serierum sibi invicem succedentium numerum.*

COROLLARIUM II.

272. Quoniam plus massæ simul impingit, si fluidum fuerit densius, quam si fuerit rarius; plus autem massæ in densiore sub eodem volumine continetur quam in rariori (§. 8, 10 *Hydrost.*); in percussione fluidorum habenda est ratio densita-

densitatis fluidi, seu cæteris paribus major fit percussio a fluido densiori quam a rariori.

COROLLARIUM III.

273. Quoniam dato tempore quo percussio successiva absolvitur, plus massæ in corpus percussum incurrit, si fluidum aliquod celerius, quam si tardius moveatur; in determinanda massa percutientis non solum densitatis, (§. 272), verum etiam celeritatis ratio habenda; seu, densitate existente eadem, major est massa percutientis si fluidum celerius moveatur quam si tardius; massæ scilicet in ratione celeritatum sunt.

COROLLARIUM IV.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum est, utpote cujus actio nonnisi in nisu quodam sese exerente consistit (§. 9 *Mechan.*), istiusmodi autem vires, massa existente eadem, in ratione celeritatum sunt (§. 280 *Mechan.*) in moleculis quoque simul incurrentibus major est vis percutiendi, si fluidum aliquod celerius movetur quam si movetur tardius.

SCHOLION.

275. *Patet adeo celeritatem fluidi bis spectandam esse in percussione: nimirum primo in determinanda massæ multitudine quæ agit in corpus percussum, & secundo in determinando gradu quem vis a motu habet.*

DEFINITIO XVII.

276. Si fluida in duo plana, vel directe, vel sub eodem angulo obliquo incurrunt; *eodem modo incurrere* dicuntur.

SCHOLION.

277. *Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt; quia in percussione spectatur potissimum vis percutientis, quæ non modo a directione impingentis, verum etiam a massa & celeritate pendet.*

AXIOMA II.

278. *Si idem fluidum, eadem celeritate, eodem modo, in plana æqualia incurrit, eadem vi eadem percutit.* Nulla enim adest diversitatis ratio.

SCHOLION.

279. *Vis percutientis pendet a celeritate, massa, & directione percutientis, nec non a plani percussi magnitudine. In hypothesi adeo Axiomatis, omnia eadem præsupponuntur a quibus quantitas vis pendet qua fit percussio. Ex generalibus adeo principiis Metaphysicis* (§. 193 Ontol.) *constat, vim percutiendi hoc in casu differre minime posse.*

THEOREMA XLI.

280. *Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione planorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A esse duplum plani B: erit adeo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142 *Arithm.*), sive $B = \frac{1}{2}A$. Quoniam itaque B & $\frac{1}{2}$ A eadem vi percutiuntur (§. 278), atque eadem adeo vi utraque pars ipsius A percuti debet (§. 87 *Arithm.*); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero simpla; hoc est, vires percutientes sunt in ratione dupla; consequenter in ratione planorum percussorum A & B. Idem cum eodem modo ostendatur in quacunque alia planorum ratione; patet in genere esse vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percussorum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

281. *Si idem fluidum, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana æqualia incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat fluidum dupla celeritate ejus qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique sub eodem angulo incurrat. Dico vires quibus percutiuntur plana A & B esse ut quadrata celeritatum, seu vim qua percutitur planum A esse quadruplo majorem ea qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diversa celeritate in plana A & B incurrit, *per hypoth.* massa percutientis planum A est ad massam percutientis planum B, ut celeritas qua movetur fluidum in planum A incurrens ad celeritatem qua movetur quod fertur in B (§. 273). Quamobrem fluida percutientia spectari possunt tanquam corpora inæqualis massæ. Enimvero si massæ inæquales sunt, vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 *Mechan.*), adeoque in casu præsente, ubi massæ sunt ut celeritates, *per demonstrata*; in ratione duplicata celeritatum; veluti in casu speciali vis qua percutitur A quadruplo major est ea qua percutitur planum B (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

282. *Si fluidum idem, diversa celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione composita ex simplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcunque in plana quæcunque A & B, celeritatibus quibuscunque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate C, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit, erit $V:f = A:B$ (§. 280). Et si idem fluidum in planum B diversa celeritate C & c incurrit; erit in diversis istis percussionibus $f:v = C^2:c^2$ (§. 281). Habemus adeo $fV:fv = A.\,C^2:B.\,c^2$ (§. 213 *Arithm.*), consequenter $V:v = A.\,C^2:B.\,c^2$ (§. 181 *Arithm.*); hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita ex simplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

THEOREMA XLIV.

283. *Si fluida diversæ densitatis, eadem celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita densitatum fluidorum atque planorum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diversæ densitatis D & d in plana quæcunque A & B eadem celeritate, dicanturque vires percutientes f & v: erit $f:v = D:d$ (§. 272). Incurrat jam fluidum densitatis D in planum aliud A quod alteri B inæquale sit, dicaturque vis percutiens V; erit $V:f = A:B$ (§. 280). Erit itaque $fV:fv = A.\,D:B.\,d$ (§. 213 *Arithm.*); consequenter $V:v = A.\,D:B.\,d$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita planorum A & B atque densitatum fluidorum D & d. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLV.

284. *Si fluida diversæ densitatis, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana inæqualia incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita ex rationibus planorum percussorum, & densitatum fluidorum simplicibus, atque duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia B & B, in quæ incurrat fluidum idem, seu ejusdem densitatis d, diversis celeritatibus C & c, dicanturque vires f & v: erit $f : v = C^2 : c^2$ (§. 281). Incurrant jam fluida diversæ densitatis D & d, eadem celeritate c, in plana inæqualia A & B, dicanturque vires percutientes V & f; erit $V : f = A.D : B.d$ (§. 283). Habemus itaque $fV : fv = A.D.C^2 : B.d.c^2$ (§. 213 *Arithm.*), consequenter $V : v = A.D.C^2 : B.d.c^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes fluidorum diversæ densitatis in plana utcunque inæqualia celeritatibus quibuscunque incurrentium, sunt in ratione composita ex simplicibus planorum A & B, densitatum fluidorum D & d, atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *Habemus adeo mensuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim si indirecte impingit fluidum aliquod in planum, tum variatio non una de causa accidit, etsi Theoremata in comparandis viribus sub eodem angulo impingentibus locum habeant.*

THEOREMA XLVI.

Tab. VIII. Fig. 82. 286. *Si aqua per declive* AD *delapsa directe incurrit in palmulam rotæ circa centrum* C *convertibilis; erit vis percutiens ut palmula ducta in radium* EC, *densitatem aquæ, & altitudinem lapsus* AB.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens absoluta est ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & quadratum celeritatis qua fluit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declive AD delapsæ est in ratione subduplicata altitudinis lapsus AB (§. 204), adeoque quadratum ejusdem ut ipsa hæc altitudo. Quare vis percutiens absoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & in altitudinem lapsus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis, *per hypoth.* illa jam consideranda venit tanquam potentia ad Axem in Peritrochio applicata, cujus centrum motus in C; atque tum vis respectiva erit ut absoluta ducta in radium (*§.* 792, 153 *Mechan.*). Est igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in densitatem aquæ, altitudinem lapsus AB & radium rotæ EC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

287. *Atque hinc patet modus ad mensuram revocandi vires percutientes aquarum rotas molares agitantium, easque inter se conferendi: quod ut evidentius pateat, sequentia adjicere lubet Corollaria.*

COROLLARIUM I.

288. Sint radii rotarum R & r, palmulæ P & p, altitudines lapsus A & a; cum densitatis, quæ eadem hic supponitur, in comparandis viribus percutientibus non habendo sit ratio (*§.* 181 *Arithm.*); erunt vires percutientes V & v, ut R. P. A : $r. p. a$ (§. 286).

COROLLARIUM II.

289. Quodſi ponamus palmulas rotarum eſſe æquales, erit $P = p$, adeoque $V : v = R . A : r . a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc eſt, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium ſunt in ratione compoſita radiorum rotarum & altitudinum lapſus.

COROLLARIUM III.

290. Quodſi ulterius fuerit $R = r$, hoc eſt, ſi rotæ fuerint æquales; erit $V : v = A : a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc eſt vires aquarum rotas molares æquales percutientium ſunt in ratione altitudinum lapſus.

COROLLARIUM IV.

291. Si fuerit $R = r$, hoc eſt, ſi altitudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V : v = P . A : p . a$, hoc eſt, vires quibus palmulæ percutiuntur ſunt in ratione compoſita palmularum & altitudinum lapſus.

COROLLARIUM V.

292. Quodſi fuerit $A = a$; hoc eſt, ſi aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V : v = R . P : r . p$. hoc eſt, vires percutientes ſunt in ratione compoſita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM VI.

293. Quodſi præterea $R = r$; erit $V : v = P : p$, hoc eſt, ſi rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes ſunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM VII.

294. Si vero fuerit, præter $A = a$, etiam $P = p$; erit $V : v = R : r$, hoc eſt, ſi aqua per eandem declivitatem irruit in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM VIII.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R . P . A = r . p . a$ (§.288), adeoque $A : a = r . p : R . P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, ſi altitudines lapſus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione compoſita reciproca palmularum & radiorum ſeu altitudinum rotarum; vires percutientes æquales ſunt, & contra.

COROLLARIUM IX.

296. Quodſi præterea fuerit $r = R$; erit: $A : a = p : P$ (§. 181 *Arithm.*), hoc eſt ſi aqua incidit in rotas æque altas per declivitates quarum altitudines rationem palmularum reciprocam habent; vires percutientes æquales ſunt; & contra, ſi rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debent ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM X.

297. Si vero fuerit $P = p$; erit $A : a = r : R$, hoc eſt, ſi aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales, æquali vi percutiuntur; & contra ſi rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM XI.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r . p = R . P$ (§. 292), adeoque $R : r = p : P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc eſt, aqua per eandem declivitatem delapſa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ ſunt in ratione reciproca radiorum ſeu altitudinum earundem.

COROLLARIUM XII.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, adeoque, ſi ejuſdem fuerint latitudinis, longitudinis rationem habeant (§. 389 *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, ſeu duæ rotæ ſibi mutuo æquipollent, ſi habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales.

SCHOLION.

300. *Hinc videmus in fluminibus admodum latis conſtrui rotas molares, quæ exiguæ ſunt altitudinis, ſed magnæ longitudinis; latitudine defectum altitudinis compenſante.*

THEO-

THEOREMA XLVII.

301. *Si plana per fluida diversæ densitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; resistentiæ quas experiuntur sunt in ratione composita ex rationibus planorum, & densitatum fluidorum simpla, & celeritatum duplicata.*

DEMONSTRATIO.

Etenim fluidum quiescens eadem vi resistit plano per ipsum lato qua impingeret in idem planum, si ipsum quiesceret & fluidum moveretur ea celeritate qua planum fertur, eadem in utroque casu supposita directione: id quod per se manifestum assumitur. Jam vero vires quibus plana percutiuntur quiescentia a fluidis directe impingentibus, sunt in ratione composita densitatum & planorum simpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires quibus fluida directe resistunt planis per ea latis, sunt in ratione composita densitatum fluidorum, ac ipsorummet planorum simpla, & celeritatum quibus per eadem feruntur duplicata. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

302. Quodsi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, densitate existente eadem; vires quibus ipsis resistitur sunt in ratione simplici planorum & duplicata celeritatum quibus ea per fluidum feruntur (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

303. Quodsi porro plana fuerint æqualia; resistentiæ quas patiuntur erunt ut quadrata celeritatum.

COROLLARIUM III.

304. Si vero celeritates fuerint æquales; vires quibus planis resistitur erunt in ratione planorum.

DEFINITIO XVIII.

305. *Celeritatem absolutam* appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; *Respectivam* vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

SCHOLION.

306. *Ponamus fluidum ferri celeritate ut* AC, *sed oblique incurrere in planum* AB *sub angulo incidentiæ* BAC; *celeritas illa respectiva dicitur, quæ in impactu directo æquipollente eidem substituenda venit.* Tab. VIII. Fig. 83.

THEOREMA XLVIII.

307. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* AC *&* DB: *celeritas absoluta est ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Exponat recta AC celeritatem absolutam, & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC resolvitur in laterales CF & AF eidem simul æquipollentes (§. 245 *Mechan.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit secundum directionem AF, sed tantummodo secundum perpendicularem CF, juxta quam fluidi motui resistit; evidens est celeritatem respectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodsi AC sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli incidentiæ CAF (§. 2 *Trigon.*). Quare cum sit celeritas absoluta ad respectivam, ut AC ad CF *per demonstrata*; erit illa quoque ad hanc, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLIX.

Tab. VIII. Fig. 83. 308. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* CA & BD: *massa ejus, qua percussio indirecta fit, est ad massam qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis: evidens est eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB quam ad rectam BE; consequenter si BD exponat celeritatem fluidi qua fertur, veluti spatium quod decurrit fluidum isto tempusculo quo absolvitur percussio; erit quantitas seu massa fluidi quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas ad massam quæ ad eandem juxta directionem perpendicularem affluerent, ut BE.BD, ad AB.BD, consequenter ut BE ad AB (§. 181 *Arithm.*). Jam si AB sumatur pro sinu toto, erit BE sinus anguli incidentiæ EAB (§. 2 *Trig.*). Est igitur BE ad AB, consequenter massa fluidi qua percussio indirecta fit ad massam qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA L.

309. *Si fluidum aliquod in rectam* AB *indirecte impingit; vis qua indirecte percutitur est ad eam qua eadem recta* AB *ab eodem fluido* CABD *juxta directiones ipsi perpendiculares affluente percuteretur, in ratione duplicata sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim vires quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 *Mechan.*), scilicet vis directa est ad indirectam, ut massa quæ in percussione directa ad rectam AB defertur ad massam quæ ad eandem in indirecta affluit, & ut celeritas absoluta ad respectivam. Enimvero & massa in percussione directa est ad massam in indirecta, & celeritas absoluta ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ, (§. 307, 308). Est igitur vis percutiens directa ad indirectam, in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VIII. Fig. 83.

THEOREMA LI.

310. *Si fluidum oblique impingat in rectam* AB *juxta directiones parallelas* AC & BD *in ipsam delatum, & ex* B *demittatur perpendicularis* BE *in* AC, *ex* E *vero denuo demittatur* EG *ad* AB *perpendicularis; vis qua fluidum urget directe rectam* AB *est ad vim qua eam urget indirecte, ut tota* AB *ad segmentum ejus* BG.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB : BE = BE : BG (§. 330 *Geom.*) & AB ad BE, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ BAC (§. 2 *Trigon.*); consequenter BG est tertia proportionalis ad sinum totum & sinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 216 *Arithm.*). Quare cum sit vis qua percutitur recta AB directe ad eam qua indirecte percutitur, in ratione duplicata sinus toti[us]

ad

Tab. VIII. *Fig.83.* ad ſinum anguli incidentiæ (§. 309); erit etiam illa ad hanc, ut tota recta AB ad ſegmentum ejus BG (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

311. Quoniam AB > GB (§. 84 *Arithm.*); vis quoque qua recta AB a fluido directe percutitur, eſt ea qua indirecte percutitur major.

COROLLARIUM II.

312. Quodſi angulus incidentiæ fuerit IAB, rectæ AB ſegmentum vi indirectæ reſpondens erit BK (§. 310). Quare cum ſit, ſub angulo incidentiæ CAB, vis directa ad indirectam, ut AB ad GB, & ſub angulo incidentiæ minore HAB, ut AB ad KB (§. *cit.*); vis directa ad indirectam, ſub angulo incidentiæ majore, minorem rationem habet quam ſub minore (§. 205 *Arithm.*): conſequenter vis indirecta, ſub angulo incidentiæ minore, minor eſt, quam ſub majore (§. 206 *Arithm.*): unde decreſcente angulo incidentiæ etiam vis percuſſionis decreſcit, atque directione AC coincidente cum AB, hoc eſt, ſi fluidum juxta directionem AB movetur, percuſſio nulla eſt.

COROLLARIUM III.

313. Quoniam vis directa ſub angulo incidentiæ CAB eſt ad indirectam, ut AB ad GB: ſub angulo vero incidentiæ HAB, ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ, ſub diverſis angulis incidentiæ eandem rectam AB percutientes, ſunt inter ſe ut rectæ GB & KB (§. 196 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

314. Quodſi fluidum feratur celeritate V, vis directa qua percutitur recta AB exponitur per $V^2 . AB$ (§. 282). Quare cum ſit vis directa ad indirectam, ut AB ad GB, angulo incidentiæ exiſtente CAB (§. 310); reperietur vis indirecta $\frac{V^2 . AB . GB}{AB} = V^2 . GB$; adeoque vis indirecta exponitur per $V^2 . GB$, angulo incidentiæ exiſtente CAB.

PROBLEMA LVI.

Tab. VIII. Fig. 84.

315. *Determinare vim, quam ventus indirecte impingens in alas molendini exerit ad eas convertendas.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Repræſentet recta IO axem, atque planum ADCB alam, in quam ventus ſecundum directiones obliquas KA & HB agit. Ala axem, cui perpendiculariter inſiſtit, ſecet ad angulum obliquum AEI (§. 929 *Mech.*). Quoniam itaque ventus ſecundum directionem obliquam IE in planum AC circa axem IE convertendum agit, *per hypoth.* ideo inveſtiganda eſt vis quam ventus ad planum ADCB circa axem IE convertendum adhibet, dato angulo obliquitatis AEI, magnitudine alæ ADCB, ejus latitudine AB, & celeritate qua aër movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendicularis; cum aër ſecundum directiones parallelas KA & HB deferatur ad rectam AB, non plus aëris ferit planum obliquum ad axem ADCB, cujus latitudo AB, quam planum æque altum axem ad angulos rectos ſecans, cujus latitudo AG. Exponit igitur recta AG quantitatem aëris planum ſimul ferientis. Jam porro exponat EL celeritatem, qua movetur aër, cujus denſitas ſit $= d$; erit maſſa aëris qua percuſſio abſolvitur in puncto E, ut AG ducta in denſitatem, ac porro in LE.

2. Demittatur ex L recta LM ad AB perpendicularis: evidens eſt perpendicularem LM exponere celeritatem reſ-

Tab. VIII. Fig. 84.

respectivam, qua ventus in planum secundum directionem obliquam in E incurrens agit (§. 245 *Mech.*).

3. Quoniam vero ventus planum ADBC movere nequit nisi circa axem IE, circa quem convertendum: non omnem vim quam habet a celeritate respectiva LM in actionem suam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem IE; evidens est celeritatem LM resolvi in duas alias LN & MN, & eam quæ est secundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.

4. Denique cum in P sit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 141 *Mechan.*), adeoque massæ totius plani ADCB; patet vim quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, concipi posse tanquam applicatam ad punctum P, & PE tanquam radium Axis in Peritrochio cujus centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per *d.* AG. LE. MN. EP (§. 153 *Mech.*). *Q. e. i.*

PROBLEMA LVII.

316. *Determinare situm alarum molendini vi venti indirecte impingentis agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, seu eas maxima celeritate convertit.*

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in Problemate præcedente, dicaturque $AB = a$, $LE = b$, $EP = c$, densitas aëris $= m$, $GB = x$; erit, ob $AE = EB = \frac{1}{2}a$, *per hypoth.* & IE rectæ HB parallelam, $EO = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}x$ (§. 268 *Geom.*), & $AG = \surd(a^2 - x^2)$ (§. 417 *Geom.*).

Tab. VIII. Fig. 84.

2. Quoniam in △△ AGB & LME anguli ad G & M recti, *per constr.* & MEL = ABG (§. 255 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

AB : AG = LE : LM

$$a : \surd(a^2 - x^2) = b : \frac{b\surd(a^2 - x^2)}{a}$$

3. Similiter quia in △△ AEO & LMN, anguli ad O & N recti, *per constr.* &, ob rectum LME *per constr.* & obliquum L, △△ LMN & LME communem, angulus LMN = AEO (§. 246 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

AE : EO = LM : MN.

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}x = \frac{b\surd(a^2-x^2)}{a} : \frac{bx}{aa}\surd(a^2 - x^2)$$

4. Quoniam vis quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, est ut *m.* AG. LE. MN. EP (§. 315); erit ea

$$= m.\surd(a^2-x^2).\,b.\,\frac{bx}{a^2}\surd(a^2-x^2).\,c.$$

$$= b^2cmx - \frac{b^2cmx^3}{a^2}.$$

5. Habemus itaque (§. 63 *Analys. infin.*)

$$b^2cmdx - \frac{3b^2cmx^2dx}{a^2} = 0,$$

$$1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0,$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\surd\tfrac{1}{3}a^2 = x.$$

6. Quod-

Tab. 6. VIII. Fig. 84. Quodsi jam a sumatur pro sinu toto, erit $\sqrt{\frac{1}{3}a^2}$ sinus anguli GAB (§. 2 *Trigon.*), cujus complementum ad rectum est angulus AEI sub quo planum ADCB axem EI secat. Sit itaque $a = 10000000$, erit $\frac{1}{3}a^2 = 33333333333333$, adeoque $x = 5773502$, cui in Tabulis sinuum quam proxime respondent 35° 16′. Est itaque angulus GAB 35° 16′, consequenter AEI qui quæritur 54° 44′.

SCHOLION I.

317. *Cum de constructione Molendinorum vi venti agitandorum ageremus* (§. 929 Mechan.); *angulum* IEA 54° *graduum fieri præcepimus appendicem minutorum negligentes: in præsente nimirum negotio parum refert, sive is fiat* 54°, *sive* 55°. *Vulgo faciunt* 45°, *sed nulla Theoria nixi.*

SCHOLION II.

318. *Quoniam resistentia quam patitur corpus intra fluidum motum, æquipollet percussioni eadem celeritate qua ipsum movetur a fluido factæ; non absimili modo determinari potest optimus situs gubernaculi, cujus ope naves in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem deprehenditur, qui ante,* 54° 44′.

PROBLEMA LVIII.

Tab. VIII. Fig. 85. 319. *Datis radio basis majoris* AE, *& altitudine segmenti conici* EF; *invenire altitudinem coni, cujus segmentum* ACDB, *ita per fluidum motum ut basis minor eidem occurrat & axis* EF *sit ad sectionem fluidi perpendicularis, seu horizonti parallelus, minimam patiatur resistentiam.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quoniam perinde est, sive aqua in frustum conicum ACDB quiescens impingat, sive ipsum in fluido quiescente moveatur; ponamus aquam in quiescens impingere juxta rectas GE & HI. Impinget ergo in basin CD directe, in superficiem indirecte (§. 269); eodem semper manente angulo incidentiæ HCG vel ACI (§. 156 *Geom.*), quod directiones rectæ IH constanter parallelæ rectam AC in quocunque puncto sub eodem angulo secent (§. 255 *Geom.*). Quodsi jam AC sumatur pro sinu toto, erit AI sinus anguli incidentiæ ACI (§. 2 *Trigon.*). Sit EF = IC = a, AE = b, AI = x; erit AC = $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Enimvero cum sinus totus quantitas constans esse debeat, sumatur FE vel IC pro sinu toto: erit itaque ut AC ad AI, ita IC ad sinum anguli incidentiæ, qui adeo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Tab. VIII. Fig. 85.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquæ impingere, quam ad rectam CL ipsi AI æqualem defertur, adeoque ad totam superficiem non plus aquæ allabi quam quæ annulum cujus AI latitudo est directe percuteret. Percussiones directæ in eodem fluido eadem celeritate lato sunt ut plana quæ percutiuntur (§. 280), adeoque annulus exponit percussionem directam ipsius, & circulus minor CD percussionem quam ipse patitur directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percussionum, circuli autem sunt ut quadrata radiorum (§. 409 *Geom.*); resistentia directa quam patitur circulus minor CD, recte exponitur per

Tab. VIII. Fig. 84.

CF^2 sive $IE^2 = b^2 - 2bx + x^2$, & resistentia annuli per $AE^2 - EI^2 = 2bx - x^2$.

3. Quodsi jam infertur: ut quadratum sinus totius a^2 ad quadratum sinus anguli incidentiæ $a^2 x^2 : (a^2 + x^2)$, ita resistentia directa annuli $2bx - x^2$ ad resistentiam indirectam quam patitur superficies frusti conici (§. 309); reperietur hæc $(2bx^3 - x^4)(a^2 + x^2)$.

4. Quodsi jam addatur resistentia directa basis minoris $ba - 2bx + x^2$, *vi num.* 2. prodibit integra resistentia frusti

$$b^2 - 2bx + x^2 + \frac{2bx^3 - x^4}{a^2 + x^2}$$
$$= \frac{a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 + b^2 x^2.}{a^2 + x^2}$$

5. Quoniam resistentia minima, quam istiusmodi frustum patitur *per hypoth.* differentiale ejus nihilo æquale (§. 63 *Anal. infin.*), adeoque $(-2a^2 bdx + 2a^2 xdx + 2b^2 xdx)(a^2 + x^2) - 2xdx(a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 + b^2 x^2)$ per $(a^2 + x^2)^2$ div. $= 0$, hoc est,

$$\frac{2a^2 bx^2 dx - 2a^4 bdx + 2a^4 xdx}{(a^2 + x^2)^2} = 0$$
$$bx^2 - a^2 b + a^2 x = 0$$
$$x^2 + \frac{a^2 x}{b} = a^2$$
$$x^2 + \frac{a^2 x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$
$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2 + a^2)}$$
$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam *per hypoth.* erit (§. 268 *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$
$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

$$\text{Ergo } EG = \frac{2ab^2}{a\sqrt{(4b^2 + a^2)} - a^2}$$
$$= \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}.$$

Enimvero $b^2 = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$ in $\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$. Quare si hic valor substituatur; erit $EG = (\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}) + \frac{1}{2}a$.

7. Fiat itaque $EO = \frac{1}{2}a$; erit $AO = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$: cui si æqualis fiat OG, erit $EG = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$; atque adeo in G vertex coni, cujus frustum ACDB minimam patitur resistentiam, si ea conditione in fluido moveatur quam fert hypothesis Problematis.

Finis Hydraulicæ & totius Tomi II. Elementorum Matheseos.

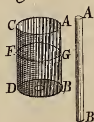
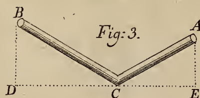
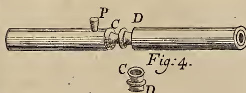
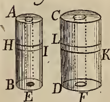

Fig: 1.
C
A
A
F
G
D
B
B


Fig: 2.
G
H
B
M
K
A
D
E
C
L
I
H
O
F


B
Fig: 3.
A
D
C
E


P
C
D
Fig: 4.
C
D


Fig: 5.
A
C
H
I
L
K
B
E
D
F

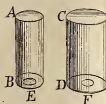
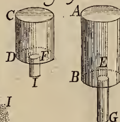
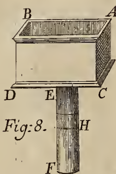
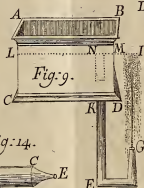
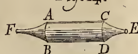

Fig: 6.
A
C
B
E
D
F

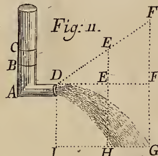

Fig: 12.
E
A
B
C
D

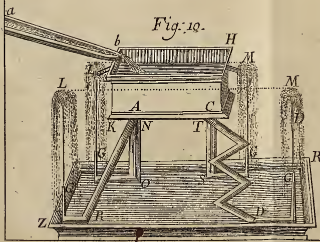

Fig: 7.
C
A
D
F
I
B
E
G


B
A
D
E
C
Fig: 8.
H
F


A
B
L
N
M
I
Fig: 9.
C
K
D
G
E


Fig: 14.
A
C
F
E
B
D


F
Fig: 11.
E
C
B
D
E
F
A
I
H
G


a
Fig: 10.
b
H
M
L
M
A
C
K
N
T
D
G
G
R
O
S
G
G
Z
R
D


E
Fig: 13.
H
D
B
C


D
Fig: 15.
C
A
E
B
F

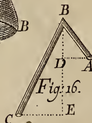
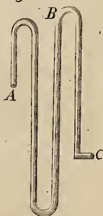
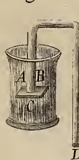

B
D
A
Fig: 16.
E
C

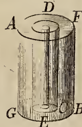
Fig: Hydraul: Tab. II.

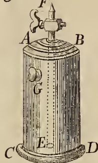


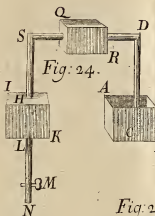


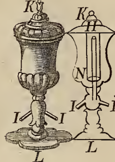


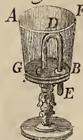


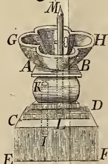




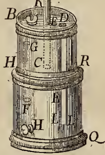
















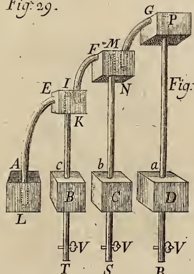
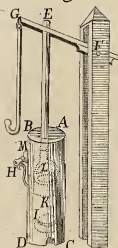
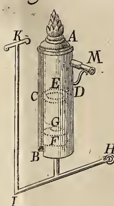
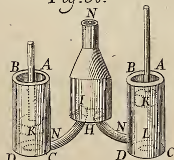


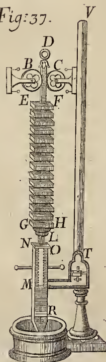
Fig: Hydraul: Tab: III.

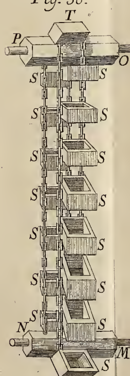


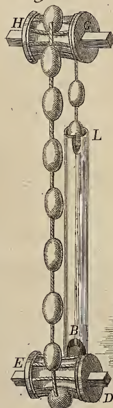












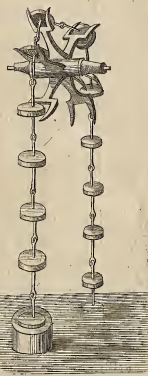
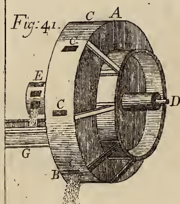
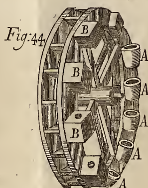
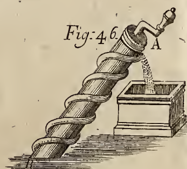
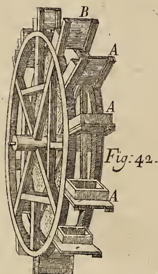


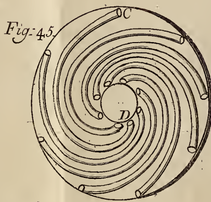
Fig: Hydraul: Tab: IV.

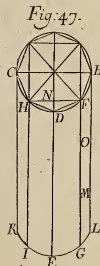


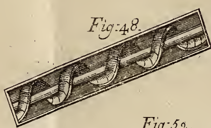


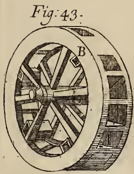


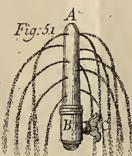


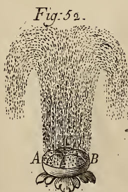




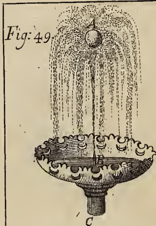











Fig: 49.
A B C

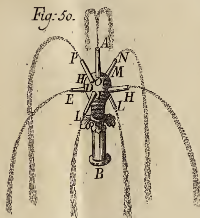
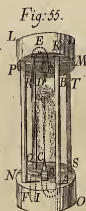
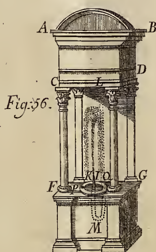
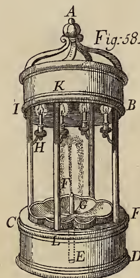
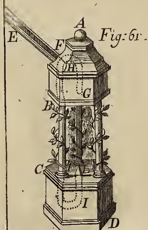

Fig: 50.
A P N M H O D E F H L L B

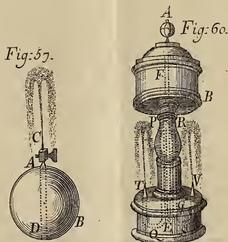

Fig: 54.
C B D E A

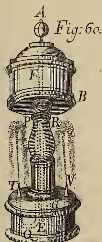

Fig: 55.
L E K P M R D B T Q C S N A F I O

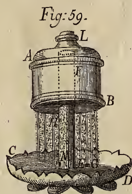

Fig: 56.
A B D C L F G K I O P M

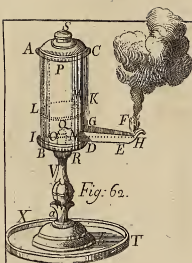

Fig: 58.
A K I B H F G C F L E D


Fig: 61.
E A F H G B C I D


Fig: 57.
C A D B


Fig: 60.
A F B P R T V G E O


Fig: 59.
L A I B C M D


Fig: 62.

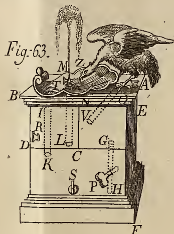
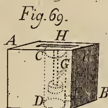

Fig: 63.


Fig: 64.


Fig. 69.

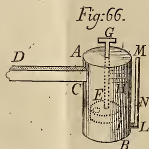
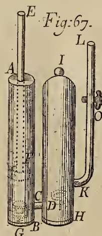
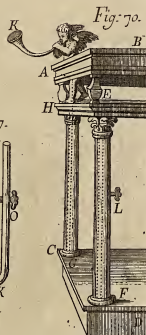
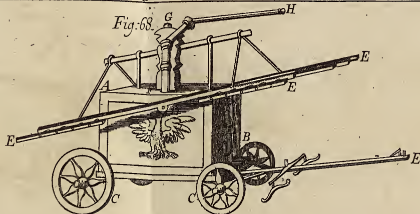
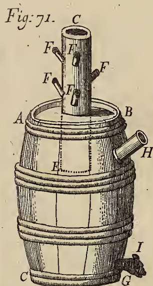

Fig: 66.


Fig: 65.


Fig: 67.


Fig: 70.


Fig: 68.
G
H
A
E
E
E
B
E
C
C


Fig: 71.
C
F
F
F
F
F
A
B
H
E
I
C
G

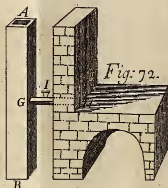

A
Fig: 72.
I
G
H
B


Fig: 75.
A
G
C
D
H
E
F
B


Fig: 74.
A
C
H
L
M
I
N
F
D
B

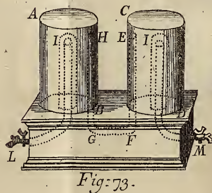
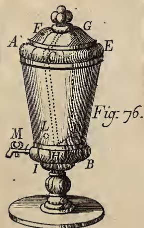

A
C
I
H
E
I
B
D
G
F
L
M

Fig: 73.


F
G
A
E
Fig: 76.
M
L
H
I
B







EMEN

IVERS

OM II

